ВИСНОВКИ. Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудована інтегральна інваріантна множина з використанням функції Гріна–Самойленка. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. К.: ИМ НАН Украины, 2007.
3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
4. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
5. Фекета П. В., Асроров Ф. А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип.23. С. 125–132.
6. Perestyuk N. O., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
7. Samoilenko A. M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
8. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.15

Асроров Ф., канд. физ.-мат. наук., научн. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

ФУНКЦИЯ ГРИНА-САМОЙЛЕНКО И СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием построена интегральная инвариантная множества с использованием функции Грина-Самойленко.

Asrorov F., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

GREEN-SAMOILENKO FUNCTION AND EXISTENCE OF INTEGRAL SETS FOR LINEAR EXTENTIONS OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS

An integral invariant set is constructed for systems of impulsive differential equations by using the Grin-Samoilenko functions.

УДК 517.9

А. Лучко, студ.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Л. Процак, канд. фіз.-мат. наук,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ
e-mail: *alina.v.luchko@gmail.com*, *protsak_l_v@ukr.net*

СЛАБКО НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА НА ПІВОСІ З СИНГУЛЯРНІСТЮ ПЕРШОГО РОДУ

Розглянуто сингулярну крайову задачу на додатній півосі для слабко нелінійної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку, коли розв'язки незбуреної задачі утворюють сім'ю, залежну від кількох параметрів. Сингулярність задачі обумовлена наявністю полюса першого порядку в коефіцієнтах системи та умовою прагнення розв'язку до нуля на нескінченності. Доведено теорему про продовження за малим параметром збурення тих розв'язків незбуреної задачі, параметри яких задовольняють визначальне рівняння.

ВСТУП. Розглядається слабко нелінійна крайова задача

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right) y + \frac{a}{x} + f(x) + \varepsilon F(x, y), \quad x \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty), \tag{1}$$

$$y(0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0. \tag{2}$$

Тут $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $B(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\right)$, $f(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, $F(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. Задача містить параметр збурення $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та параметр керування $\lambda \in \mathbb{R}^n$. При $\varepsilon = 0$ маємо незбурену лінійну задачу

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right) y + \frac{a}{x} + f(x), \tag{3}$$

$$y(0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0. \tag{4}$$

Припустимо, що для деякого $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ ця незбурена задача має розв'язок $y_0(\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. З погляду теорії збурень виникає природне питання: чи знайдеться таке додатне $\varepsilon_* > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ існує пара $\lambda = \lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y = y_\varepsilon(\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, яка задовольняє (1)–(2), і при цьому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \ge 0} \left\| y_\varepsilon(x) - y_0(x) \right\| = 0 \tag{5}$$

(а отже, $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \lambda_0$). Якщо відповідь на це питання позитивна, то кажуть, що сім'я функцій $y_\varepsilon(\cdot)$ є *продовженням за малим параметром* $\varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ розв'язку $y_0(\cdot)$ задачі (3)–(4) з $\lambda = \lambda_0$. Водночас важливо описати множину тих параметрів керування незбуреної задачі, для яких існує продовження за малим параметром.

Задача (1)–(2) належить до класу двосторонньо сингулярних, оскільки перша крайова умова ставиться в особливій точці $x=0$, а друга – на нескінченності. Проблеми такого роду виникають при побудові та дослідженні окремих типів розв'язків різноманітних рівнянь математичної фізики, зокрема рівнянь нелінійної теорії поля. Постановки відповідних задач, а також важливі результати з їхнього розв'язання наведено, наприклад, в [7, 11, 13, 15, 16]. У цих працях можна знайти обширну бібліографію, пов'язану із зазначеною тематикою. Проте у нелінійній постановці основна маса робіт стосувалася сингулярних крайових задач на півосі для рівнянь другого порядку.

Для лінійних систем та рівнянь вищого порядку з неінтегровними коефіцієнтами змістовну теорію сингулярних крайових задач на скінченному відрізку розроблено в [6, 14]. В [12] було досліджено задачу (3)–(4) і знайдено достатні умови існування її розв'язків. Серед таких умов, зокрема, фігурує припущення про експоненціальну дихотомічність на півосі $[1,\infty)$ лінійної однорідної системи, асоційованої з неоднорідною системою (3). Наявність цього припущення стає зрозумілою, якщо звернутися до теорії обмежених розв'язків лінійних систем з обмеженою неоднорідністю на півосі або на всій осі [1, 4, 17].

Використаний нами підхід до розв'язання задачі (1)–(2) ідейно близький до розвинутого в працях [5, 8, 10], де вивчалася проблема існування обмежених на всій осі розв'язків слабко нелінійних систем в дусі теорії Фредгольма – Нетера. Важливо відзначити, що, як і в цих статтях, ми не виключаємо так званий резонансний (критичний) випадок, коли відповідна незбурена лінійна однорідна задача має нетривіальні розв'язки, і суттєво використовуємо узагальнену функцію Гріна для зведення вихідної задачі до системи інтегральних рівнянь та знаходження так званого визначального рівняння (рівняння породжувальних амплітуд). Раніше інший підхід до розв'язання дещо загальніших у порівнянні з (1)–(2) задач, який не використовує явно функції Гріна, було запропоновано в [2, 3]. Однак в цих роботах розглядалися лише нерезонансні (некритичні) випадки.

ЗВЕДЕННЯ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ. Як і в [12], стосовно лінійної системи (3) усюди надалі вимагаємо виконання таких умов:

(A): характеристичний поліном оператора A не має коренів з дійсною частиною рівною одиниці і $a\in\operatorname{Im}A$;

(B): лінійна однорідна система $y'=B(x)y$ експоненціально дихотомічна на $[1,\infty)$, причому $M:=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\|B(x)\|<\infty$;

(C): неоднорідність $f(\cdot)$ зникає на нескінченності: $\lim_{x\to\infty}\|f(x)\|=0$.

Сформулюємо також дві додаткові вимоги щодо нелінійності $F(\cdot,\cdot)$:

(D): $\lim_{x\to\infty}\|F(x,0)\|=0$;

(E): для всіх $(x,y)\in\mathbb{R}^{1+n}$ існує неперервна частинна похідна $J(x,y):=F'_y(x,y)$, причому

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\|J(x,0)\|<\infty,\quad \lim_{z\to y}\sup_{x\ge 0}\|J(x,z)-J(x,y)\|=0\quad \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Зауваження 1. *З умови **(E)** та нерівності*

$$\left|\sup_{x\ge0}\|J(x,y)\|-\sup_{x\ge0}\|J(x,z)\|\right|\le\sup_{x\ge0}\|J(x,y)-J(x,z)\|\quad\forall y,z\in\mathbb{R}^n$$

випливає, що функція $\sup_{x\ge0}\|J(x,\cdot)\|$ неперервна, а тоді функція $\|J(\cdot,\cdot)\|$ обмежена на $\mathbb{R}_+\times\mathcal{D}$ для довільної обмеженої області $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$.

Позначимо через $Y(x)$ нормований в точці $x=1$ еволюційний оператор лінійної однорідної системи

$$y'=\left(\frac{A}{x}+B(x)\right)y.\tag{6}$$

Відзначимо, що коли виконується умова **(B)**, то ця система теж експоненціально дихотомічна (див., наприклад, [1, с. 267]).

Як вже зазначалося вище, ми не виключаємо з розгляду критичний випадок, коли існує підпростір $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^n$ з числом вимірів $l:=\dim\mathbb{L}$ такий, що для кожного $v\in\mathbb{L}$ розв'язок $Y(x)v$ системи (6) належить $\mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)$ і зникає при $x\to+\infty$.

Зрозуміло, що тоді

$$C_Y:=\sup_{x\ge0}\max\left\{\|Y(x)v\|:v\in\mathbb{L},\|v\|=1\right\}<\infty.\tag{7}$$

З результатів роботи [12] випливають такі факти стосовно незбуреної задачі:

(a): розв'язок задачі (3)–(4) в класі $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n)$ існує тоді й лише тоді, коли справджується рівність (умова ортогональності)

$$\int_0^\infty PY^{-1}(x)(f(x)+B(x)\eta)\mathrm{d}x=0,\tag{8}$$

де вектор $\eta\in\operatorname{Im}A^*$ однозначно визначається з лінійної системи рівнянь $A\eta+a=0$, а $P:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{M}$ – це ортопроектор на підпростір $\mathbb{M}\subset\mathbb{R}^n$, $m:=\dim\mathbb{M}$, який є ортогональним доповненням (відносно відповідним чином уведеного скалярного добутку) до підпростору початкових значень при $x=1$ тих розв'язків системи (6), які або неперервно диференційовні на $\mathbb{R}_+$, або мають нульову границю при $x\to+\infty$ (у [12] P позначено через P_6); при цьому

$$C_P:=\int_0^\infty\|PY^{-1}(x)\|\mathrm{d}x<\infty;\tag{9}$$

(b): якщо (8) виконується, то розв'язки задачі (3)–(4) в класі $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n)$ утворюють залежну від параметра $v \in \mathbb{L}$ сім'ю $y^0(\cdot, v)$, яка має інтегральне зображення

$$y^0(x,v) = Y(x)v + \eta + \int_0^\infty G(x,s)(f(s) + B(s)\eta)\mathrm{d}s, \tag{10}$$

з деким ядром $G(\cdot,\cdot): \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathrm{Hom}\mathbb{R}^n$, структура якого описана в [12];

(c): ядро $G(\cdot,\cdot)$ можна записати у вигляді

$$G(x,s) = G_0(x,s) + \vartheta(x-s)Y(x)PY^{-1}(s), \quad \vartheta(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

де $G_0(x,s) := G(x,s)Y(s)(E-P)Y^{-1}(s)$, і якщо покласти

$$H(x,s) := G_0(x,s) + \begin{cases} \left[1 + \vartheta(x-s)\right]Y(x)PY^{-1}(s), & x \in [0,1], \\ \vartheta(x-s)Y(x)PY^{-1}(s), & x > 1, \end{cases}$$

то для довільної функції $g(\cdot)$, яка задовольняє умови

$$g(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right), \quad \lim_{x\to\infty} \|g(x)\| = 0, \quad \int_0^\infty PY^{-1}(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{11}$$

справджується рівність $\int_0^\infty G(x,s)g(s)\mathrm{d}s = \int_0^\infty H(x,s)g(s)\mathrm{d}s;$ при цьому виконуються умови рівномірної збіжності невласного інтеграла

$$C_H := \sup_{x\geq 0}\int_0^\infty \|H(x,s)\|\mathrm{d}s < \infty, \quad \lim_{\xi\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} \int_\xi^\infty \|H(x,s)\|\mathrm{d}s = 0 \quad \forall b > 0;$$

(d): множина допустимих параметрів керування являє собою афінний підпростір $\mathbb{A}$ у $\mathbb{R}^n$, утворений елементами вигляду $\lambda = \eta + \zeta_0 + \zeta$, де $\zeta_0 \in \ker A$ – деякий фіксований вектор, а ζ пробігає підпростір усіх тих векторів з $\ker A$, для кожного з яких існує розв'язок $y_\zeta(\cdot)$ однорідної системи (6) такий, що

$$y_\zeta(x) = \left[E + x(E-A)^{-1}B(0) + o(x)\right]\zeta, \quad x \to +0, \quad \lim_{x\to\infty}\|y_\zeta(x)\| = 0.$$

Виберемо фінітну функцію $\varphi(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+\right)$ з компактним носієм $\mathrm{supp}\varphi \subset (0,\infty)$ так, щоб $\int_0^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$, покладемо

$$C_\varphi := \sup_{x\geq 0}\|\varphi(x)Y(x)\|$$

і визначимо ядро

$$K(x,s) := H(x,s) - \left[\int_0^\infty \varphi(t)H(x,t)Y(t)\mathrm{d}t\right]PY^{-1}(s).$$

На підставі фактів **(a)** та **(c)** для всіх $x \geq 0$ маємо нерівність

$$\int_0^\infty \|K(x,s)\|\mathrm{d}s \leq C_H + \left[\int_0^\infty \|H(x,t)\|\|\varphi(t)Y(t)\|\mathrm{d}t\right]\int_0^\infty \|PY^{-1}(s)\|\mathrm{d}s \leq (1 + C_\varphi C_P)C_H,$$

з якої випливає рівномірна збіжність невласного інтеграла

$$C_K := \sup_{x\geq 0}\int_0^\infty \|K(x,s)\|\mathrm{d}s < \infty, \quad \lim_{\xi\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} \int_\xi^\infty \|K(x,s)\|\mathrm{d}s = 0 \quad \forall b > 0. \tag{12}$$

Твердження 2. *Нехай виконується умова ортогональності* (8). *Тоді для довільної функції* $g(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ *такої, що* $\lim_{x\to\infty}\|g(x)\| = 0$*, і кожного* $v \in \mathbb{L}$ *функція*

$$y(\cdot) := y^0(\cdot, v) + \int_0^\infty K(\cdot, s)g(s)\mathrm{d}s$$

є розв'язком класу $\mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ *системи*

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)y + \frac{a}{x} + f(x) + g(x) - \varphi(x)Y(x)\int_0^\infty PY^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

для якого $\lim_{x\to\infty}\|y(x)\| = 0$.

Доведення. Вибір функції $\varphi(\cdot)$ гарантує прагнення норми неоднорідного члена системи (13) до нуля при $x \to \infty$. Крім того, виконана умова ортогональності

$$\int_0^\infty PY^{-1}(x)\left[g(x) - \varphi(x)Y(x)\int_0^\infty PY^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Тому на підставі факту **(c)** маємо

$$\int_0^\infty G(x,s)\left[g(s)-\varphi(s)Y(s)\int_0^\infty PY^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^\infty H(x,s)\left[g(s)-\varphi(s)Y(s)\int_0^\infty PY^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^\infty K(x,s)g(s)\mathrm{d}s,$$

звідки з рахуванням факту **(b)** випливає потрібний висновок.

Наслідок 3. *Якщо функція* $g(\cdot)$ *задовольняє умови* (11)*, то для всіх* $x\in\mathbb{R}_+$ *справджується рівність* $\int_0^\infty G(x,s)g(s)\mathrm{d}s=\int_0^\infty K(x,s)g(s)\mathrm{d}s$.

Твердження 4. *Нехай виконана умова ортогональності* (8)*. Рівномірно обмежена на* $\mathbb{R}_+$ *сім'я функцій* $\left\{y_\varepsilon(\cdot)\in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)\right\}_{\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)}$ *з властивістю*

$$\lim_{x\to\infty}\left\|y_\varepsilon(x)\right\|=0\quad\forall\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$$

є продовженням за малим параметром ε *розв'язку* $y_0(\cdot):=y^0(\cdot;v_0)$ *задачі (3) – (4) тоді й лише тоді, коли для кожного* $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ *існує вектор* $v_\varepsilon\in\mathbb{L}$ *такий, що справджуються рівності*

$$y_\varepsilon(x)=y^0(x,v_\varepsilon)+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)F(s,y_\varepsilon(s))\mathrm{d}s\quad\forall x\in\mathbb{R}_+,\tag{14}$$

$$\int_0^\infty PY^{-1}(x)F(x,y_\varepsilon(x))\mathrm{d}x=0,\tag{15}$$

а вектор $v_0:=\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon$ *задовольняє визначальне рівняння*

$$\Phi(v):=\int_0^\infty PY^{-1}(x)F(x,y^0(x,v))\mathrm{d}x=0.\tag{16}$$

Доведення. Нехай сім'я $\left\{y_\varepsilon(\cdot)\in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)\right\}_{\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)}$ є продовженням розв'язку $y_0(\cdot)$. Оскільки $F(x,y)=F(x,0)+\left[\int_0^1 J(x,sy)\mathrm{d}s\right]y$, то унаслідок (5), умови **(D)** та Зауваження 1 маємо

$$\lim_{x\to\infty}F(x,y_\varepsilon(x))=0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\sup_{x\ge0}\left\|F(x,y_\varepsilon(x))-F(x,y_0(x))\right\|=0.\tag{17}$$

З урахуванням першої границі у цій формулі $y_\varepsilon(\cdot)$ можна розглядати як деякий розв'язок лінійної задачі вигляду (3)–(4), у якій замість $f(x)$ фігурує $f_\varepsilon(x):=f(x)+\varepsilon F(x,y_\varepsilon(x))$. У цьому випадку умова ортогональності зводиться до (15). Тоді з огляду на опис сім'ї всіх розв'язків формулою (10), у якій $f(x)\mapsto f_\varepsilon(x)$, та з урахуванням Наслідку 3 справджується (14), де

$$v_\varepsilon:=y_\varepsilon(1)-\eta-\int_0^\infty K(1,s)(f_\varepsilon(s)+B(s)\eta)\mathrm{d}s\in\mathbb{L}.$$

Звідси випливає, що $\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon=v_0$. Взявши до уваги (9) і другу рівність (17), здійснимо граничний перехід під знаком інтеграла у (15) при $\varepsilon\to0$ і дістанемо $\Phi(v_0)=0$.

Навпаки, якщо сім'я $\left\{y_\varepsilon(\cdot)\in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)\right\}_{\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)}$, про яку йдеться в умові твердження, задовольняє рівності (14), (15), то з урахуванням Твердження 2 для кожного $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ функція $y_\varepsilon(\cdot)$ є розв'язком лінійної задачі вигляду (3)–(4) з неоднорідністю $f_\varepsilon(x)$ замість $f(x)$. І оскільки $\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon=v_0$, то, взявши до уваги (7), дістанемо (5).

З урахуванням доведеного твердження за умови існування розв'язку v_0 визначального рівняння (16) пропонується такий підхід до розв'язання задачі (1)–(2). Розглянемо інтегральне рівняння з параметрами v,ε

$$y(x,v,\varepsilon)=y^0(x,v)+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s;v,\varepsilon))\mathrm{d}s.\tag{18}$$

Нехай встановлено, що це рівняння має розв'язок $y^*(\cdot,v,\varepsilon)$, залежний від векторного параметра v з деякого околу точки v_0 у $\mathbb{L}$ та параметра $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ (ε_0 – деяке додатне число), і такий, що $\lim_{x\to\infty}\left\|y^*(x,v,\varepsilon)\right\|=0$. Тоді, якщо для кожного $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$, де $\varepsilon_*\in(0,\varepsilon_0)$ – достатньо мале, існує розв'язок $v=v_\varepsilon$ рівняння щодо v

$$\Psi(v,\varepsilon):=\int_0^\infty PY^{-1}(x)F(x,y^*(x;v,\varepsilon))\mathrm{d}x=0,\tag{19}$$

такий, що $v_\varepsilon\to v_0$, коли $\varepsilon\to0$, то покладемо $y_\varepsilon(\cdot):=y^*(\cdot,v_\varepsilon,\varepsilon)$. Зрозуміло, що тоді $y_\varepsilon(\cdot)$ та v_ε задовольнятимуть співвідношення (14)–(15), а $y_\varepsilon(\cdot)$ і буде шуканим продовженням розв'язку $y_0(\cdot)$.

ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ. Теоремою, сформульованою нижче, встановлено достатні умови існування сім'ї розв'язків збуреної задачі.

Теорема 5. *Припустимо, що виконані умови* ***(A)–(E)*** *й існує розв'язок* v_0 *визначального рівняння* (16) *такий, що* $\Phi'(v_0):\mathbb{L}\mapsto\mathbb{M}$ *– сюр'єкція. Тоді існують додатні числа* ρ *та* ε_* *такі, що для кожного* $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ *задача* (1)–(2) *має* $(l-m)$*-параметричну неперервно диференційовну сім'ю розв'язків* $y_\varepsilon(\cdot;q)$, $q=(q_1,\ldots,q_{l-m})$, $\|q\|<\rho$, *яка є продовженням за малим параметром* ε *сім'ї розв'язків* $y_0(\cdot;q)$ *незбуреної задачі. При цьому* $y_0(\cdot,0)=y^0(\cdot,v_0)$.

Доведення. Нехай r, R та ε_0 – додатні числа. Покладемо

$$T_R[y_0]:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n:\|y-y_0(x)\|\le R\right\},\quad \mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}:=\mathbb{R}_+\times\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0),$$

де $\mathbb{B}_r(v_0)$ – куля в $\mathbb{L}$ радіусом r та з центром в точці v_0, і позначимо через $\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$ множину тих $y(\cdot,\cdot,\cdot)\in C\left(\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}\mapsto\mathbb{R}^n\right)$, що

$$(x,y(x,v,\varepsilon))\in T_R[y_0]\quad\forall(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0},$$

$$\lim_{x\to\infty}\|y(x,v,\varepsilon)\|=0\quad\forall(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0).$$

Права частина рівності (18) визначає на цій множині оператор, який ми позначимо через $\mathcal{F}[\cdot]$.

Подальші міркування розіб'ємо на кілька етапів.

1. Доведемо існування нерухомої точки оператора $\mathcal{F}[\cdot]$. Насамперед покажемо, що вибором r,R,ε_0 можна розпорядитися так, щоб $\mathcal{F}\left[\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]\right]\subset\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$. З урахуванням Зауваження 1 матимемо

$$C_J(R):=\sup_{(x,y)\in T_R[y_0]}\|J(x,y)\|<\infty,$$

$$C_F(R):=\sup_{(x,y)\in T_R[y_0]}\|F(x,y)\|\le\sup_{x\ge0}\|F(x,y_0(x))\|+C_J(R)R<\infty.$$

Тепер з (12) випливає нерівність

$$\|\mathcal{F}[y](x,v,\varepsilon)-y_0(x)\|\le\|Y(x)(v-v_0)\|+\varepsilon\int_0^\infty\|K(x,s)\|\|F(s,y(s,v,\varepsilon))\|\mathrm{d}s\le C_Yr+\varepsilon_0C_KC_F(R)\le R\quad\forall(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0},$$

як тільки числа r,R,ε_0 задовольнятимуть нерівності

$$C_Yr<R,\quad 0<\varepsilon_0<\left[R-C_Yr\right]/\left[C_KC_F(R)\right].\tag{20}$$

Отже, при виконанні цих нерівностей графік функції $\mathcal{F}[y](\cdot,v,\varepsilon)$ належатиме $T_R[y_0]$ для всіх $(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$. Крім того, з Твердження 2 при $g(\cdot)=\varepsilon F(\cdot,y(\cdot,v,\varepsilon))$ випливає, що $\lim_{x\to\infty}\|\mathcal{F}[y](x,v,\varepsilon)\|=0.$

Тепер доведемо неперервність $\mathcal{F}[y](\cdot,\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}$, а саме, покажемо, що

$$\mathcal{F}[y](x,v,\varepsilon)\to\mathcal{F}[y](\overline{x},\overline{v},\overline{\varepsilon}),\quad \mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}\ni(x,v,\varepsilon)\to(\overline{x},\overline{v},\overline{\varepsilon})\quad\forall(\overline{x},\overline{v},\overline{\varepsilon})\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}.$$

Для цього, очевидно, достатньо для $b>\overline{x}$ обґрунтувати границі

$$\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s,v,\varepsilon))\mathrm{d}s\underset{x\in[0,b]}{\rightrightarrows}\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s,\overline{v},\overline{\varepsilon}))\mathrm{d}s,\quad(v,\varepsilon)\to(\overline{v},\overline{\varepsilon}),$$

$$\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s,\overline{v},\overline{\varepsilon}))\mathrm{d}s\to\int_0^\infty K(\overline{x},s)F(s,y(s,\overline{v},\overline{\varepsilon}))\mathrm{d}s,\quad x\to\overline{x}.$$

Друга границя випливає з диференційовності $\mathcal{F}[y](\cdot,v,\varepsilon)$ на $\mathbb{R}_+$, гарантованій Твердженням 2 при $g(\cdot)=\varepsilon F(\cdot,y(\cdot,v,\varepsilon))$, та факту **(b)**. Для обґрунтування першої границі запишемо нерівність

$$\sup_{x\in[0,b]}\left\|\int_0^\infty K(x,s)\left[F(s,y(s,v,\varepsilon))-F(s,y(s,\overline{v},\overline{\varepsilon}))\right]\mathrm{d}s\right\|\le\left[\sup_{x\in[0,b]}\int_0^\xi\|K(x,s)\|\mathrm{d}s\right]\sup_{s\in[0,\xi]}\|F(s,y(s,v,\varepsilon))-F(s,y(s,\overline{v},\overline{\varepsilon}))\|+$$

$$+2\left[\sup_{x\in[0,b]}\int_\xi^\infty\|K(x,s)\|\mathrm{d}s\right]\sup_{(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}}\|F(s,y(s,v,\varepsilon))\|\le C_K\sup_{s\in[0,\xi]}\|F(s,y(s,v,\varepsilon))-F(s,y(s,\overline{v},\overline{\varepsilon}))\|+2C_F(R)\sup_{x\in[0,b]}\int_\xi^\infty\|K(x,s)\|\mathrm{d}s.$$

В останньому рядку другий доданок можна зробити меншим за будь-яке наперед задане $\delta>0$ за рахунок вибору достатньо великого числа $\xi=\xi_\delta$, а перший доданок при такому значенні ξ_δ прямує до нуля, коли $(v,\varepsilon)\to(\overline{v},\overline{\varepsilon})$, за теоремою Кантора про рівномірну неперервність неперервної функції на компакті.

Увівши тепер у $\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$ стандартну метрику

$$\rho(y_1,y_2)=\sup_{(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}}\|y_1(x,v,\varepsilon)-y_2(x,v,\varepsilon)\|,\quad y_i(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0],\ i=1,2,$$

дістанемо повний метричний простір $\left(\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0],\rho(\cdot,\cdot)\right)$. З урахуванням отриманих вище оцінок легко показати, що

$$\rho\big(\mathcal{F}[y_1],\mathcal{F}[y_2]\big)\le\varepsilon_0 C_K C_J(R)\rho\big(y_1,y_2\big),$$

а тому, якщо поряд з (20) виконується нерівність

$$\varepsilon_0 C_K C_J(R)<1, \tag{21}$$

то $\mathcal{F}[\cdot]$ стискає $\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$ і за теоремою Банаха оператор $\mathcal{F}[\cdot]$ має нерухому точку $y^*(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$. Ця функція є розв'язком інтегрального рівняння (18) і прагне до 0, коли $x\to\infty$. Крім того, очевидно, що $y^*(x,v,0)\equiv y^0(x,v)$.

2. Доведемо, що $y^*(\cdot,\cdot,\cdot)$ має неперервні частинні похідні за змінними v та ε. Природно припустити, що коли існує похідна за напрямком

$$D_{\mathbf{e}}y^*(x,v,\varepsilon):=\lim_{t\to 0}w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon),\quad w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon):=\frac{1}{t}\Big[y^*(x,v+t\mathbf{e},\varepsilon)-y^*(x,v,\varepsilon)\Big],$$

де $\mathbf{e}\in\mathbb{L}$, $\|\mathbf{e}\|=1$, то вона збігається з розв'язком інтегрального рівняння

$$z(x,v,\varepsilon)=Y(x)\mathbf{e}+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)J(s,y^*(s,v,\varepsilon))z(s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s,$$

одержаного формальним диференціюванням за напрямком $\mathbf{e}$ обох частин рівняння (18). Права частина цього рівняння визначає на повному метричному просторі $\Big(\mathcal{M}_{r,\infty,\varepsilon_0}[0],\rho(\cdot,\cdot)\Big)$, де $\mathcal{M}_{r,\infty,\varepsilon_0}[0]:=\bigcup_{R>0}\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[0]$, оператор $\mathcal{J}[\cdot]$. Ті самі міркування, що й на етапі 1, дають підстави стверджувати, що нерівність (21) гарантує існування у цього оператора єдиної нерухомої точки $z_{\mathbf{e}}(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{M}_{r,\infty,\varepsilon_0}[0]$. При цьому на підставі вже відомих нам оцінок дістаємо

$$\rho(z_{\mathbf{e}},0)\le C_Y+\varepsilon_0 C_K C_J(R)\rho(z_{\mathbf{e}},0)\quad\Rightarrow\quad\rho(z_{\mathbf{e}},0)\le C_Y/\big[1-\varepsilon_0 C_K C_J(R)\big]. \tag{22}$$

Легко бачити, що при $0<|t|<\delta\ll 1$ справджується рівність

$$w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)=Y(x)\mathbf{e}+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)I\Big(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\Big)w_{\mathbf{e}}(t,s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s,$$

де $I(s,y_1,y_2):=\int_0^1 J(s,\theta y_1+(1-\theta)y_2)\mathrm{d}\theta$, з якої, в свою чергу, дістаємо оцінку

$$\rho(w_{\mathbf{e}},0)\le C_Y/\big[1-\varepsilon_0 C_K C_J(R)\big].$$

Її наслідком, зокрема, є рівномірна збіжність

$$y^*(x,v+t\mathbf{e},\varepsilon)-y^*(x,v,\varepsilon)\underset{x\in\mathbb{R}_+}{\rightrightarrows}0,\ t\to 0\quad\forall(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0). \tag{23}$$

Різниця $u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon):=w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)-z_{\mathbf{e}}(x,v,\varepsilon)$ справджує рівність

$$u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)\Big[I\Big(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\Big)w_{\mathbf{e}}(t,s,v,\varepsilon)-J\Big(s,y^*(s,v,\varepsilon)\Big)z_{\mathbf{e}}(s,v,\varepsilon)\Big]\mathrm{d}s\equiv$$

$$\equiv\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)I\Big(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\Big)u_{\mathbf{e}}(t,s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s+$$

$$+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)\Big[I\Big(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\Big)-J\Big(s,y^*(s,v,\varepsilon)\Big)\Big]z_{\mathbf{e}}(s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s.$$

Унаслідок виконання умови **(E)** та (23) для будь-якої точки $(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ і для довільного $\sigma>0$ існує $\delta>0$ таке, що

$$\sup_{s\ge 0}\Big\|I\Big(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\Big)-J\Big(s,y^*(s,v,\varepsilon)\Big)\Big\|<\sigma\quad\forall t\in(-\delta,\delta).$$

Тому

$$\sup_{x\ge 0}\|u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)\|\le\varepsilon_0 C_K C_J(R)\sup_{x\ge 0}\|u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)\|+\varepsilon_0 C_K\sigma\rho(z_{\mathbf{e}},0),$$

звідки з урахуванням (22) дістаємо

$$\sup_{x\ge 0}\|u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)\|\le\frac{\sigma\varepsilon_0 C_K C_Y}{\big[1-\varepsilon_0 C_K C_J(R)\big]^2}\quad\forall t\in(-\delta,\delta).$$

Це означає, що $\lim_{t\to 0}w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)=z_{\mathbf{e}}(x,v,\varepsilon)$, а отже, $D_{\mathbf{e}}y^*(x,v,\varepsilon)=z_{\mathbf{e}}(x,v,\varepsilon)$.

Аналогічно, з незначними змінами доводимо існування та неперервність частинної похідної $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(\cdot,\cdot,\cdot)$.

3. Розглянемо рівняння (19). На підставі (9) можна стверджувати, що

$$\Psi(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\mapsto\mathbb{M}\right).$$

Крім того, $\Psi(v,0)\equiv\Phi(v)$. З умов теореми випливає, що $\Psi(v_0,0)=0$ і що ортонормований базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{l}$ простору $\mathbb{L}$ можна вибрати так, щоб вектори $\left\{D_{\mathbf{e}_i}\Phi(v_0)\right\}_{i=1}^{m}$ утворювали базис простору $\mathbb{M}$. Тоді за теоремою про неявну функцію в околі точки $(v_0,0)$ множина рівня $\{(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0):\Psi(v,\varepsilon)=0\}$ утворює диференційовний локальний $(l-m+1)$-вимірний многовид. При цьому існують достатньо малі числа $\rho>0$ та $\varepsilon_*\in(0,\varepsilon_0)$ такі, що цей многовид можна задати параметрично рівнянням $v=\psi(q,\varepsilon)$, де $\psi(0,0)=v_0$,

$$\psi(\cdot,\cdot)\in\mathrm{C}^1\left(\left\{q\in\mathbb{R}^{l-m}:\|q\|<\rho\right\}\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\mapsto\mathbb{L}\right),$$

а за параметри $q=(q_1,\ldots,q_{l-m})$ можна взяти, наприклад, $q_i=\langle v-v_0,\mathbf{e}_{m+i}\rangle$.

4. Для завершення доведення достатньо визначити шукану сім'ю розв'язків у такий спосіб: $y_\varepsilon(x,q):=y^*(x,\psi(q,\varepsilon),\varepsilon)$.

Наслідок 6. *Для кожного* $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ *множина допустимих керувань збуреної задачі містить сім'ю, задану рівнянням*

$$\lambda=\lambda_\varepsilon(q):=Y(+0)\psi(q,\varepsilon)+\eta+\zeta_0+\varepsilon\int_0^\infty G(+0,s)F(s,y_\varepsilon(s,q))\mathrm{d}s,\quad \|q\|<\rho.$$

ВИСНОВКИ. Для сингулярної крайової задачі у критичному випадку, коли відповідна лінійна задача (3)–(4) має неєдиний розв'язок, доведено теорему, яка є аналогом результатів класичної теорії збурень періодичних розв'язків нелінійних систем, започаткованої А. Пуанкаре, та теорії збурень широких класів крайових задач, розробленої в [9].

Існування інтегрального зображення для розв'язків відповідної лінійної задачі дало змогу звести збурену задачу до пари рівнянь – інтегрального та визначального (рівняння породжувальних амплітуд). Як і слід було очікувати, виявилося, що за наявності у незбуреної задачі сім'ї розв'язків продовження за малим параметром допускають, узагалі кажучи, не всі розв'язки сім'ї, а лише ті, які виокремлюються за допомогою зазначеного визначального рівняння.

Питання про застосування отриманих результатів до конкретних прикладних задач буде розглянуто окремо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970 – 534 с.
2. *Парасюк І. О., Позур С. В., Процак Л. В.* Збурення сингулярної нелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку// Вісник Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. – 2006 – вип.15. – С. 20–26.
3. *Парасюк І. О., Позур С. В., Процак Л. В.* Неперервне продовження за малим параметром розв'язку двобічно сингулярної нелінійної крайової задачі на півосі// Наук. записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003, № 4. – С. 177–190.
4. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных диференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 3. – 356–371.
5. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А.* Ограниченные на всей оси решения слабо возмущённых линейных систем // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 11. – С. 1517–1530.
6. *Agarwal R. P., Kiguradze I.* Two-point boundary value problems for higher-order linear differential equations with strong singularities// Bound. Value Probl. – 2006. – 2006, № 83910. P. 1–32.
7. *Agarwal R. P., Mustafa O. G., Rogovchenko Yu. V.* Existence and asymptotic behavior of solutions of a boundary value problem on an infinite interval// Math. Comput. Modelling. – 2005. – 41. – P. 135–157.
8. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line// Нелінійні коливання. – 1999. – 2 , № 1. – С. 3–10.
9. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht, Boston: VSP. The Netherlands, 2004. – 317 p.
10. *Boichuk A.* Dichotomy, trichotomy and solutions of nonlinear systems bounded on R// In: Proc. of XXVI Summer School "Applications of Mathematics in Engineering and Economics", Sozopol 2000. – Sofia: Heron Press, 2001. – P. 9–15.
11. *Duhoux M.* Green function and the property of positivity for singular second order boundary value problem// Tatra Mt. Math. Publ. – 2000. – 19. – P. 1–20.
12. *Horishna Y., Parasyuk I., Protsak L.* Integral representation of solutions to boundary value problems on the half-line for linear ODEs with singularity of the first kind// Electron. J. Differ. Equat. – 2008. – Vol. 2008, №137. – P. 1–18.
13. *Jiang W., Wang B., Wang Zh.* Solvability of a second-order multi-point boundary-value problems at resonance on a half-line with dimker L=2// Electron. J. Differ. Equat. – 2011. – 2011, №. 120 – P. 1–11. (URL: http://ejde.math.txstate.edu)
14. *Kiguradze I. T.* On boundary value problems for linear differential systems with singularities// Differ. Equ. – 2003. – 39. – P. 212–225.
15. *Kiguradze I. T., Shekhter B. L.* Singular boundary-value problems for ordinary second order differential equations// J. Sov. Math. – 1988. – 43. – P. 2340–2417.
16. *O'Regan D.* Solvability of some singular boundary value problems on the semi-infinite interval// Can. J. Math. – 1996. – 48. – P. 143–158.
17. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points// J. Differ. Equ. – 1984. – 55. – P. 225–256.

Стаття надійшла до редколегії 11.11.14

Лучко А., студ.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев
Процак Л., канд. физ.-мат. наук
Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, Киев

СЛАБО НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУОСИ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрена сингулярная краевая задача на положительной полуоси для слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений в критическом случае, когда решения невозмущенной задачи образуют семью, зависящую от нескольких параметров. Сингулярность задачи обусловлена наличием полюса первого порядка в коэффициентах системы и условием стремления решения к нулю на бесконечности. Доказана теорема о продолжении по малому параметру возмущения тех решений невозмущенной задачи, параметры которых удовлетворяют определяющему уравнению.

Luchko A., BA,
Taras Shevchenko National university of Kyiv
Protsak L., PhD
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv

WEAKLY NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM ON THE HALF-LINE WITH SINGULARITY OF THE FIRST KIND

A singular boundary-value problem on the half-line for weakly nonlinear system of differential equations is considered in the critical case where solutions of the corresponding unperturbed problem form a family depending on several parameters. The singularity of the problem is caused by the presence of the first-order pole in system's coefficients as well as by the condition that the solution vanishes at infinity. A theorem is proved on the continuation by small parameter of those solutions of the unperturbed system parameters of which satisfy the determining equation.