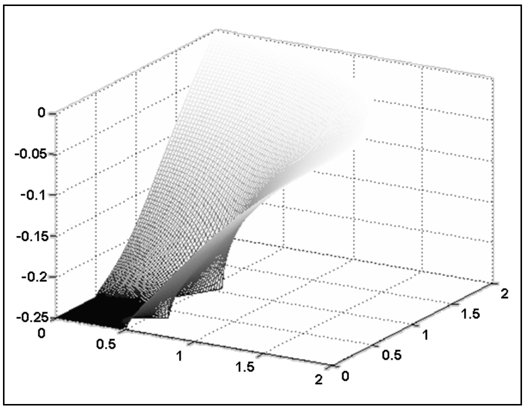

Fig. 6. Values of hydraulic head for n=4

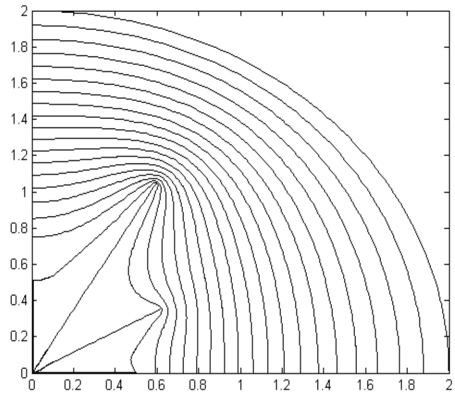

Fig. 7. Isolines of hydraulic head for n=4

CONCLUSIONS. The results of the conducted researches show the effectiveness and validity of the proposed approach for solving the problem of the stationary filtration using the fan-shaped drainage with ditches of equal or different length.

These calculations allow to estimate the hydrodynamic state of soil in a case of the stationary fluid filtration to the system of fan-shaped drainages in circular domains.

The obtained results correspond to the characteristic behavior of the solution of the differential problem. This methodology can be used for solving other problems of this class.

REFERENCES

1. Великоиваненко И. М., Шевченко В. И., Кивва С. Л. Решение задачи установившейся фильтрации к системе веерных дренажей в многослойном грунте // Вычислительная и прикладная математика. – 1984. – Выпуск 53. – С. 120–125.
2. Ляшко И. И., Долидзе Д. Ш., Кивва С. Л. Решение краевых задач фильтрации и влагопереноса в областях сложной формы // Материалы V Всесоюзного семинара "Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости". – Новосибирск, 1981. – С. 224–229.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.
4. Самарский А. А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978.
5. Черный И. А. Подземная гидродинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963.
6. Чертоусов М. Д. Гидравлика. – М. : Госэнергоиздат, 1962.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.14

Довгий Б., канд. физ.-мат. наук, Вакал Е., канд. физ.-мат. наук, Вакал Ю., канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Рассмотрена задача стационарной фильтрации жидкости в круговой области с использованием веерного дренажа. Математическая модель сформулирована как краевая задача для уравнения Пуассона в области круговой формы с заданным числом радиальных разрезов и смешанными краевыми условиями. Задача решена методом конечных разностей с использованием сходящегося метода Зейделя для системы разностных уравнений. Приведены численные расчеты для разных значений параметров задачи.

Довгий Б., канд. фіз.-мат. наук, Вакал Є., канд. фіз.-мат. наук, Вакал Ю., канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ З РОЗРІЗАМИ

Розглянуто задачу стаціонарної фільтрації рідини в круговій області з використанням віялового дренажу. Математичну модель сформульовано як крайову задачу для рівняння Пуассона в області кругової форми з заданим числом радіальних розрізів і змішаними крайовими умовами. Задачу розв'язано методом скінченних різниць з використанням збіжного методу Зейделя для системи різницевих рівнянь. Наведено чисельні розрахунки для різних значень параметрів задачі.

УДК 517.95

Є. Лесіна, канд. фіз.-мат. наук
Красноармійський індустріальний інститут ДВНЗ "ДонНТУ"
e-mail: *lesina17@gmail.com*

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КОМУТУЮЧИМИ МАТРИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Отримано критерій однозначної розв'язності однорідної задачі Діріхле у крузі для безтипового диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку, коефіцієнтами якого є комутуючі квадратні матриці. Необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку записано у вигляді рівності нулю визначника, що залежить від коефіцієнтів наданого рівняння.

ВСТУП. Початком систематичного дослідження властивості ньотеровості крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь вважається стаття Я. Б. Лопатинського [12] 1953 року, де автором вказано умову зведення загальної крайової задачі в обмеженій області до еквівалентної системи інтегральних рівнянь. Пізніше було встановлено необхідність цієї умови [1; 15; 9], яку називають у даний час умовою додатковості, умовою накривання або просто умовою Лопатинського.

© Лесіна Є., 2015

У статті [2] А. В. Біцадзе побудував приклад еліптичної системи диференціальних рівнянь, для якої однорідна задача Діріхле в крузі має нескінченний набір лінійно незалежних поліноміальних розв'язків. Вперше було виявлено ефект нескінченновимірності ядра задачі Діріхле. Згодом він знову навів приклад системи з такою самою властивістю і запровадив поняття слабо зв'язаної системи в довільній області з ляпуновською межею, простір розв'язків задачі Діріхле якої в даній області має скінченну вимірність [3]. Проте умову слабої зв'язаності важко перевірити навіть у випадку круга для скалярного рівняння.

Слід відзначити, що подібні приклади зустрічаються у роботах В. С. Віноградова [7], Є. М. Кузьміна [11], В. І. Шевченка [14]. Останній з них навів приклад еліптичної системи трьох рівнянь другого порядку, для якої має місце порушення ньотеровості задачі Діріхле у чотиривимірній кулі.

Крім того, вивченню ньотеровості крайових задач для кватерніонозначних рівнянь присвячено статтю В. С. Віноградова [8], у якій отримано необхідну і достатню умову на змінні коефіцієнти, що забезпечує скінченновимірність ядра оператора задачі.

Зауважимо, що, як показано В. П. Бурським у статті [5], для єдиності розв'язку першої крайової задачі тип рівняння не має принципового значення. Він отримав критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку із сталими комплексними коефіцієнтами та однорідним невиродженим символом у вигляді π-раціональності кута між різними комплексними характеристиками. В іншій його статті [6] розглянуто однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі для безтипового диференціального рівняння другого порядку

$$au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0,$$

де a,b,c – комплексні квадратні матриці $n\times n$, $u\in H^{2,n}(K)$, $H^{2,n}(K)=\left[H^2(K)\right]^n$ – соболєвський простір вектор-функцій, і отримано критерій порушення єдиності розв'язку задачі в достатньо складній формі, що не піддається перевірці. Тому виникло питання більш простого опису систем із порушенням єдиності, який було реалізовано за допомогою додаткової умови на матриці-коефіцієнти, що полягала у комутативності.

Отже, у поданій статті, із використанням додаткової умови комутативності коефіцієнтів рівняння і методу двоїстості "рівняння-область" (див. [4]), отримано критерій порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле в крузі для безтипового диференціального рівняння другого порядку з комплексними матричними коефіцієнтами у простій формі, що дозволяє будувати приклади систем, оператор задачі Діріхле яких має нетривіальне ядро.

Необхідну і достатню умову нетривіальної розв'язності записано у вигляді рівності нулю визначника, елементи якого виражаються через коефіцієнти наданого рівняння. За умови виконання рівності, у явному вигляді побудовано нетривіальний векторно-поліноміальний розв'язок задачі (1), (2). На додаток наводиться приклад системи диференціальних рівнянь другого порядку, яка задовольняє умову (3) і ядро задачі Діріхле якої є нетривіальним і нескінченновимірним.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ. Для диференціального рівняння з матричними коефіцієнтами та з однорідним за порядком диференціювання символом (без молодших членів)

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0 \tag{1}$$

розглянемо задачу Діріхле

$$u\big|_{\partial K} = 0 \tag{2}$$

в соболєвському просторі $H^{2,n}(K)=\left[H^2(K)\right]^n$ вектор-функцій, де $K=\left\{x\in \mathrm{R}^2 : |x|<1\right\}$ – одиничний круг з межею ∂K. Припустимо, що φ_1 і φ_2 – комутуючі комплексні $n\times n$-матриці, $\varphi_0=\varphi_2-\varphi_1\neq 0$ – їх різниця. Через $l(\xi)=\left(a^1\cdot\xi\right)\left(a^2\cdot\xi\right)$ будемо зазвичай позначати невироджений матричний символ диференціального оператора $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(a^1\cdot\nabla\right)\left(a^2\cdot\nabla\right)$.

Зауважимо, що рівняння $au''_{x_1x_1}+bu''_{x_1x_2}+cu''_{x_2x_2}=0$ (з комутуючими комплексними невиродженими матрицями у якості коефіцієнтів) можна привести до вигляду: $\left(a^1\cdot\nabla\right)\left(a^2\cdot\nabla\right)u=0$, де $a_1^1,\ a_2^1,\ a_1^2,\ a_2^2$ – такі комутуючі матриці, що матриця $\left(a_1^j\right)^2+\left(a_2^j\right)^2$, $j=1,2$, має обернену. Зокрема, в нашому випадку $a^1=\left(\sin\varphi_1,\cos\varphi_1\right)$, $a^2=\left(\sin\varphi_2,\cos\varphi_2\right)$.

Розглянемо ортогональні по відношенню до a^j вектори $\tilde{a}^j=\left(-a_2^j,a_1^j\right)=\left(-\cos\varphi_j,\sin\varphi_j\right)$, $j=1,2$. Слід відзначити, що, відповідно до прийнятих позначень,

$$tg\varphi_j = a_1^j\cdot\left(a_2^j\right)^{-1}, \qquad j=1,2.$$

Це означає, що матриці φ_1 і φ_2 існують лише тоді, коли жодне з характеристичних чисел $\lambda_k^{(1)}$ та $\lambda_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, матриць $a_1^1\cdot\left(a_2^1\right)^{-1}$ і $a_1^2\cdot\left(a_2^2\right)^{-1}$ не дорівнює відповідно $\pm i$. Цей факт пов'язаний із тим, що у скалярному випадку рівняння $tg\phi=\pm i$ не має розв'язків.

Наша мета – дослідити питання порушення єдиності задачі (1), (2) і побудувати приклад задачі з нескінченновимірним та нетривіальним ядром.

ДОВЕДЕННЯ НЕТРИВІАЛЬНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ. У процесі дослідження першої крайової задачі у крузі для рівняння другого порядку з комутуючими матричними коефіцієнтами отримано наступний критерій.

Теорема. *Задача Діріхле (1), (2) має нетривіальний розв'язок у просторі $H^{2,n}(K)$ тоді і тільки тоді, коли існує такий натуральний номер $N \geq 2$, при якому виконується рівність:*

$$\det\left[\sin N\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right] = 0. \tag{3}$$

Якщо умова (3) справедливою має місце, то існує злічена кількість лінійно незалежних векторно-поліноміальних розв'язків.

Спочатку доведемо допоміжне твердження, яке сформулюємо у вигляді леми.

Лема. *Нехай для деякого полінома Q виконується тотожність:*

$$Q\left(\cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau...., \cos m\tau, \sin m\tau\right) \equiv 0 \quad \forall\tau \in \mathrm{R}. \tag{4}$$

Тоді тотожність (4) справедливою виконується і для довільної матриці τ.

Доведення леми. Якщо τ – дійсне число, то після розкладання даного поліному Q у ряд Тейлора за ступенями τ одержимо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot \tau^k = 0, \tag{5}$$

звідки безпосередньо випливає, що усі коефіцієнти $q_k = 0,\ k = 0,1,2,...$.

З іншого боку, якщо τ – довільна матриця, то шляхом множення q_k на τ^k і підсумовування за k, отримаємо вираз вигляду (5), від якого здійснюється перехід до запису (4). Доведення леми завершено.

Доведення теореми.

Необхідність. Нехай $u \in H^{2,n}(K)$ – будь-який нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), $\tilde{u} \in H^{2,n}\left(\mathrm{R}^2\right)$ – деяке продовження функції u на площину. Через $\theta = \theta(x)$ позначимо характеристичну функцію круга K:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \notin K, \\ 0, & x \in K, \end{cases}$$

Подіємо оператором L із умови рівняння (1) на функцію $v = \tilde{u} \cdot \theta$:

$$Lv = -l(\nu)\tilde{u}'_{\nu}\,\delta_{\partial K}. \tag{6}$$

Тут ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі, $\delta_{\partial K}$ – міра, зосереджена на межі ∂K круга K: $\left(\delta_{\partial K}, \varphi\right) = \int\limits_{\partial K} \overline{\varphi} dS$.

Помноживши обидві частини рівності (6) на поліном $x^2 - 1$, який визначає межу області, отримаємо нуль у правій частині:

$$\left(x^2 - 1\right) \cdot Lv = 0\,. \tag{7}$$

Тепер до рівняння (7) застосуємо перетворення Фур'є: $-(\Delta_{\xi} + 1)\left\{\left(a^1 \cdot \xi\right)\left(a^2 \cdot \xi\right) \cdot \hat{v}\right\} = 0$.

Внаслідок теореми Пелі-Вінера, згідно якої перетворення Фур'є функції з компактним носієм є цілою функцією, тобто допускає розклад у ряд Тейлора, для молодшої однорідної частини v_m розкладу степеню однорідності m одержимо:

$$\Delta_{\xi}\left\{\left(a^1 \cdot \xi\right) \cdot \left(a^2 \cdot \xi\right) \cdot v_m\right\} = 0\,.$$

Розв'язок w рівняння Лапласа $\Delta_{\xi} w = 0$ можна записати наступним чином:

$$w = const + \sum_{N=1}^{\infty} r^N \left(c_N \cos N\tau + d_N \sin N\tau\right) \tag{8}$$

з деякими векторними коефіцієнтами c_N, d_N. Оскільки у полярних координатах (r, τ)

$$v_m = r^m \sum_{\beta=0}^{m} \left(A_{\beta} \cos\beta\tau + B_{\beta} \sin\beta\tau\right),$$

то, вважаючи $w = \left(a^1 \cdot \xi\right) \cdot \left(a^2 \cdot \xi\right) \cdot v_m$ у рівності (8) і беручи до уваги, що $\xi = \left(r\cos\tau,\ \ r\sin\tau\right)$, при $N = m + 2$ отримаємо:

$$\left(a^1 \cdot \tilde{\xi}\right) \cdot \left(a^2 \cdot \tilde{\xi}\right) \cdot v_m(\tau) = \cos(m+2)\tau I \cdot c_{m+2} + \sin(m+2)\tau I \cdot d_{m+2}\,. \tag{9}$$

Тут $\tilde{\xi} = \left(\cos\tau, \sin\tau\right)$, I – одинична матриця порядку n. Оскільки

$$\left(a^1 \cdot \tilde{\xi}\right) \cdot \left(a^2 \cdot \tilde{\xi}\right) = \left(\sin\varphi_1 \cos\tau I + \cos\varphi_1 \sin\tau I\right) \cdot \left(\sin\varphi_2 \cos\tau I + \cos\varphi_2 \sin\tau I\right) = \sin\left(\varphi_1 + \tau I\right)\sin\left(\varphi_2 + \tau I\right),$$

то помічаємо, що ліва частина рівності (9) дорівнює нулю, коли $\tau I = -\varphi_j + k\pi I$, $\quad j = 1,2, \quad k = 1,2, \ \ldots$.

Очевидно, при такому значенні τ для правої частини (9) будемо мати однорідну систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \cos\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_1)\right]\cdot c_{m+2}+\sin\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_1)\right]\cdot d_{m+2}=0, \\ \cos\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_2)\right]\cdot c_{m+2}+\sin\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_2)\right]\cdot d_{m+2}=0. \end{cases} \tag{10}$$

Помножимо перше рівняння системи (10) зліва на матрицю $\cos\left[(m+2)(k\pi I-\varphi_2)\right]$, друге – на матрицю $-\cos\left[(m+2)(k\pi I-\varphi_1)\right]$ і складемо одержані рівності. Результатом додавання буде наступне рівняння:

$$\sin\left[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)\right]\cdot d_{m+2}=0. \tag{11}$$

Оскільки система (10) має нетривіальний розв'язок (c_{m+2}, d_{m+2}) (цей факт випливає з нашого припущення щодо існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) та із міркувань двоїстості), то з (11) випливає, що матриця $\sin\left[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)\right]$ вироджена, тобто $\det\left\{\sin\left[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)\right]\right\}=0$, і, таким чином, існує номер $N=m+2$, який забезпечує виконання умови (3).

Лишається обґрунтувати тотожність

$$\left(a^1\cdot\tilde{\xi}\right)\left(a^2\cdot\tilde{\xi}\right)\upsilon_m(\tau)-c_{m+2}\cdot\cos(m+2)\tau-d_{m+2}\cdot\sin(m+2\tau)\equiv 0$$

для будь-якої матриці τ, але цей факт справедливий внаслідок леми, яку було доведено вище для полінома

$$Q(\cos\tau,\sin\tau,....,\cos m\tau,\sin m\tau)=\left(a^1\cdot\tilde{\xi}\right)\left(a^2\cdot\tilde{\xi}\right)v_m(\tau)-c_{m+2}\cdot\cos(m+2)\tau-d_{m+2}\cdot\sin(m+2)\tau.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існує такий натуральний номер $N\ge 2$, що виконується умова (3). Тоді знайдеться деякий ненульовий вектор $\bar{v}$, який анулює матрицю $\sin N(\varphi_2-\varphi_1)$; тобто $\sin N(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\bar{v}=0$.

Покажемо, що для довільного натурального N розв'язком задачі Діріхле (1), (2) є вектор

$$\bar{u}_N=\left(T_{2N}\left(-\tilde{a}^1\cdot x\right)-T_{2N}\left(-\tilde{a}^2\cdot x\right)\right)\cdot\bar{v},$$

де T_{2N} – поліном Чебишева першого роду, $T_{2N}(\cos\alpha)=\cos(2N\alpha)$.

Рівняння (1) після підстановки вектора $\bar{u}_N$ в ліву частину буде задовольнятися тривіально. Таким чином, лишається перевірити справедливість граничної умови (2) для $\bar{u}_N$ маємо

$$\bar{u}_N\Big|_{\partial K}=\left(T_{2N}\left(-\tilde{a}^1\cdot x\right)-T_{2N}\left(-\tilde{a}^2\cdot x\right)\right)\cdot\bar{v}\big|_{\partial K}=\left[T_{2N}\left(\cos(\varphi_1+\tau I)\right)-T_{2N}\left(\cos(\varphi_2+\tau I)\right)\right]\cdot\bar{v}=$$

$$=\left[\cos 2N(\varphi_1+\tau I)-\cos 2N(\varphi_2+\tau I)\right]\cdot\bar{v}=-2\sin N\left(\varphi_1+\varphi_2+\tau I\right)\sin N(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\bar{v}=0.$$

Теорему доведено.

Зауваження. *Легко показати, что подібна задача Діріхле в області, обмеженій еліпсом, за допомогою лінійної заміни зводиться до задачі у крузі, і міркування, які викладено вище, дослівно переносяться на цей випадок.*

Дійсно, задача

$$Lu\equiv\left(\sin\varphi_1\frac{\partial}{\partial x}+\cos\varphi_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial x}+\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot u(x,y)=0,$$

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0$$

у просторі $H^{2,n}(\Omega)=\left[H^2(\Omega)\right]^n$, де $\Omega=\left\{(x,y)\ :\ \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}<1\right\}$, $\partial\Omega=\left\{(x,y)\ :\ \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1,\ \ p\ge q>0\right\}$ – еліпс, φ_1 і φ_2 – комутуючі комплексні $n\times n$-матриці, вводимо заміну змінних $x=p\xi$, $y=q\eta$, зводиться до задачі:

$$\left(\frac{1}{p}\sin\varphi_1\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{q}\cos\varphi_1\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{1}{p}\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{q}\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{u}(\xi,\eta)=0,$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta)\big|_{\partial K}=0,$$

де $K=\left\{(\xi,\eta)\ :\ \xi^2+\eta^2<1\right\}$ – одиничний круг з межею ∂K.

ПРИКЛАД СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З НЕТРИВІАЛЬНИМ РОЗВ'ЯЗКОМ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КРУЗІ. Побудуємо приклад системи диференціальних рівнянь, для якої однорідна задача Діріхле у крузі має нетривіальний розв'язок. При цьому будемо вважати, що $n=2$.

Позначимо $N(\varphi_2-\varphi_1)=N\varphi_0=A$ і розглянемо у якості матриці A наступну симетричну матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix},$$

де $b\in\mathbb{C}$, a визначається за допомогою b. Нам потрібно, щоб виконувалась умова $\det[\sin A]=0$. Маємо [10]:

$$\sin A=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\ldots\ .$$

Неважко показати, що ступінь матриці A можна обчислити за формулою:

$$A^{2k+1}=\begin{pmatrix} b^{2k+1}+C_{2k+1}^{2}b^{2k-1}a^{2}+\ldots+C_{2k+1}^{2k}ba^{2k} & C_{2k+1}^{1}b^{2k}a+C_{2k+1}^{3}b^{2k-2}a^{3}+\ldots+a^{2k+1} \\ C_{2k+1}^{1}b^{2k}a+C_{2k+1}^{3}b^{2k-2}a^{3}+\ldots+a^{2k+1} & b^{2k+1}+C_{2k+1}^{2}b^{2k-1}a^{2}+\ldots+C_{2k+1}^{2k}ba^{2k} \end{pmatrix},\ \text{де}\ k=0,1,2,\ldots,$$

враховуючи яку, після елементарних перетворень, запишемо шукану матрицю $\sin A$ у вигляді:

$$\sin A=\begin{pmatrix} \cos a\sin b & \cos b\sin a \\ \cos b\sin a & \cos a\sin b \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тепер умова $\det\left[\sin A\right]=0$ зводиться до тригонометричного рівняння:

$$\cos^{2}a\sin^{2}b-\cos^{2}b\sin^{2}a=0,$$

звідки знаходимо $a=\pm b+m\pi,\ \ m\in \mathrm{Z}$.

Отже, $A=N\varphi_{0}=\begin{pmatrix} b & \pm b+m\pi \\ \pm b+m\pi & b \end{pmatrix}$, звідки $\varphi_{0}=\varphi_{2}-\varphi_{1}=\begin{pmatrix} \dfrac{b}{N} & \pm\dfrac{b}{N}+\dfrac{m}{N}\pi \\ \pm\dfrac{b}{N}+\dfrac{m}{N}\pi & \dfrac{b}{N} \end{pmatrix}$.

Матриці φ_1 і φ_2 обираємо наступним чином: $\varphi_{1}=\begin{pmatrix} 0 & \mp\dfrac{b}{N}-\dfrac{m}{N}\pi \\ \mp\dfrac{b}{N}-\dfrac{m}{N}\pi & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_{2}=\begin{pmatrix} \dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{N} \end{pmatrix}$.

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що матриці φ_1 і φ_2 комутують.

Далі, беручи до уваги впроваджені вище позначення, обчислимо компоненти векторів a^{j}, $j=1,2$, з умови вихідного рівняння (1). Дійсно,

$$\sin\varphi_{1}=\begin{pmatrix} 0 & \sin\left(\mp\dfrac{b}{N}-\dfrac{m}{N}\pi\right) \\ \sin\left(\mp\dfrac{b}{N}-\dfrac{m}{N}\pi\right) & 0 \end{pmatrix},\quad \cos\varphi_{1}=\begin{pmatrix} \cos\left(\mp\dfrac{b}{N}-\dfrac{m}{N}\pi\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\mp\dfrac{b}{N}-\dfrac{m}{N}\pi\right) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що у процесі пошуку $\sin\varphi_1$ і $\cos\varphi_1$ ми використали формулу (12), а також тригонометричну тотожність $\sin^{2}\varphi_{1}+\cos^{2}\varphi_{1}=I$, яка виконується для довільної невиродженої квадратної матриці φ_1 (див. [10]; [13]).

Не обмежуючи загальності, припустимо, що m є кратним по відношенню до N. Тоді вирази для матриць $\sin\varphi_1$ та $\cos\varphi_1$ набувають більш простої форми, а саме

$$\sin\varphi_{1}=\begin{pmatrix} 0 & \pm\sin\dfrac{b}{N} \\ \pm\sin\dfrac{b}{N} & 0 \end{pmatrix},\quad \cos\varphi_{1}=\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & -\cos\dfrac{b}{N} \end{pmatrix}.$$

відшукаємо аналогічно знаходимо компоненти вектора a^{2}. Маємо:

$$\sin\varphi_{2}=\begin{pmatrix} \sin\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & \sin\dfrac{b}{N} \end{pmatrix},\quad \cos\varphi_{2}=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{b}{N} \end{pmatrix}.$$

Таким чином: $$a^{1}=\left(\sin\varphi_{1},\cos\varphi_{1}\right)=\left(\begin{pmatrix} 0 & \pm\sin\dfrac{b}{N} \\ \pm\sin\dfrac{b}{N} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & -\cos\dfrac{b}{N} \end{pmatrix}\right);$$

$$a^{2}=\left(\sin\varphi_{2},\cos\varphi_{2}\right)=\left(\begin{pmatrix} \sin\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & \sin\dfrac{b}{N} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \cos\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{b}{N} \end{pmatrix}\right).$$

Шукане рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm\sin^{2}\dfrac{b}{N} \\ \pm\sin^{2}\dfrac{b}{N} & 0 \end{pmatrix}\cdot u''_{x_1x_1}+\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{b}{N}\sin\dfrac{b}{N} & \pm\cos\dfrac{b}{N}\sin\dfrac{b}{N} \\ \pm\cos\dfrac{b}{N}\sin\dfrac{b}{N} & \cos\dfrac{b}{N}\sin\dfrac{b}{N} \end{pmatrix}\cdot u''_{x_1x_2}+\begin{pmatrix} -\cos^{2}\dfrac{b}{N} & 0 \\ 0 & -\cos^{2}\dfrac{b}{N} \end{pmatrix}\cdot u''_{x_2x_2}=0,$$

або у еквівалентному вигляді

$$\pm\sin^2\frac{b}{N}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot u''_{x_1x_1} - \sin\frac{b}{N}\cos\frac{b}{N}\begin{pmatrix}1 & \mp 1\\ \mp 1 & 1\end{pmatrix}\cdot u''_{x_1x_2} - \cos^2\frac{b}{N}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot u''_{x_2x_2} = 0 . \quad (13)$$

Перепишемо рівняння (13) у вигляді системи двох скалярних рівнянь, позначивши $u = (f, g)$:

$$\begin{cases}\pm\sin^2\frac{b}{N}\cdot g''_{x_1x_1} - \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot f''_{x_1x_2} \pm\cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot g''_{x_1x_2} - \cos^2\frac{b}{N}\cdot f''_{x_2x_2} = 0,\\ \pm\sin^2\frac{b}{N}\cdot f''_{x_1x_1} \pm\cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot f''_{x_1x_2} - \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot g''_{x_1x_2} - \cos^2\frac{b}{N}\cdot g''_{x_2x_2} = 0.\end{cases} \quad (14)$$

Таким чином, система (14) – це система диференціальних рівнянь другого порядку, для якої ядро першої крайової задачі у крузі є нетривіальним і нескінченновимірним.

ВИСНОВКИ. Досліджено питання нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в крузі для безтипового диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку без молодших членів із комутуючими комплексними матричними коефіцієнтами. Умова комутативності, якій відповідають коефіцієнти рівняння, дозволяє одержати критерій існування нетривіального розв'язку у менш складній формі, яка піддається перевірці. Отримано необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку у вигляді рівності нулю визначника, що залежить від коефіцієнтів даного рівняння. Розглянуто приклад системи диференціальних рівнянь, для якої задача Діріхле у крузі має нетривіальне і нескінченновимірне ядро.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области. // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 511–514.
2. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. // Усп. матем. наук. – 1948. – 6. – С. 211–212.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. – М.: ФМ, 1959. – 164 с.
4. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 316 с.
5. Бурский В. П. О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей. // Укр. матем. журнал. – 1993. – 45. № 7. – С. 898–906.
6. Бурский В. П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге. // Матем. заметки. 1999.– 1. – С. 23–27.
7. Виноградов В. С. О задаче Дирихле для многомерных эллиптических систем второго порядка. // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 766–767.
8. Виноградов В. С. О некоторых эллиптических системах без нётеровских граничных задач. // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 179, № 5. – С. 1223–1226.
9. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. // Матем. сборник. – 1995. – Т. 68, Вып. 110, № 3. – С. 373–416.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М: Наука, 1966. – 576 с.
11. Кузьмин Е. Н. О задаче Дирихле для эллиптических систем в пространстве. // Дифференц. уравнения. – 1957. – Т. 3, № 1. – С. 155–157.
12. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. // Укр. матем. журнал. – 1953. – Т. 5, № 2. – С. 123–151.
13. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М: Наука. 1972. – 232 с.
14. Шевченко В. И. Об эллиптических системах трех уравнений с четырьмя независимыми переменными. // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 210, № 6. – С. 1300–1302.
15. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – Vol. 17, № 1. – P. 35–92.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.15

Лесина Е., канд. физ.-мат. наук
Красноармейский индустриальный институт ДВНЗ "ДонНТУ"

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОММУТИРУЮЩИМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе получен критерий однозначной разрешимости однородной задачи Дирихле в круге для бестипного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, коэффициентами которого являются коммутирующие квадратные матрицы. Необходимое и достаточное условие нарушения единственности решения записано в виде равенства нулю определителя, зависящего от коэффициентов рассматриваемого уравнения.

Lesina Ye., PhD
Krasnoarmiysk Industrial Institute of
State Higher Education Establishment "Donetsk National Technical University"

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH COMMUTING MATRIX COEFFICIENTS

The unique solvability criterion of the homogeneous Dirichlet problem in a disk for untyped second order partial differential equation with commuting matrix coefficients is obtained. The necessary and sufficient condition of the uniqueness violation is formulated as equality to zero of the determinant depending on the coefficients of given equation.