УДК 517.5

М. О. Назаренко, канд. фіз.-мат. наук, доц., Т. А. Брязкало, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *nanazarenko@gmail.com,* e-mail: *tianan@yandex.ru*

ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ЕРМІТОВИМИ СПЛАЙНАМИ

Запропоновано фрактальну процедуру для отримання сім'ї інтерполяційних відображень пов'язаних з ермітовими сплайнами парного та непарного порядків за довільним розбиттям. При певних обмеженнях, використовуючи техніку наближення многочленами отримано оцінку фрактального наближення ермітовими сплайнами.

ВСТУП. Фрактальна інтерпляція насьогодні є ефективним методом при розв'язанні задач апроксимаційного характеру, (див. наприклад [8, 10]). У працях Барснлі ([5, 6]) запропоновано використання фрактальних функцій для наближення множини вихідних даних. Теорема Барнслі і Харрінгтона ([7]) гарантує існування та єдиність диференційовної фрактальної інтерполяційної функції.

Ця стаття присвячена опису загального способу побудови гладкої фрактальної функції за допомогою ермітових інтерполяційних поліномів. Пропонується фрактальна процедура для отримання сім'ї інтерполяційних фрактальних відображень пов'язаних з ермітовими сплайнами парного і непарного порядків. Досліджено рівномірну збіжність запропонованого методу до вихідної функції, коли діаметр розбиття прямує до нуля.

ПОБУДОВА СИСТЕМИ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕРМІТОВИХ СПЛАЙНІВ. Нехай $t_0 < t_1 < ... < t_N$ – дійсні числа, $I = [t_0, t_N] \subset R$ – відрізок, що включає ці точки, функція g належить класу неперервних на відрізку I функцій $C(I)$. Позначимо через $\Delta:\ \ t_0 < t_1 < ... < t_N$ розбиття відрізка $I = [t_0, t_N] \subset R$. Нехай $I_n = [t_{n-1,} t_n]$, $L_n : I \to I_n, n \in \{1, 2, ..., N\}$ – гомеоморфізм такий, що

$$L_n(t_0) = t_{n-1}, \quad L_n(t_N) = t_{n,} \tag{1}$$

$$|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \le l|c_1 - c_2|, \forall\{c_1, c_2\} \subset I, \tag{2}$$

для $0 \le l \le 1$. Розглянемо для всіх $n = 0, 1, ..., \mathrm{N}$ і $F = I \times R,\ \ |\alpha_n| < 1,\ \ N$ неперервних відображень $F_n : F \to R,$ які задовольняють умови

$$F_n(t_0, x_0) = x_{n-1}, F_n(t_N, x_N) = x_{n,}\ n = 0, 1, ..., \mathrm{N}, \tag{3}$$

$$|F_n(t, x) - F_n(t, y)| \le |\alpha_n||x - y|, t \in I, \{x, y\} \subset R. \tag{4}$$

Визначимо функції

$$w_n(t, x) = (L_n(t), F_n(t, x)), n = 0, 1, ..., \mathrm{N}. \tag{5}$$

Тоді має місце наступна теорема:

Теорема 1.(*Барнслі [8, 10]) Система ітераційних функцій* $\{F, w_n : n = 1, 2, ..., N\}$ *(3)–(5), визначає атрактор* G*, що є графом неперервної функції* $f : I \to R$*, яка задовольняє умови* $f(t_i) = x_i$ *для* $i = 0, 1, ..., N$.

Функція f називається фрактальною інтерполяційною функцією по відношенню до $\{(L_n(t), F_n(t, x)\}_{n=1}^{N}$. Вона є єдиною, яка задовольняє функціональне рівняння

$$f(L_n(t)) = F_n(t, f(t)), n = 0, 1, ..., \mathrm{N}, t \in I,$$

або

$$f(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)), n = 0, 1, ..., \mathrm{N}, t \in I_n = [t_{n-1}, t_n].$$

Нехай $\Im$ – множина неперервних функцій $f : [t_0, t_N] \to R$ таких, що $f(t_0) = x_0$ і $f(t_N) = x_N$. Розглянемо метрику на $\Im$

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [t_0, t_N]\}\ \forall\{f, g\} \subset \Im.$$

Зазначимо, що простір $(\Im, d)$ є метричним і повним. Визначимо відображення $T : \Im \to \Im$ наступним чином:

$$(Tf)(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t))\ \forall t \in [t_{n-1}, t_n], n = 1, 2, ..., N.$$

$(Tf)(t)$ є неперервною функцією на відрізку $[t_{n-1}, t_n]$ для $n = 1, 2, ..., N.$ Відображення T є стискуючим $(\Im, d)$, бо

$$\|Tf - Tg\|_\infty \le |\alpha|\|f - g\|_\infty, \tag{6}$$

де $|\alpha| = \max\{|\alpha_n| : n = 0, 1, ..., \mathrm{N}\}$. Оскільки $|\alpha| < 1$, то відображення T визначає єдину фіксовану точку на $\Im$, тобто існує $f \in \Im$ така, що $(Tf)(t) = f(t)$ для $t \in [t_0, t_N]$. Ця функція є фрактальною інтерполяційною функцією для w_n.

Розглянемо систему ітераційних функцій:

$$\begin{cases} L_n(t) = a_n t + b_n, \\ F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t), \end{cases}$$

$$a_n = \frac{(t_n - t_{n-1})}{(t_N - t_0)}, \quad b_n = \frac{(t_N t_{n-1} - t_0 t_n)}{(t_N - t_{0)}}.$$

У випадку, коли $\alpha_n = 0, n = 1, 2, ..., N,$ маємо $F_n(t, x) = q_n(t)$ і $f(t) = q_n \circ L_n^{-1}(t), t \in I_n$.

Позначимо через $C^p[t_0, t_N]$ множину p разів неперервно-диференційовну на $[t_0, t_N]$ функцій.

Для визначення умов побудови фрактальної інтерполяційної функції, яка буде диференційовною, використаємо наступну теорему.

Теорема 2 *(Барнслі–Харрінгтона [7]). Нехай* $t_0 < t_1 < ... < t_N$, *візьмемо* $L_n(t)$, $n = 1,2,...,N$ *такі, що* $L_n(t) = a_n t + b_n$ *задовольняють співвідношення (1)–(2);* $a_n = L_n'(t) = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{t_N - t_0}$ *і* $F_n(t,x) = \alpha_n x + q_n(t)$, $n = 1,2,...,N$. *Припустимо, для деякого цілого* $p \ge 0, |\alpha_n| < a_n^p$ *і* $q_n \in C^p[t_0, t_N]$, $n = 1,2,...,N$. *Нехай*

$$F_{nk}(t,x) = \frac{\alpha_n x + q_n^{(k)}(t)}{a_n^k},\ x_{0,k} = \frac{q_1^{(k)}(t_0)}{a_1^k - \alpha_1}, x_{N,k} = \frac{q_N^{(k)}(t_N)}{a_N^k - \alpha_N},\ k = 1,2,...,p.$$

Якщо $F_{n-1,k}(t_N, x_{N,k}) = F_{n,k}(t_0, x_{0,k})$, $n = 2,3,...,N$, $k = 1,2,...,p$, *то тоді* $\left\{\left(L_n(t), F_n(t,x)\right)\right\}_{n=1}^{N}$ *визначає фрактальну інтерполяційну функцію* $f \in C^p[t_0, t_N]$ *і* $f^{(k)}$ *є фрактальною інтерполяційною функцією, що визначається*

$$\left\{\left(L_n(t), F_{n,k}(t,x)\right)\right\}_{n=1}^{N}, k = 1,2,...,p.$$

Вважатимемо далі, що $a_n = \dfrac{1}{N}$. Використовуючи теорему Барнслі і Харрінгтона, подамо q_n у такому вигляді:

$$q_n(t) = g \circ L_n(t) - \alpha_n b(t),$$

де g – неперервна функція, $g(t_i) = x_i$, $i = 0,1,...,N,$ а $b(t)$ – така дійсна неперервна функція, $b \ne g$, що $b(t_0) = x_0$, $b(t_N) = x_N$.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Позначимо через g^α фрактальну інтерполяційну функцію, яку іноді називають α-фрактальною функцією для g відносно розбиття Δ та функції b.

Відповідь про оцінку похибки величини $\left\|g^\alpha - g\right\|_\infty$ дає наступна теорема.

Теорема 3. [9] *α-фрактальна функція g^α для функції g відносно Δ і b задовольняє нерівність:*

$$\left\|g^\alpha - g\right\|_\infty \le \frac{|\alpha|}{1-|\alpha|}\left\|g - b\right\|_\infty, |\alpha| = \max_{1\le n\le N}\left\{|\alpha_n|\right\}. \tag{7}$$

При цьому, для $\forall n = 0,1,...,\mathrm{N}$ має місце $g^\alpha(t_n) = g(t_n)$,

З'ясуємо додаткові обмеження на функцію $b(t)$ для того, щоб виконувались умови теореми Барнслі-Харрінгтона і забезпечувалось існування фрактальної інтерполяційної функції. Розглянемо $p \ge 0, |\alpha_n| < \dfrac{1}{N^p}$ і $q_n \in C^p[t_0, t_N]$, $n = 1,2,...,N.$ Обовязкова умова для $n = 2,3,...,N$, $k = 1,2,...,p$

$$F_{n-1,k}(t_N, x_{N,k}) = F_{nk}(t_0, x_{0,k}). \tag{8}$$

Оскільки $F_{nk}(t,x) = \dfrac{\left(\alpha_n x + q_n^{(k)}(t)\right)}{a_n^k}$, $L_n(t) = \dfrac{t}{N} + b_n$, $L_n'(t) = \dfrac{1}{N} = a_n$, то

$$q_n^{(k)}(t) = \frac{1}{N^k} g^k(L_n(t)) - \alpha b^{(k)}(t), \forall k = 0,1,2,...,p,$$

Співвідношення (8) перепишемо наступним чином:

$$N^k \alpha_{n-1} \frac{g^k(t_N) - N^k \alpha_N b^{(k)}(t_N)}{1 - N^k \alpha_N} - \alpha_{n-1} N^k b^{(k)}(t_N) = N^k \alpha_n \frac{g^k(t_0) - N^k \alpha_1 b^{(k)}(t_0)}{1 - N^k \alpha_1} - \alpha_n N^k b^{(k)}(t_0)$$

Якщо взяти $\alpha_n = \alpha$, $n = 1,...,N,$ то одержимо

$$g^{(k)}(t_N) - b^{(k)}(t_N) = g^{(k)}(t_0) - b^{(k)}(t_0).$$

Звідки,

$$\begin{cases} b^{(k)}(t_0) = g^{(k)}(t_0), \\ b^{(k)}(t_N) = g^{(k)}(t_N), \end{cases} \quad \text{де } k = 0,1,2,...,p. \tag{9}$$

Для того, щоб виконувались умови (9) у якості b можна взяти ермітовий інтерполяційний поліном з вузлами t_0, t_N і p похідними

$$b(t) = H_g(t) = \sum_{k=0}^{p} g^{(k)}(t_0)\mathcal{L}_{0k}(t) + \sum_{k=0}^{p} g^{(k)}(t_N)\mathcal{L}_{Nk}(t),$$

де функція $\mathcal{L}_{ik}$ визначається наступним чином для $i = 0, N$, $0 \le k \le p$,

$$l_{0k}(t)=\frac{(t-t_0)^k}{k!}\left(\frac{t-t_N}{t_0-t_N}\right)^{p+1},\quad l_{Nk}(t)=\frac{(t-t_N)^k}{k!}\left(\frac{t-t_0}{t_N-t_0}\right)^{p+1},$$

$$\mathcal{L}_{0p}(t)=l_{0k}(t),\quad \mathcal{L}_{Np}(t)=l_{Nk}(t),\ k=p-1,p-2,...,0,$$

$$\mathcal{L}_{0k}(t)=l_{0k}(t)-\sum_{v=k+1}^{p}l_{0k}^{(v)}(t_0)\mathcal{L}_{0v}(t),\quad \mathcal{L}_{Nk}(t)=l_{Nk}(t)-\sum_{v=k+1}^{p}l_{Nk}^{(v)}(t_0)\mathcal{L}_{Nv}(t).$$

Відображення $\mathcal{L}_{ik}$ задовольняють умову:

$$\mathcal{L}_{ik}^{(\sigma)}(t_j)=\begin{cases}1,\ i=j,\ k=\sigma,\\ 0,\ \text{³í àêø å.}\end{cases}$$

Звідси випливає, що в ролі функції $b(t)$ треба взяти ермітовий інтерполяційний поліном степеня $2p+1$, а функцією g може бути будь-яка функція з класу C^p.

Система ітераційних функцій з k разів диференційовними фрактальними інтерполяційними функціями записується наступним чином:

$$\begin{cases}L_n(t)=\frac{1}{N}t+b_n,\\ F_{nk}(t,x)=N^k\alpha x+N^k q_n^{(k)}(t),\ k=0,1,2,...,p,\end{cases}$$

$$q_n^{(k)}(t)=\frac{1}{N^k}g^k(L_n(t))-\alpha b^{(k)}(t),\ k=0,1,2,...,p,$$

Тоді:

$$\begin{cases}L_n(t)=\frac{1}{N}t+b_n,\\ F_{nk}(t,x)=N^k\alpha x+g^k\circ L_n(t)-N^k\alpha b^k(t),\ k=0,1,2,...,p.\end{cases}$$

тобто, $q_{nk}(t)=g^k\circ L_n(t)-N^k\alpha b^k(t),\ k=0,1,2,...,p,$ і $(g_b^\alpha)^{(k)}=(g^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k\alpha},\ k=0,1,2,...,p.$

Згідно з теоремою 3, величина $\left\|(g_b^\alpha)^{(k)}-g^{(k)}\right\|_\infty$ оцінюється таким чином:

$$\left\|(g_b^\alpha)^{(k)}-g^{(k)}\right\|_\infty=\left\|(g^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k\alpha}-g^{(k)}\right\|_\infty\le\frac{N^k|\alpha|}{1-N^k|\alpha|}\left\|g^{(k)}-b^{(k)}\right\|_\infty.$$

Нехай $\Delta=\{0=t_0<t_1<...<t_N=1\}$ - довільне розбиття відрізка $[0,1]$, $h_i=t_i-t_{i-1}$ і $|\Delta|=\max\limits_{1\le i\le n}h_i$. Поставимо у відповідність кожній функції $f\in C^p$ функції $g_{2p}\in C^p$ і $g_{2p-1}\in C^p$, $p\ge 0$, які задовольняють наступні умови:

a) На кожному проміжку $[t_{i-1},t_i]$ функція g_{2p-1} є алгебраїчним многочленом $2p-1$ порядка, а g_{2p} можна записати у вигляді

$$g_{2p}(x)=\sum_{s=0}^{2p}c_s^{(i)}(t-t_{i-1})^s+c_{2p+1}^{(i)}(t-\overline{t}_{i-1})_+^{2p},\ \overline{t}_{i-1}=t_{i-1}+h_i/2,\quad z_+^k=\left[\max(0,z)\right]^k;$$

b) $g_{2p-k}^{(j)}(f;t_n)=f^{(j)}(t_n),\ k=0,1,\ j=0,1,...,p,\ n=0,1,...,N.$

Відомо, що для $f\in C^p$ функції $g_{2p-k}, k=0,1$ існують і єдині [3]. Функції g_{2p} і g_{2p-1} називають ермітовими сплайнами парного і непарного порядків відповідно.

Для того, щоб оцінити величину $\left\|f-g_{2p-k,b}^\alpha\right\|_\infty$, скористаємось методом проміжного наближення, а саме:

$$\left\|f-g_{2p-k,b}^\alpha\right\|_\infty\le\left\|f-g_{2p-k}\right\|_\infty+\left\|g_{2p-k}-g_{2p-k,b}^\alpha\right\|_\infty.$$

Для оцінки першого доданка правої частини скористаємось результатами праць [1], [2], [4].

Для функції $f\in C^{2p}$, $\left|f^{2p}(t)\right|\le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\|f-g_{2p-1}\right\|_\infty\le\frac{|\Delta|^{2p}}{(2p)!2^{2p}}.$$

Для функції $f\in C^{2p+1}$, $\left|f^{2p}(t)\right|\le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів парного порядку g_{2p} справедлива оцінка

$$\left\|f-g_{2p}\right\|_\infty\le\frac{|\Delta|^{2p+1}}{(2p+1)\left[2p!!\right]^2 2^{2p+1}}.$$

З іншого боку, використовуючи теорему 3, знаходимо

$$\left\| g_{2p-k} - g^{\alpha}_{2p-k,b} \right\|_{\infty} \le \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \left\| g_{2p-k} - b \right\|_{\infty}.$$

Отже, для функції $f \in C^{2p}$, $\left| f^{2p}(t) \right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\| f - g^{\alpha}_{2p-1,b} \right\|_{\infty} \le \frac{|\Delta|^{2p}}{(2p)!2^{2p}} + \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \left\| g_{2p-1} - b \right\|_{\infty}.$$

Для функції $f \in C^{2p+1}$, $\left| f^{2p}(t) \right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів парного порядку g_{2p} справедлива оцінка

$$\left\| f - g^{\alpha}_{2p,b} \right\|_{\infty} \le \frac{|\Delta|^{2p+1}}{(2p+1)[2p!!]^2 \, 2^{2p+1}} + \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \left\| g_{2p} - b \right\|_{\infty}.$$

Зауважимо, що коли $|\alpha| < 1/N^2$ *, то існує* $s = s(N)$ *таке, що* $0 < s < 1$ *і* $|\alpha| \le 1/N^{2+s}$ *. Тоді,*

$$\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \le \frac{1}{N^{2+s}-1}.$$

Дійсно за припущенням $|\alpha| < \frac{1}{N^2}$.Оскільки, $\frac{1}{N^{2+x}} \to \frac{1}{N^2}$ при $x \to 0^+$, то існує $s = s(N)$ таке, що $0 < s < 1$ і $|\alpha| \le \frac{1}{N^{2+s}}$.

У випадку рівномірного розбиття $\overline{\Delta} = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1\}$ відрізка $I = [t_0, t_N] = [0,1]$ з кроком $1/N$ має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $s = s(N)$ *таке, що* $0 < s < 1$ *і* $|\alpha| \le 1/N^{2+s}$. Для функції $f \in C^{2p}$, $\left| f^{2p}(t) \right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\| f - g^{\alpha}_{2p-1,b} \right\|_{\infty} \le \frac{1}{(2p)!(2N)^{2p}} + \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \left\| g_{2p-1} - b \right\|_{\infty}.$$

Для функції $f \in C^{2p}$, $\left| f^{2p}(t) \right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\| f - g^{\alpha}_{2p,b} \right\|_{\infty} \le \frac{1}{(2p+1)[2p!!]^2 (2N)^{2p+1}} + \frac{1}{N^{2+s}-1} \left\| g_{2p} - b \right\|_{\infty}$$

ВИСНОВКИ. У статті запропоновано метод фрактальної інтерполяції за допомогою ермітових сплайнів для апроксимації вихідних функцій. Отримано похибку наближення, при певних обмеженнях щодо вихідної диференційовної функції. Як результат, отримано рівномірну збіжність фрактальної функції до вихідної, коли діаметр розбиття прямує до нуля.

Ці результати гарантують збіжність інтерполянта до будь-якої гладкої функції, коли крок інтерполяції прямує до нуля. Як наслідок, стає можливим апроксимувати будь-яку функцію за допомогою фрактальних ермітових сплайнів з довільною точністю.

Похибка, що отримана, є порівняною з іншими аналогічними процедурами. Можлива втрата точності врівноважується з узагальненням метода, оскільки, інтерполяційні фрактальні функції співпадають з ермітовими сплайнам, у окремому випадку, коли коефіцієнт α дорівнює нулю. Це узагальнення зберігається при збереженні гладкості функції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах диференцируемых функций.// Математические заметки, 1973, т. 37, выпуск 1, с. 165–185.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения, М., «Наука», 1984.
3. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов, М., «Наука», 1976.
4. *Назаренко Н. А., Переверзев С. В.* Точные значения приблежения єрмитовыми сплайнами четной степени на классах дифференцируемых функций, Математические заметки, 1980, т. 28, выпуск 1, с. 33–44
5. *Barnsley M. F.* Fractal Everywhere. – Academic Press, Inc,1988.
6. *Barnsley M. F.* Fractal functions and interpolation. // Contr. Approx. 2, 4 (1986), p. 303–329.
7. *Barnsley M. F., Harrington A. N.* The calculus of fractal interpolation functions. // J. Approx. Theory 57 (1989), p. 14–34.
8. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Generelization of Hermite functions by fractal interpolation. // J. Approx. Theory 131, 1 (2004), p. 19–29.
9. *Navascues M. A., Sebastian M.*V. Fractal Splines – Monografias del Seminario Matematiko Garcia de Galdeano.33 (2006), p. 161–168.
10. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Some results of convergence of cubic spline fractal interpolation functions. // Fractals 11, 1 (2003), p. 1–7.

Стаття надійшла до редколегії 28.11.14

Назаренко Н. А., канд. физ.-мат. наук, Брязкало Т. А., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ФРАКТАЛЬНАЯ АПРОКСИМАЦИЯ ЭРМИТОВЫМИ СПЛАЙНАМИ

Определено фрактальную процедуру для получения семьи интерполяционных отображений, которые связаны с эрмитовыми сплайнами. С помощью некоторых предположений, используя технику приближения полиномами, было получено оценку приближения эрмитовыми сплайнами.

Nazarenko M. O., PhD., Briazkalo T. A., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

HERMITE SPLINE FRACTAL INTERPOLATION

A family of interpolating mappings associated to a hermite spline are defined. Under some hyposeses, and using Hermite polynomials techniques, bounds of interpolation error for function are obtained.

УДК 517.9

Ф. Асроров, канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ФУНКЦІЯ ГРІНА-САМОЙЛЕНКА ТА ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОЖИН ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудовано інтегральну інваріантну множину з використанням функції Гріна-Самойленка.

ВСТУП. Багато еволюційних процесів у фізиці, техніці, біології, економіці протягом свого розвитку піддаються короткочасним впливам. При математичному описі таких процесів часто тривалістю збурення зручно знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація призводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями або як їх ще називають, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Зростання інтересу до таких систем останнім часом пов'язано насамперед із запитами новітньої техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи зайняли дуже помітне місце і інтенсивно розвиваються, розширюючи коло своїх додатків в різнорідних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних завдань. Математичною моделлю еволюційних процесів з короткочасними збуреннями може служити система диференціальних рівнянь з імпульсною дією [2, 4, 8].

Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотних коливань [1, 3, 7] та диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [2, 4, 6, 8].

У даній статті досліджуються лінійні розширення диференціальних рівнянь з імпульсною дією. роботі для яких встановлюються умови, які забезпечують існування інтегральної множини. Однією з достатніх умов існування інтегральної множини є існування функції Гріна–Самойленка.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in R,\quad x \in R^n,\quad \varphi \in \Im^m,\quad \Im^m - m-$ мірний тор; $a(t,\varphi),\quad f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$. – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) по t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π-періодичні по $\varphi_\nu,\quad \nu = \overline{1,m}$, обмежені при всіх $t \in R,\quad \varphi \in \Im^m$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по $i \in Z$ матриці і вектори, $\det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \Im^m$. Послідовність моментів імпульсного збурення $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $\tau_i \to +\infty$. Вважатимемо, що рівномірно по $t \in R$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t,t+T)}{T} = p < \infty. \tag{2}$$

Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця по φ, рівномірно відносно $t \in R$, тобто

$$\|a(t,\varphi_1) - a(t,\varphi_2)\| \leq l\|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{3}$$

Припустимо також, що функції $f(t,\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ задовольняють рівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi)\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi)\| = m.$$

Виходячи з [1, 3, 4, 8], вводимо поняття функції Гріна–Самойленка задачі про інтегральні множини диференціальних рівнянь для імпульсних систем і вкажемо достатні умови існування інтегральної множини.

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь, визначених на торі $\Im^m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) \tag{4}$$

і позначимо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок цієї системи, який задоволняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi.$ В силу компактності фазового простору системи рівнянь (4) і зроблених припущень відносно функції $a(t,\varphi),$ кожний розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi),\quad \varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi,$ при будь-яких $\tau \in R$, $\varphi \in \Im^m$ існує і продовжимо його на всю вісь R .