Назаренко Н. А., канд. физ.-мат. наук, Брязкало Т. А., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ФРАКТАЛЬНАЯ АПРОКСИМАЦИЯ ЭРМИТОВЫМИ СПЛАЙНАМИ

Определено фрактальную процедуру для получения семьи интерполяционных отображений, которые связаны с эрмитовыми сплайнами. С помощью некоторых предположений, используя технику приближения полиномами, было получено оценку приближения эрмитовыми сплайнами.

Nazarenko M. O., PhD., Briazkalo T. A., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

HERMITE SPLINE FRACTAL INTERPOLATION

A family of interpolating mappings associated to a hermite spline are defined. Under some hyposeses, and using Hermite polynomials techniques, bounds of interpolation error for function are obtained.

УДК 517.9

Ф. Асроров, канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ФУНКЦІЯ ГРІНА-САМОЙЛЕНКА ТА ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОЖИН ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудовано інтегральну інваріантну множину з використанням функції Гріна-Самойленка.

ВСТУП. Багато еволюційних процесів у фізиці, техніці, біології, економіці протягом свого розвитку піддаються короткочасним впливам. При математичному описі таких процесів часто тривалістю збурення зручно знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація призводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями або як їх ще називають, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Зростання інтересу до таких систем останнім часом пов'язано насамперед із запитами новітньої техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи зайняли дуже помітне місце і інтенсивно розвиваються, розширюючи коло своїх додатків в різнорідних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних завдань. Математичною моделлю еволюційних процесів з короткочасними збуреннями може служити система диференціальних рівнянь з імпульсною дією [2, 4, 8].

Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотних коливань [1, 3, 7] та диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [2, 4, 6, 8].

У даній статті досліджуються лінійні розширення диференціальних рівнянь з імпульсною дією. роботі для яких встановлюються умови, які забезпечують існування інтегральної множини. Однією з достатніх умов існування інтегральної множини є існування функції Гріна–Самойленка.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in R,\quad x \in R^n,\quad \varphi \in \Im^m,\quad \Im^m - m-$ мірний тор; $a(t,\varphi),\ \ f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$. – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) по t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π-періодичні по $\varphi_\nu,\quad \nu = \overline{1,m}$, обмежені при всіх $t \in R,\quad \varphi \in \Im^m$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по $i \in Z$ матриці і вектори, $\det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \Im^m$. Послідовність моментів імпульсного збурення $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $\tau_i \to +\infty$. Вважатимемо, що рівномірно по $t \in R$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t,t+T)}{T} = p < \infty. \tag{2}$$

Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця по φ, рівномірно відносно $t \in R,$ тобто

$$\|a(t,\varphi_1) - a(t,\varphi_2)\| \le l\|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{3}$$

Припустимо також, що функції $f(t,\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ задовольняють рівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi)\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi)\| = m.$$

Виходячи з [1, 3, 4, 8], вводимо поняття функції Гріна–Самойленка задачі про інтегральні множини диференціальних рівнянь для імпульсних систем і вкажемо достатні умови існування інтегральної множини.

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь, визначених на торі $\Im^m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) \tag{4}$$

і позначимо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок цієї системи, який задоволняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi.$ В силу компактності фазового простору системи рівнянь (4) і зроблених припущень відносно функції $a(t,\varphi),$ кожний розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi),\quad \varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi,$ при будь-яких $\tau \in R$, $\varphi \in \Im^m$ існує і продовжимо його на всю вісь R .

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned} \tag{5}$$

Запишемо відповідну (5) однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x, \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x \end{aligned} \tag{6}$$

і позначимо через $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ матрицант цієї системи. В силу неперервної залежності $\varphi_t(\tau,\varphi)$ від параметрів $\tau \in R$ и $\varphi \in \Im^m$ матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ від цих параметрів залежить неперервним чином.

Лемма. Для будь-яких $t,s,\tau,\sigma \in R$ і $\varphi \in \Im^m$ справедливо $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = \Omega_s^t(\sigma,\varphi)$.

Доведення. Оскільки $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ матрицант системи рівнянь (6), то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi) &= P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi), \\ \Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi)\big|_{t=\tau_i} &= B_i\left(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)\right)\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi). \end{aligned}$$

Замінимо φ на $\varphi_\tau(\sigma,\varphi)$ і, враховуючи властивість $\varphi_t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = \varphi_t(\sigma,\varphi)$, розв'язків $\varphi_t(\tau,\varphi)$ системи (3), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) &= P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))\big|_{t=\tau_i} &= B_i\left(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi)\right)\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)). \end{aligned}$$

Остання рівність означає, що $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ є фундаментальною матрицею системи рівнянь (6), яка при $t=s$ є одиничною матрицею. Але цю ж властивість має і матриця $\Omega_s^t(\sigma,\varphi)$. Це можливо тільки у випадку, коли матриці $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ і $\Omega_s^t(\sigma,\varphi)$ співпадають. Лему доведено.

Нехай $C(t,\varphi)$ – неперервна 2π– періодична по кожній компоненті φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, кусково-неперервна по $t \in R$, з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s \leq t, \\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E - C(s,\varphi_s(t,\varphi))\right], & s > t, \end{cases} \tag{7}$$

і назвемо $G(t,s,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t,\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x, \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi)x, \end{aligned}$$

якщо для всіх $t,s \in R$, $\varphi \in \Im^m$ і деяких, $\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|G(t,s,\varphi)\right\|ds + \sum_{i=\infty-}^{+\infty}\left\|G(t,\tau_i+0,\varphi)\right\| \leq K \tag{8}$$

Вкажемо найпростіші властивості функції Гріна–Самойленка $G(t,s,\varphi)$. З визначення цієї функції випливає, що функція Гріна–Самойленка неперервна для всіх $t,s \in R,\ t \neq s,\ \varphi \in \Im^m,\ 2\pi$– періодична по φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, причому

$$G(s+0,s,\varphi) - G(s-0,s,\varphi) = E.$$

Беручи до уваги лему 1, маємо

$$G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)), & s \leq t, \\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E - C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))\right], & s > t. \end{cases} \tag{9}$$

При $s=\tau$ одержимо $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(t,\varphi)C(\tau,\varphi), & \tau \leq t; \\ -\Omega_\tau^t(t,\varphi)\left[E - C(\tau,\varphi)\right], & \tau > t. \end{cases}$

Як бачимо, матриця $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (6), що розглядається при $t \geq \tau$ і $t < \tau$ відповідно.

Припустимо, що моменти імпульсного впливу τ_i такі, що для всіх $i \in Z.$ виконується оцінка

$$\tau_{i+1}-\tau_i > \theta > 0 . \tag{10}$$

Розглянемо вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)).$$

Враховуючи (10) і (8), одержимо

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))\right\| \le \frac{2\mathrm{K}}{\gamma}\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi\| .$$

Покладемо

$$u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)). \tag{11}$$

Функція $u(t,\varphi)$ -2π – періодична по $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}$ неперервна по $\varphi\in\Im^m$ і кусково-неперервна по $t\in R$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$.

Покажемо, що множина $x=u(t,\varphi),\quad t\in R, \varphi\in\Im^m$ є інтегральною множиною системи рівнянь (1). Для цього розглянемо функцію $x_t(\tau,\varphi)=u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$, де $\varphi_t(\tau,\varphi),\quad \varphi_\tau(\tau,\varphi)=\varphi$ – розв'язок першого з рівнянь системи (1).

Згідно (9), (11) маємо

$$x_t(\tau,\varphi)=u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) =$$

$$\int_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\times C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{\tau_i<t}\Omega_{\tau_i}^t(\tau,\varphi)C(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\left[C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))-E\right]f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + \sum_{\tau_i>t}\Omega_{\tau_i}^t(\tau,\varphi)\left[C(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))-E\right]I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)).$$

Диференціюючи останнє співвідношення по t при $t\ne\tau_j$, знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{dx_t(\tau,\varphi)}{dt} &= \frac{d}{dt}u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\int_{-\infty}^{t}\Omega_s^t(\tau,\varphi)\times C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))\times\\ &\times f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + C(t,\varphi_t(\tau,\varphi))f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\times\\ &\times\int_{t}^{+\infty}\Omega_s^t(\tau,\varphi)\left[C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))-E\right]f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds - \left[C(t,\varphi_t(\tau,\varphi))-E\right]\times\\ &\times f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) =\\ &= P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x_t(\tau,\varphi)+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\end{aligned}$$

для будь-якого $\tau\in R, \varphi\in\Im^m$. А при $t=\tau_j$ маємо

$$x_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)-x_{\tau_j}(\tau,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}(G(\tau_j+0,s,\varphi_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,s,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))\times f(s,\varphi_s(\tau_j,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi)))ds +$$

$$+\sum_{i=-\infty}^{\infty}(G(\tau_j+0,\tau_i,\varphi_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,\tau_i,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))\ I_i(\varphi_{\tau_j}(\tau_j,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))) = B_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))x_{\tau_j}(\tau_j,\varphi)+I_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))$$

для будь-якого $\tau\in R, \varphi\in\Im^m$.

Останні дві рівності доводять, що функція $u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь (5), яка залежить від $\tau\in R, \varphi\in\Im^m$ як від параметрів. Це означає, що множина $x=u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи рівнянь (1).

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 1. Нехай в системі рівнянь (1) функції $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ – неперервні за t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π- періодичні по $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}$, обмежені при всіх $t\in R, \varphi\in\Im^m$. Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця по φ рівномірно відносно $t\in R$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по i матриці і вектори, $\det(E+B_i(\varphi))\ne 0$ для будь-якого $\varphi\in\Im^m$. Для послідовності моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ виконується оцінка (10). Нехай також існує функція Гріна–Самойленка $G(t,s,\varphi)$. Тоді система рівнянь (1) має інтегральну множину

$$x=u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)),\quad t\in R,\quad \varphi\in\Im^m,$$

причому

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|u(t,\varphi)\| \le \frac{2\mathrm{K}}{\gamma}\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi\| . \tag{12}$$

Припустимо тепер, що матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (6) допускає оцінку

$$\left\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-s)} \tag{13}$$

для будь-яких $t \ge s \in R,\ \tau \in R,\ \ \varphi \in \Im^m$ і деяких $K \ge 1, \gamma > 0.$

В цьому випадку, існує функція Гріна-Самойленка наступного вигляду

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi), & s < t, \\ 0, & s \ge t. \end{cases} \tag{14}$$

Властивість (14) випливає з (7). Якщо в (7) покласти $G(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) = E$, то інтегральну множину системи рівнянь (1) подамо у вигляді

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{\tau_{i<t}} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)), \quad t \in R, \quad \varphi \in \Im^m. \tag{15}$$

Покажемо, що ця множина асимптотично стійка.

В системі рівнянь (6) зробимо заміну: $x = u(t,\varphi) + z.$ Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}a(t,\varphi) + \frac{dz}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \Delta u\Big|_{t=\tau_i} + \Delta z\Big|_{t=\tau_i} = P(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))u(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + \Delta z\Big|_{t=\tau_i}.$$

Звідки

$$\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z. \tag{16}$$

Позначимо через $z = z(t,\varphi,z_0) = \Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0$ загальний розв'язок системи рівнянь (16). Використовуючи властивості матриканта $\Omega_0^t(\tau,\varphi)$ для цього розв'язку одержуємо оцінку

$$\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\| = \left\|\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0\right\| = \left\|\Omega_\tau^t(\tau,\varphi)\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0\right\| =$$

$$= \left\|\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\tau,\varphi)z(t,\varphi,z_0)\right\| \le \left\|\Omega_\tau^{t-\tau}(\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\|\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\|,$$

яка справедлива для всіх $t \in R,\ \ \varphi \in \Im^m$. Але в силу лінійності системи рівнянь (5), різниця будь-якого розв'язку $x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0)$ і її розв'язку $x = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$ який лежить на інтегральній множині, є розв'язком рівнянь (6), тобто для цієї різниці справедлива оцінка

$$\left\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| = \left\|z(t,\varphi,z_0)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\|.$$

А це означає, що

$$\left\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \to 0, \text{ при } t \to \infty.$$

Таким чином, нами встановлене наступне твердження.

Теорема 2. Припустимо, що система рівнянь (1) задовольняє умовам теореми 1. Нехай також матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (6) задовольняє нерівності (13). Тоді система рівнянь (1) має асимптотично стійку інтегральну множину (15) і ця множина задовольняє оцінку

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|u(t,\varphi)\right\| \le K_0\left[\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|f(t,\varphi)\right\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|I_i(\varphi\right\|\right], \tag{17}$$

де

$$K_0 = \frac{\mathrm{K}}{\gamma} + K\sup_{t\in R}\sum_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}.$$

Відмітимо, що в припущенні існування кінцевої границі (3) величина $\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ обмежена.

Насправді, з існування границі (3) випливає, що можна вказати таки числа $l_0 > 0$ і натуральне число $q,$ що будь-який відрізок часової вісі довжини l_0 містить найбільше q членів послідовності $\{\tau_i\}$. Тому

$$\sup_{t\in R}\sum_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \le \frac{q}{1-e^{-\gamma l_0}},$$

звідси, в оцінці (17) в якості K_0 можна взяти число $K_0 = K\left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{q}{1-e^{-\gamma l_0}}\right).$

Зокрема, якщо моменти імпульсного впливу τ_i такі, що $\tau_{i+1} - \tau_i \ge \theta > 0$ для всіх $i \in Z,$ то в цьому випадку в якості l_0 може служити $\theta,$ а в якості q – одиниця, так що в якості константи K_0 може бути число $K_0 = K\left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right).$

ВИСНОВКИ. Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудована інтегральна інваріантна множина з використанням функції Гріна–Самойленка. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. К.: ИМ НАН Украины, 2007.
3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
4. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
5. Фекета П. В., Асроров Ф. А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип.23. С. 125–132.
6. Perestyuk N. O., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
7. Samoilenko A. M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
8. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.15

Асроров Ф., канд. физ.-мат. наук., научн. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

ФУНКЦИЯ ГРИНА-САМОЙЛЕНКО И СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием построена интегральная инвариантная множества с использованием функции Грина-Самойленко.

Asrorov F., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

GREEN-SAMOILENKO FUNCTION AND EXISTENCE OF INTEGRAL SETS FOR LINEAR EXTENTIONS OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS

An integral invariant set is constructed for systems of impulsive differential equations by using the Grin-Samoilenko functions.

УДК 517.9

А. Лучко, студ.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Л. Процак, канд. фіз.-мат. наук,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ
e-mail: *alina.v.luchko@gmail.com*, *protsak_l_v@ukr.net*

СЛАБКО НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА НА ПІВОСІ З СИНГУЛЯРНІСТЮ ПЕРШОГО РОДУ

Розглянуто сингулярну крайову задачу на додатній півосі для слабко нелінійної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку, коли розв'язки незбуреної задачі утворюють сім'ю, залежну від кількох параметрів. Сингулярність задачі обумовлена наявністю полюса першого порядку в коефіцієнтах системи та умовою прагнення розв'язку до нуля на нескінченності. Доведено теорему про продовження за малим параметром збурення тих розв'язків незбуреної задачі, параметри яких задовольняють визначальне рівняння.

ВСТУП. Розглядається слабко нелінійна крайова задача

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right) y + \frac{a}{x} + f(x) + \varepsilon F(x, y), \quad x \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty), \tag{1}$$

$$y(0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0. \tag{2}$$

Тут $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $B(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\right)$, $f(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, $F(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. Задача містить параметр збурення $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та параметр керування $\lambda \in \mathbb{R}^n$. При $\varepsilon = 0$ маємо незбурену лінійну задачу

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right) y + \frac{a}{x} + f(x), \tag{3}$$

$$y(0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0. \tag{4}$$

Припустимо, що для деякого $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ ця незбурена задача має розв'язок $y_0(\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. З погляду теорії збурень виникає природне питання: чи знайдеться таке додатне $\varepsilon_* > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ існує пара $\lambda = \lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y = y_\varepsilon(\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, яка задовольняє (1)–(2), і при цьому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \ge 0} \left\| y_\varepsilon(x) - y_0(x) \right\| = 0 \tag{5}$$

(а отже, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \lambda_0$). Якщо відповідь на це питання позитивна, то кажуть, що сім'я функцій $y_\varepsilon(\cdot)$ є *продовженням за малим параметром* $\varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ розв'язку $y_0(\cdot)$ задачі (3)–(4) з $\lambda = \lambda_0$. Водночас важливо описати множину тих параметрів керування незбуреної задачі, для яких існує продовження за малим параметром.