

Зельдич М., канд. фіз.-мат. наук  
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

### О ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ФОРМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОЛЧАНОМ.

Приведено простое и элементарное доказательство канонической  $\mathbb{Z}$  – эквивалентности двух целых квадратичных (соответственно, билинейных) форм, естественным образом ассоциированных с конечным графом (колчаном)  $\Gamma$  без петель и ориентированных циклов. Дано применение этого результата для форм отношения частичного порядка на конечном множестве. Используя развитую технику доказательства, указанный выше результат обобщается на случай, когда колчан может иметь петли и/или ориентированные циклы (приведен краткий набросок такого обобщения).

УДК 539.3

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук  
Національний транспортний університет, Київ  
e-mail: vladislav\_bogdanov@hotmail.com

### ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО УДАР ЖОРСТКОГО ЦИЛИНДРА ПО ПРУЖНОМУ ШАРУ

*Досліджується плоска задача пружного співудару абсолютно жорсткого циліндру з пружним шаром. Розглядається контактна задача з динамічно змінною областю контакту, при цьому враховується підйом середовища. Задача зводиться перетворенням Лапласа і методом розв'язання в ряд за власними функціями до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду, яка чисельно реалізується методом редукції та механічних квадратур. Визначені кількісні динамічні та кінематичні характеристики, що описують процес співудару у залежності від значення початкової швидкості удару і параметрів шару.*

**ВСТУП.** Задачі удару жорстких тіл по деформівних тілах та їхнього співудару залишаються актуальними і досліджуються у різних постановках. Один із найважливіших напрямків таких досліджень є виявлення особливостей руйнування надрізаних балкових зразків при їхньому руйнуванні на триточковий згин за допомогою ударника. Відповідні експерименти дають можливість визначити вкрай необхідну механіці руйнування характеристику матеріалу – в'язкість його руйнування, пов'язану із коефіцієнтом інтенсивності напружень у вістрі тріщини. Оскільки процес є динамічним і може супроводжуватися значними пластичними деформаціями, то його вивчення є складною та багатопланою задачею, яка вимагає аналізу впливу ударника на випробовуване тіло, динамічної взаємодії тіла із опорами, а також процесу початку руйнування та його розвитку. Тема ця надзвичайно широка і пов'язана із численними публікаціями, з масиву яких для цієї публікації вибрано лише достатній мінімум.

У її основу окладаються задачі нестационарної [1–9] ударної взаємодії абсолютно жорсткого плоского ударника з надрізаним у серединному перерізі балковим зразком у динамічній пружно-пластичній постановці. У праці [10] розв'язано відповідну до [1] тривимірну квазістатичну задачу у пружно-пластичній постановці і при цьому виявлено, що напруження значно відрізняються від напружень, отриманих з розв'язку аналогічної задачі у динамічній пружно-пластичній постановці. У публікації [2] розв'язується задача визначення напружень і граничного стану за плоского деформованого стану від триточкового згину балкового зразка з крайовим надрізом. У роботі [3] розв'язується аналогічна задача плоского напруженого стану за критеріальної умови про початок підростання тріщини у момент переміщення розрахованого максимуму напружень від місця безпосереднього продовження вістря тріщини на певну відстань від нього з тим, щоб забезпечити існування максимуму безпосередньо на продовженні вістря тріщини. В публікаціях [4, 6] розв'язано плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого станів з тріщиною, підростання якої контролюється узагальненим локальним  $\sigma_{\theta\theta}$ -критерієм крихкого руйнування. У публікаціях [5, 7] в'язкість руйнування матеріалу визначалася відповідно на основі дослідження розв'язків плоского деформованого стану і просторової задач у припущенні, що тріщина нерухома. Запропоновані моделі дали можливість у своєму розвитку значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У роботі [23] виявлено, що кількісні характеристики необхідних умов утворення холодних (крихких) тріщин при зварюванні низьколегованих високоміцних сталей проявляються достатньо чітко при використанні імовірнісної моделі крихкого руйнування з функцією розподілу Вейбула, параметри якого в загальному випадку залежать від мікроструктури матеріалу і проценту дифузного водню, що міститься у метали. При цьому не згадано про математичну модель і задачу, з якої визначені напруження, використані у співвідношеннях розподілу Вейбула. Це свідчить, що імовірнісний підхід достатньо універсальний та продуктивний, однак зрозуміло, що якщо використовувати більш точну динамічну пружно-пластичну постановку, то отриманий результат буде більш вірогідним. Саме тому у роботах [8, 9] було досліджено тривимірний процес підростання тріщини з прямолінійним фронтом за умови зсуву максимальних напружень від вістря тріщини і локального критерію крихкого руйнування відповідно.

У публікаціях [28–31] запропоновано підхід вивчення динамічного розвитку тріщини у дослідних зразках, який базується на методі Релея. Його суть полягає в моделюванні перебігу динамічних процесів у балці-зразку. Це створює можливість замінити динамічну модель квазістатичною. У [28–30] рух балки описується у вигляді суперпозиції вібраційних мод. Для досягнення більшої точності моделі враховується також кривина поверхні ударника і опор. За такою методикою визначається динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень (ДКІН). У [31] запропонована експериментально-розрахункова методика визначення ДКІН  $K_1$ . Експериментально визначалися навантаження і час руйнування коротких компактних зразків. Одиначний сигнал-відповідь обчислювався окремо методом скінченних елементів. ДКІН визначався згідно лінійної теорії як згортка навантаження і одиначного сигналу-відповіді. При цьому критичне значення ДКІН відповідало моментові часу старту руйнування. Увесь проміжок часу, на якому досліджувався процес руйнування до його завершення, дорівнював 40 мс.

Дослідження з динаміки жорстко-пластичних конструкцій теж охоплюють дуже широке коло питань. Оскільки імпульсне навантаження використовують при штампуванні виробів, то доволі докладно досліджено статичні й динамічні задачі для прямокутних, колових, кільцевих пластин і мембран із різною формою імпульсу навантаження [25].

Основний масив публікацій пов'язаний із вивченням пружного деформування тіл при ударному впливі абсолютно жорстких тіл. Наприклад, у пружній постановці досліджуються [13–15] відповідно плоска й осесиметрична задачі удару штампів по пружному шару без урахування піднімання чи опускання середовища поблизу області контакту. У

[16] досліджено дію нестационарного навантаження на торцеву поверхню пружної півсмуги. У роботі [24] розглянуто плоску пружну задачу динамічної взаємодії абсолютно твердого ударника з пружним ізотропним однорідним півпростором на надзвуковій стадії взаємодії в умовах жорсткого зчеплення контактуючих поверхонь. Тут допускається, що зона контакту може бути багатозв'язною областю. Для розв'язування цієї задачі, зведеної до початкової задачі Коші для системи квазілінійних диференціальних рівнянь, розвинуто гібридні методи.

Удар жорсткого циліндру є цікавим, як граничний випадок удару пружних оболонок [11]. У даній статті використовується підхід [13–15, 11, 12, 17–21, 26], що заснований на зведенні вихідних рівнянь динаміки системи оболонка-шар до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Це дає можливість ефективно здійснювати числову реалізацію задачі і надійно визначити кількісні динамічні й кінематичні характеристики, що описують процес співудару, в залежності від величини початкової швидкості удару, параметрів оболонки і шару. В [13, 15] на відміну від даної статті розв'язується удар з надзвуковою швидкістю.

**МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ.** Абсолютно жорстке циліндричне тіло, що рухається з швидкістю  $V_0$  перпендикулярно до поверхні  $Z = 0$  пружного шару завтовшки  $h$ , в момент часу  $t = 0$  досягає цієї поверхні (рис. 1). Контакт відбувається уздовж твірної циліндра. Жорсткий ударник зв'язуємо з рухомою циліндричною системою координат  $r\theta z'$ , вісь  $z'$  збігається з віссю циліндра, а з шаром – нерухому декартову систему координат  $xuz$ .

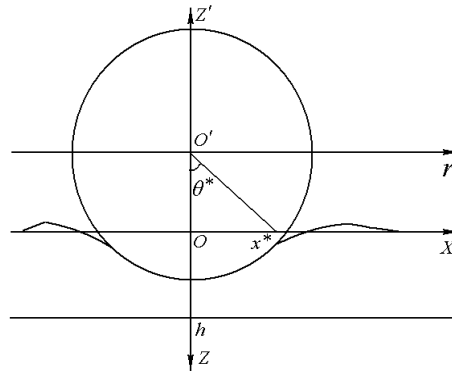


Рис.1. Геометрична схема задачі

Циліндр заглиблюється в пружне середовище зі швидкістю  $V_T(t)$ ,  $(0 \leq t \leq T)$ , причому початкова швидкість проникання  $V_0 = V_T(0)$ ;  $T$  – час, на протязі якого циліндр взаємодіє із шаром. Введемо безрозмірні змінні так, як це було зроблено в [11, 19], при цьому  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $K$ ,  $C_p$  і  $C_S$  – відповідно густина, модуль зсуву, модуль об'ємної деформації і швидкості розповсюдження повздовжніх і поперечних хвиль в пружному середовищі:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{C_0 t}{R}; \quad x' = \frac{x}{R}; \quad z' = \frac{z}{R}; \quad u'_i = \frac{u_i}{R}; \quad u'_0 = \frac{u_0}{R}; \quad w'_0 = \frac{w_0}{R}; \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{K}; \\ v'_T &= \frac{v_T}{C_0}; \quad w'_T = \frac{w_T}{R}; \quad p' = \frac{p}{KR}; \quad q' = \frac{q}{KR}; \quad M' = \frac{M}{\rho R^2}; \quad (i, j = x, y, z); \\ \beta^2 &= \frac{C_S^2}{C_0^2} = \frac{\mu}{K}; \quad \alpha^2 = \frac{C_p^2}{C_0^2} = \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right); \quad C_0^2 = \frac{K}{\rho}; \quad b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{3\mu}{3K + 4\mu}. \end{aligned}$$

Тут  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  – вектор переміщення точок середовища;  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  – ненульові компоненти тензора напружень середовища;  $M$ ,  $v_T$ ,  $w_T$  – погонна маса, швидкість і переміщення ударника як твердого тіла. Далі використовуватимемо лише безрозмірні величини, тому нижче штрих упускаємо.

Рівняння руху пружного шару записуються у вигляді потенціалів [18]:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\alpha^2 \partial t^2}; \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\beta^2 \partial t^2}; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Якщо модуль зсуву  $\mu$  вважати рівним нулю, то рівняння руху пружного середовища будуть рівняннями акустики. Фізичні безрозмірні величини виражаються через хвильові потенціали [19] так:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad u_y = 0; \\ \sigma_{zz} &= (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right); \\ \sigma_{xz} &= 2\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0; \\ \Theta &= \sigma_{zz} + \sigma_{xx} = 2(1 - b^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}; \quad \sigma_{xx} = \Theta - \sigma_{zz}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для розв'язування задачі використовується підхід [11, 17, 18], який дає можливість на початковому етапі проникнення ототожнити лінійні координати вздовж поверхні шару і циліндра, внаслідок чого будуть виконуватися наближені співвідношення

$$r \approx \theta; \quad \text{ctg}\theta \approx 1/\theta. \tag{2}$$

Враховуючи (2), для переміщення  $u_z$  і тиску  $p$  в області контакту будуть виконуватися залежності

$$u_z(t, x, 0) = w_T(t) - 1 + \sqrt{1 - x^2}; \quad |x| < x^*; \quad w_T(t) = \int_0^t V_T(\tau) d\tau; \\ p(t, x) = -\sigma_{zz}(t, x, 0); \quad |x| < x^*. \tag{3}$$

Лінеаризовані крайові умови такі:

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=0} \equiv V(t, x) = v_T(t); \quad |x| < x^*(t); \tag{4}$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0; \quad |x| > x^*(t); \tag{5}$$

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0; \quad |x| < \infty.$$

На межі шару  $z = h$  умови жорсткого зчеплення.

Для часу взаємодії  $0 \leq t \leq T$  зі смуги виокремлюємо прямокутник скінченних розмірів  $\{|x| \leq l; 0 \leq z \leq h\}$  і задачу удару по шару вважатимемо задачею удару по прямокутнику. Довжина прямокутника  $l$  вибирається так, щоб збурені хвилі не встигали дійти до його межі  $|x| = l$  ( $l > \alpha(T - t_0) + x^*(t_0)$ ,  $\left. \frac{dx^*}{dt} \right|_{t=t_0} = \alpha$ ).

Для визначеності розглянемо для прямокутника нульові початкові умови, а на бічній поверхні прямокутника - умови ковзного закріплення

$$u_x|_{|x|=l} = 0; \quad \sigma_{zx}|_{|x|=l} = 0; \\ \phi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad \psi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Рух циліндру як тіла визначається з другого закону Ньютона

$$M\ddot{w}_T(t) = -F(t); \quad V_T(0) = V_0; \quad w_T(0) = 0, \tag{6}$$

де  $F(t)$  – сила реакції пружного шару, що визначається з врахуванням (3), (5) як інтеграл від тиску по області контакту

$$F(t) = 2 \int_0^{x^*(t)} p(t, x) dx.$$

Межа області контакту  $x^*$  з урахуванням підйому середовища і уповільнення проникання циліндру в пружне середовище визначається з умови

$$w_T(t) - 1 + \sqrt{1 - x^{*2}} - u_z(t, x^*, 0) = \{0, \quad |x| \leq x^*(t); \quad \varepsilon < 0, \quad |x| > x^*(t)\}.$$

**СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ.** Застосовуючи до рівнянь (2) перетворення Лапласа за змінною  $t$  з параметром  $s$  і метод Фур'є відокремлення змінних, їх загальний розв'язок з урахуванням умов зникання на нескінченності запишемо у вигляді

$$\phi^L(s, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \exp\left(-z\sqrt{s^2/\alpha^2 + \lambda_n^2}\right) \cos \lambda_n x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \exp\left(z\sqrt{s^2/\alpha^2 + \lambda_n^2}\right) \cos \lambda_n x; \\ \psi^L(s, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) \exp\left(-z\sqrt{s^2/\beta^2 + \lambda_n^2}\right) \sin \lambda_n x + \sum_{n=0}^{\infty} D_n(s) \exp\left(z\sqrt{s^2/\beta^2 + \lambda_n^2}\right) \sin \lambda_n x, \tag{7}$$

де  $\lambda_n = n\pi/l$ ;  $n = \overline{0, \infty}$  – власні числа задачі, що визначаються з умов на бічних поверхнях.

Функції  $V$ ,  $u_z$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zx}$  на поверхні прямокутника записуються у вигляді рядів за системою власних функцій, а функція  $p$  – у вигляді тригонометричного ряду:

$$V(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cos \lambda_n x; \quad u_z(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(t) \cos \lambda_n x; \tag{8}$$

$$\sigma_{zz}(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zn}(t) \cos \lambda_n x; \quad \sigma_{zx}(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zxn}(t) \sin \lambda_n x;$$

$$p(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos(n\pi x). \tag{9}$$

У (3), враховуючи (8) і використовуючи ортогональність тригонометричних функцій, отримуємо вираз для  $n$ -х гармонік тиску

$$p_n(t) = - \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}(x^*) \sigma_{zz,m}(t); \quad \gamma_{mn}(x^*) = \frac{\alpha}{\bar{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \cos nx \cos(\lambda_m x) dx; \quad \bar{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 nxdx. \tag{10}$$

Далі розв'язується задача для рівнянь (1) з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=0} = V(t, x); \quad \sigma_{zx} \Big|_{z=0} = 0; \quad u_z \Big|_{z=h} = 0; \quad u_x \Big|_{z=h} = 0. \quad (11)$$

Задовольняючи (5) з урахуванням (7) і (8), а також застосовуючи обернене перетворення Лапласа і теорему про згортку, отримуємо рівність, що дає зв'язок між компонентами нормальних напружень і вертикальної складової швидкості на поверхні шару:

$$\sigma_{zn}(t) = -\alpha \left( V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \tilde{F}_n(t) + \phi_1(n, t) + \int_0^t (J_0(\beta \lambda_n \xi) \phi_2(n, t-\xi) + J_0(\alpha \lambda_n \xi) \phi_3(n, t-\xi)) d\xi; \\ \tilde{F}_n(t) &= -\alpha \lambda_n J_1(\alpha \lambda_n t) + 2b\beta \lambda_n \left\{ \beta^2 \lambda_n^2 t^2 (\bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t) - J_1(\alpha \lambda_n t) + J_1(\beta \lambda_n t)) + \right. \\ &\quad \left. + \beta \lambda_n t (bJ_0(\alpha \lambda_n t) - J_0(\beta \lambda_n t)) + (2-b^2) \bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t) \right\}; \\ \phi_j(n, t) &= \gamma_j(n, \alpha, \beta, h) + \sum_{i=2}^4 H_j(n, s_i, h) \cos \beta_i t; \quad \beta_i = |\operatorname{Im} s_i|; \quad (i=2; 3; 4); \quad (j=1; 2; 3); \\ H_j(n, s_i, h) &= \frac{2N_j(n, s_i)}{\Delta(s_i)}; \quad \gamma_j(n, \alpha, \beta, h) = -\frac{1}{a_0} \left( \delta_{3j} b_0 + \frac{B_j}{a_1^2} + \frac{D_j}{b_1^2} + \frac{F_j}{c_1^2} \right); \\ \Delta(s) &= a_0 s^2 (9s^6 + 7(a_1 + b_1 + c_1)s^4 + 5(a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1)s^2 + 3a_1 b_1 c_1); \\ a_0 &= \frac{b^4 h^6}{108}; \quad a_1 = \beta^2 \lambda_n^2 + \frac{6\alpha^2}{h^2}; \quad b_1 = \beta^2 \left( \lambda_n^2 + \frac{6}{h^2} \right); \quad c_1 = \frac{3}{h^2} \left( \beta^2 + \frac{\alpha^2 h^2 \lambda_n^2}{3} \right); \\ N_1(n, s) &= a_{01} + a_{11} s^2 + a_{21} s^4 + a_{31} s^6; \quad N_2(n, s) = a_{02} + a_{12} s^2 + a_{22} s^4 + a_{32} s^6; \\ N_3(n, s) &= a_{03} + a_{13} s^2 + a_{23} s^4 + a_{33} s^6 + a_{43} s^8; \quad a_{01} = 2h\beta^9 b \lambda_n^2 (1+b^2)(1+h^2 \lambda_n^2 - 2h^2 \lambda_n^4 / 3); \\ a_{11} &= \beta^5 b (\beta^2 + 2h^2 \lambda_n^2 (\beta^2 (1+b^2)(1+h^2 \lambda_n^2 / 3) - b^2 (2\beta^2 (1+\lambda_n^4 / 3) - h^2 \lambda_n^2 (1-b^2)^2 / 6))) / h; \\ a_{21} &= \beta^5 b h ((1+b^2)(1+h^2 \lambda_n^2 / 3) + h^2 \lambda_n^2 (1+2b^2 - 3b^4) / 3) / 2; \quad a_{31} = \beta^3 b h^3 (1+6b^2 + b^4) / 24; \\ a_{02} &= 2\beta^{10} b \lambda_n^4 (2b^2 + h^2 \lambda_n^2 (2(1+b^2) + 13h^2 \lambda_n^2 / 20) / 3); \quad a_{32} = \beta^4 b^3 \lambda_n^2 (1+2b^2 + b^4 / 5) / 6; \\ a_{12} &= 2\beta^8 b \lambda_n^2 (6b^2 + (2+b^2(5+b^2))h^2 \lambda_n^2 + (7/20 + b^2(7/5 + 2b^2))h^4 \lambda_n^4) / 3; \\ a_{22} &= 2\beta^6 b h^2 \lambda_n^2 (b^2(1+b^2/3) + (4/5 + b^2(4+b^2(10+b^2/5)))h^2 \lambda_n^2); \\ a_{03} &= -2\beta^{10} \lambda_n^4 (2 + (19/3 - b^2)h^4 \lambda_n^4 / 20 + 2(1-b^2/3)h^2 \lambda_n^2); \\ a_{13} &= -2\beta^8 \lambda_n^2 (2 + (2+b^2/3 + b^4/3)h^2 \lambda_n^2 + (23/60 + 3b^2/10 + 2b^4/15)h^4 \lambda_n^4); \\ a_{23} &= -\beta^6 (2 + (2+10b^2/3 + 4b^4/3)h^2 \lambda_n^2 + (7/12 + 19b^2/20 + 8b^4/15 + \beta^2 b^2(1+2b^2 + b^4/5)/3)h^4 \lambda_n^4) / 2; \quad a_{43} = -\beta^4 h^4 b^2 (1+2b^2 + b^4/5) / 24; \quad b_0 = 2a_{43} / a_0; \\ a_{33} &= -\beta^4 (h^2 (b^2(1+b^2/3) + (8b^4/5 + 3b^2 + 4/5)h^2 \lambda_n^2 / 12) + (1+2b^2 + b^4/5)\beta^2 h^2 \lambda_n^2 b^2 / 3); \\ \|B_j; D_j; F_j\| &\|(a, b, c) = \|B; D; F\| \|(b_{2j}, b_{1j}, b_{0j}); \quad B = (a_1^2 a + c - a_1 b)(c_1 - b_1) / \Delta_0; \\ D &= (b_1^2 a + c - b_1 b)(a_1 - c_1) / \Delta_0; \quad F = (c_1^2 a + c - c_1 b)(b_1 - a_1) / \Delta_0; \\ \Delta_0 &= a_1^2 (c_1 - b_1) + b_1^2 (a_1 - c_1) + c_1^2 (b_1 - a_1); \quad b_{0k} = a_{0k} - a_{3k} m_2 / a_0; \quad b_{1k} = a_{1k} - a_{3k} l_2 / a_0; \\ b_{2k} &= a_{2k} - a_{3k} k_2 / a_0; \quad (k=1; 2); \quad b_{03} = a_{03} - m_2 (a_{33} - a_{43} k_2 / a_0) / a_0; \\ b_{13} &= a_{13} - a_{43} m_2 / a_0 - l_2 (a_{33} - a_{43} k_2 / a_0) / a_0; \quad b_{23} = a_{23} - a_{43} l_2 / a_0 - k_2 (a_{33} - a_{43} k_2 / a_0) / a_0; \\ k_2 &= (a_1 + b_1 + c_1) a_0; \quad l_2 = (a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1) a_0; \quad m_2 = a_1 b_1 c_1 a_0; \\ s_1 &= 0; \quad s_2 = i\alpha \sqrt{6/h^2 + \lambda_n^2}; \quad s_3 = i\beta \sqrt{6/h^2 + \lambda_n^2}; \quad s_4 = i\sqrt{3\beta^2/h^2 + \alpha^2 \lambda_n^2}. \end{aligned}$$

При цьому експоненти у (7) було розкладено в степеневі ряди, у яких було утримано шість перших членів. Тут  $J_0(t)$ ,  $J_1(t)$  – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку відповідно, а функцію  $\bar{J}_0(t)$  означено та-

ким чином:  $\bar{J}_0(t) = \int_0^t J_0(\tau) d\tau$ .

Легко перевірити, що коли товщина шару прямує до нескінченності  $\lim_{h \rightarrow \infty} \phi_i(h, n, t) = 0$  ( $i=1; 2; 3$ ), функції  $\phi_i$  дорівнюють нулю і рівність (11) збігається з відповідною рівністю для півпростору [12, 19–21].

Використовуючи останню рівність при задоволенні змішаних крайових умов (4), (5), роблячи перерозвинення в ряди за власними функціями і прирівнюючи коефіцієнти при однакових  $\cos \lambda_n x$ , отримуємо нескінченну систему інтегральних рівнянь Вольєрра другого роду відносно невідомих компонент вертикальної складової швидкості

$$V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = C_n(x^*) v_T(t), \tag{13}$$

де  $\alpha_{mn}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^l \cos \lambda_m x \cos \lambda_n x dx$ ;  $C_n(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \cos \lambda_n x dx$ ;  $N_n^2 = \int_0^l \cos^2 \lambda_n x dx$ .

Рівняння (6) руху циліндра з урахуванням (3), (9), (10) набуде вигляду

$$\frac{dv_T(t)}{dt} = -2\alpha \frac{2\alpha}{M} \left\{ v_T(t) x^*(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x^*(t)}{\lambda_n} \int_0^t V_n(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right\}. \tag{14}$$

**ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ.** Числова реалізація розв'язувальної системи рівнянь (13), (14) полягає у сумісному застосуванні методів квадратур і редукції. Інтеграли в (12)–(14) обчислювалися за симетричною квадратурною формулою Грегорі для рівновіддалених вузлів п'ятого порядку [27]. Задача Коші для диференціального рівняння (14) розв'язувалася методом Адамса четвертого порядку з локальною похибкою присікання  $O(\Delta t^6)$  [27], де  $\Delta t$  – довжина часткових інтервалів, на які розбивали відрізок  $[0; T]$ . Почало розв'язку розраховувалося з кроком  $\Delta t / 16$ . Порядок редукції  $N$  вибирався із міркувань забезпечення практичної збіжності. Для згладжування осциляцій, що виникають при додаванні скінченної кількості членів ряду, а також ефекту Гіббса застосовувалася операція усереднення [22], що зводиться для суми скінченного числа членів тригонометричного ряду до почленного добутку членів скінченної суми на множники Ланцоша  $\sigma_n = (\sin(n\pi / N)) / (n\pi / N)$  ( $n = 0, N$ ).

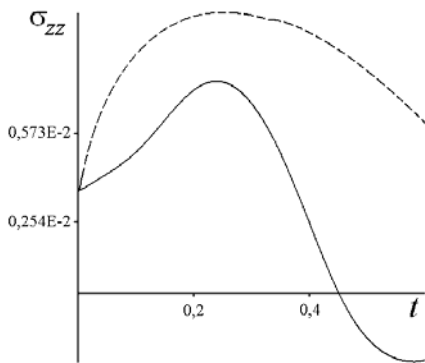


Рис. 2. Нормальні напруження  $\sigma_{zz}$

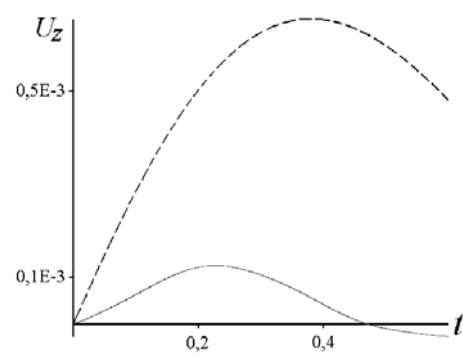


Рис. 3. Переміщення  $u_z$

Надаючи модулю зсуву  $\mu$  значення нуль, маємо, як частковий випадок, задачу удару циліндра по поверхні шару рідини. Для прикладу обчислення було здійснено для алюмінієвого шару результати для випадку, коли  $V_0 = 0,003$ ,  $\mu = 0,3582K$ ,  $M = 0,03$ ,  $l = 10$ ,  $T = 0,6$ ,  $h = 2$ . На рис. 2–5 суцільними лініями зображено залежності від часу відповідно нормальних напружень  $\sigma_{zz}$ , нормальних переміщень  $u_z$  в точці початкового дотику циліндра, сила реакції пружного шару  $P$  і швидкість  $v_T$  проникання тіла в середовище. Для порівняння штриховими лініями зображені дані аналогічної задачі удару жорсткого циліндра по алюмінієвому півпростору.

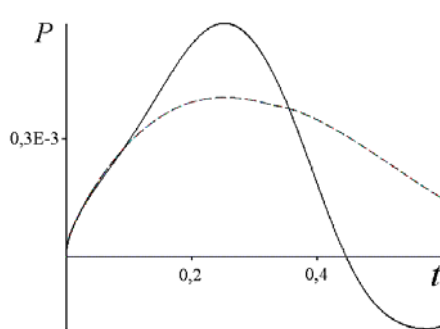


Рис. 4. Сила реакції  $P$

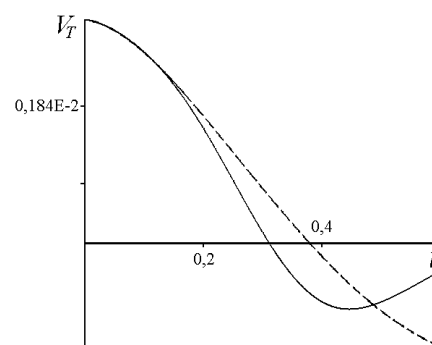


Рис. 5. Швидкість  $v_T$

На початковій стадії удару (при безрозмірному часі, меншому від 0,07 – це є час на протязі якого ударна хвиля  $C_S$  не досягає нижньої межі шару) розв'язки для смуги і півпростору збігаються. Оскільки у (7) у просторі трансформант Лапласа було здійснене розкладання у степеневі ряди, то фактично було змодельовано досить усталений за часом процес удару, однак отримані результати значно відрізняються від випадку удару по поверхні півпростору,

коли взагалі немає відбитих від нижньої межі хвиль. Варто звернути увагу і на те, що при менших на 30 % нормальних напруженнях  $\sigma_{zz}$ , переміщення  $u_z$  у точці початкового дотику у разі удару по півпростору у п'ятеро менше.

**ВИСНОВКИ.** Розв'язана контактна задача плоскої деформації про пружний співудар абсолютно жорсткого циліндру з пружним шаром, зчепленим із абсолютно жорсткою основою, у якій область контакту вважається динамічно змінюваною, причому додатково враховується можливість піднімання поверхні шару в околі краю зони контакту вище від первісного рівня. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа та застосування розвиненого у ряди за власними функціями задачу зведено до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, яка розв'язується числово методом редукції та механічних квадратур. Розроблена методика дає можливість визначити кількісні динамічні та кінематичні характеристики, що описують процес співудару у залежності від значення початкової швидкості удару і параметрів шару.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини. // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. "Фіз.-мат. науки" – 2009. – Вип. 2. – С. 51–56.
2. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упруго-пластических деформаций при динамическом нагружении // Теор. и прикл. мех., Донецк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.
3. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
4. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделювання руху тріщини на основі чисельного розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
5. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.
6. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Збірник наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій", Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44.
7. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник "Надежность и долговечность машин и сооружений". – 2010. – № 33. – С. 153–166.
8. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі чисельного розв'язування // Збірник наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій", Дніпропетровськ. – 2012. – № 19. – С. 10–19.
9. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделювання руху тріщини у компактному зразку на основі чисельного розв'язування просторової задачі // Збірник наукових праць "Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла", Дніпропетровськ. – 2012. – № 13. – С. 60–68.
10. Богданов В. Р. О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца // Теор. и прикл. мех., Донецк. – 2011. – Вип. 3 (49). – С. 51–58.
11. Богданов В. Р., Левицька О. Р., Приходько Т. Б., Радзівіл О. Ю., Самборська Л. С. Плоска задача удару оболонки об пружний шар // Вісник НТУ. – Киев. – 2009. – С. 283 – 292.
12. Богданов В. Р. Задача соударения тонкостенных оболочек с упругой средой // Ин-т механики АН Украины – Киев. – 1994. Рус. – Рук. Деп. В ГПНТБ Украины от 13.12.94 г. № 2388 – Ук94.
13. Кубенко В. Д. Нестационарное вдавливание затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя // Доповіді Нац. Акад. Наук. – 2007. – № 4. – С. 58–65.
14. Кубенко В. Д. Осесимметричная задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя // Доповіді Нац. Акад. Наук. – 2008. – № 1. – С. 58–67.
15. Кубенко В. Д., Марченко Т. А. Плоская задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого индентора в поверхность упругого слоя // Прикл.механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 55–65.
16. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Тарлаковский Д. В. Действие нестационарной нагрузки на поверхность упругой полосы // Доповіді Нац. Акад. Наук. – 2008. – № 1. – С. 59–65.
17. Кубенко В. Д. Об одном способе решения задач проникания тел в акустическую и упругую среду // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Тездокл. – Ереван, 1984. – С.183–187.
18. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. – Киев: Наук.думка, 1981. – 160 с.
19. Кубенко В. Д., Богданов В. Р. Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл.механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 78–86.
20. Кубенко В. Д., Попов С. Н., Богданов В. Р. Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность упругого полупространства // Доп.нац.акад.наук України – 1995. – № 7. – С. 40–44.
21. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл.механика. – 1988. – 24, № 7. – С. 69–77.
22. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М: Физматгиз, 1961. – 524 с.
23. Махненко В. И., Позняков В. Д., Великоиваненко Е. А., Розынка Г. Ф., Пивторак Н. И. Риск образования холодных трещин при сварке конструкционных высокопрочных сталей // Збірник наукових праць "Обробка матеріалів у машинобудуванні", Національний університет кораблебудування, Миколаїв. – 2009. – № 3. – С. 5–12.
24. Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В. Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения // Вестник МАИ. – 2011. – Т. 18. – №6. – С. 125–132.
25. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград // Новосибирск: Академическое изд-во "Гео". – 2009. – 311 с.
26. Попов С. Н. Вертикальный удар жесткого кругового цилиндра боковой поверхностью об упругое полупространство // Прикл.механика. – 1989. – 25, № 12. – С. 41–47.
27. Хемминг Р. В. Численные методы. М: – Наука, 1972. – 399 с.
28. Rokach I. V. On the numerical evaluation of the anvil force for accurate dynamic stress intensity factor determination // Engineering Fracture Mechanics. – 70. – 2003. – P. 2059–2074.
29. Rokach I. V. Modal approach for processing one- and three-point bend test data for dsif-time diagram determination. Part I-theory // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 21. – 1998. – P. 1007–1014.
30. Rokach I. V. Influence of contact compliance on dynamic stress intensity factor variation during an impact test // International Journal of Fracture. – 126. – 2004. – P. 41–46.
31. Weisbrod G., Rittel D. A method for dynamic fracture toughness determination using short beams // International Journal of Fracture. – 104. – 2000. – P. 89–103.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.14

Bogdanov V., PhD  
National Transport University, Kyiv

### THE PLANE PROBLEM OF AN IMPACT OF A HARD CYLINDER ELASTIC LAYER

*A plane problem of an elastic impact of the absolute hard cylinder against an elastic layer is considered, taking in account the lift of the layer material. The linearized boundary problem with a time-variable velocity of change point of the boundary conditions is reduced to the infinite system of an integral second-kind Volterra equations and integral-differential equation of the body motion. The numerical solution of the problem is obtained by the method of reduction and mechanical quadratures. Dependence of the main dynamic and the cinematic characteristics of the impact process of the starting speed of the impact process, parameters of the elastic layer have been determined.*

Богданов В., канд.-фіз.-мат. наук  
Національний транспортний університет, Київ

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА УДАРА ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА ПО УПРУГОМУ СЛОЮ

*Исследуется плоская задача упругого соударения абсолютно жесткого цилиндра с упругим слоем. Рассматривается контактная задача с динамически изменяющейся областью контакта, при этом учитывается подъем среды. Задача сводится преобразованием Лапласа и методом разложения в ряд по собственным функциям к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая численно реализуется методом редукции и механических квадратур. Определены динамические и кинематические характеристики, что описывают процесс соударения в зависимости от значения начальной скорости удара и параметров слоя.*