УДК 517.9:519.46

М. Сєров, д-р.фіз.-мат. наук, О. Омелян, канд. фіз.-мат. наук
ПолтНТУ ім. Ю. Кондратюка, Полтава
e-mail: *k26@pntu.edu.ua*

ГАЛІЛЕЇВСЬКА ІНВАРІАНТНІСТЬ N-ВИМІРНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Шляхом застосування класичного алгоритму Лі та методу оберненої групової класифікації досліджено галілеївську інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії з n просторовими змінними.

ВСТУП. Задача класифікації симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x] + g(u), \tag{1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ – довільна гладка функція, повністю розв'язана у статті [10], з результатів якої, зокрема, випливає, що при $f(u) \neq const$ рівняння (1) неінваріантне відносно алгебри Галілея.

У досліджено Галілеївську інваріантність одновимірної системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії вигляду:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + G(U), \tag{2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$ $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції.

Зауваження 1. Тут і скрізь нижче індекси біля функцій та сталих будемо змінювати наступним чином: $a,b,c,d = \overline{1,2}$, $i,j,k,l = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,n}$. Індекс біля функції вгорі означає номер функції, індекс біля функції внизу означає дифренціювання за відповідною змінною. За індексами, що повторюються, розуміється підсумовування.

При $F(U) = const$ симетрійні властивості системи (2) досліджено в [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14].

У даній статті ми розглянемо багатовимірну систему рівнянь реакції-дифузії вигляду:

$$U_0 = \vec{\nabla}[F(U)\vec{\nabla}U] + G(U), \tag{3}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(x_0, \vec{x})$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in R^n$.

Система рівнянь вигляду (3) широко застосовується для описання багатьох фізичних, хімічних процесів та явищ живої природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії. Зокрема, для опису процесу горіння плазми, а в живій природі – для опису конкуренції тварин на певній території [5]. Для систем рівнянь реакції–дифузії характерно, що матриця функцій f задовольняє властивість

$$\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle \neq 0, \quad \text{де } \langle 1\rangle = f^{11} + f^{22}, \langle 2\rangle = f^{11}\cdot f^{22} - f^{12}\cdot f^{21}. \tag{4}$$

Повне дослідження симетрійних властивостей системи (3) пов'язано із значними складнощами, у зв'язку з тим, що вона містить шість довільних функцій від двох незалежних змінних. Тому ми поставимо задачу дослідити, при яких нелінійностях дана система інваріантна відносно лінійного зображення алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

СИСТЕМА ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ОСНОВНА АЛГЕБРА ІНВАРІАНТНОСТІ.

Лема 1. *Основною алгеброю інваріантності системи рівнянь реакції-дифузії (3) є наступна алгебра диференціальних операторів*

$$\langle \partial_0 = \tfrac{\partial}{\partial x_0}, \partial_i = \tfrac{\partial}{\partial x_i}, J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j \rangle. \tag{5}$$

Доведення. Доведення теореми проводимо на основі алгоритму Лі (див. [2], [3], [4], [6]).

Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (3) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu(x_0,\vec{x},\vec{u})\partial_\mu + \eta^a(x_0,\vec{x},\vec{u})\partial_{u^a}, \tag{6}$$

де $\vec{u} = \{u^1, u^2\}$. Застосувавши до системи (3) при умові (4) алгоритм Лі, одержимо наступну систему визначальних рівнянь відносно координат ξ^μ, η^a оператора (6) та функцій f^{ab} та g^a:

$$\eta^a_{u^b u^c} = \xi^\mu_{u^a} = \xi^0_i = 0, \quad \xi^i_j + \xi^j_i = 2\delta_{ij}\xi^1_1, \tag{7}$$

$$\eta^c f^{ab}_{u^c} + (\xi^0_0 - 2\xi^1_1) f^{ab} + \eta^c_{u^b} f^{ac} - \eta^a_{u^c} f^{cb} = 0, \tag{8}$$

$$\eta^b_i (f^{ab}_{u^c} + f^{ac}_{u^b}) + 2\eta^b_{iu^c} f^{ab} - \Delta\xi^i f^{ac} + \delta_{ac}\xi^i_0 = 0, \tag{9}$$

$$\eta^b g^a_{u^b} - (\eta^a_{u^b} - \delta_{ab}\xi^0_0) g^b + \Delta\eta^b f^{ab} - \eta^a_0 = 0, \tag{10}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Загальним розв'язком системи рівнянь (7) є наступні функції

$$\xi^0 = \xi^0(x_0), \quad \xi^a = \xi^a(x_0,\vec{x}), \quad \eta^a = \alpha^{ab}(x_0,\vec{x})\cdot u^b + \beta^a(x_0,\vec{x}), \tag{11}$$

де $\xi^0, \xi^i, \alpha^{ab}$, β^a – довільні гладкі функції своїх аргументів.

© Сєров М., Омелян О., 2015

Щоб встановити основну алгебру інваріантності системи (3) розв'яжемо систему рівнянь (8), (9), (10), вважаючи в ній функції $f^{ab}(\vec{u})$ та $g^a(\vec{u})$ довільними. У результаті цього одержуємо наступні координати інфінітезимального оператора X:

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^i = c_{ij}x_j + d_i, \quad \eta^a = 0,$$

де $c_{ij} = -c_{ji}$, d_0, d_i – довільні сталі. Оператор (6) з наведеними вище координатами породжує основну алгебру (5) системи (3). *Теорему доведено.*

З теореми 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 1. Якщо система (3) інваріантна відносно оператора (6), то він має вигляд

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^i(x_0,\vec{x})\partial_i + [\alpha^{ab}(x_0,\vec{x})\cdot u^b + \beta^a(x_0,\vec{x})]\partial_{u^a}.$$

Далі зосередимо увагу на встановленні систем реакції-дифузії, інваріантних відносно алгебр Галілея.

ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ. Під **алгеброю Галілея** в даній статті розумітимемо алгебру лінійних диференціальних операторів

$$AG(1,n) = \langle T, X_i, Y_{ij}, Z_i, M\rangle, \tag{12}$$

які задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}&[T,X_i]=0, \quad [T,Y_{ij}]=0, \quad [X_i,X_j]=0, \quad [X_k,Y_{ij}] = \delta_{jk}X_i - \delta_{ik}X_j,\\ &[Y_{ij},Y_{kl}] = \delta_{ik}Y_{jl} - \delta_{jk}Y_{il} + \delta_{jl}Y_{ik} - \delta_{il}Y_{jk},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&[T,Z_i] = X_i, \quad [T,M]=0, \quad [X_j,Z_i] = \delta_{ij}M, \quad [X_i,M]=0,\\ &[Y_{ij},Z_k] = \delta_{ik}Z_j - \delta_{jk}Z_i, \quad [Y_{ij},M]=0, \quad [Z_i,Z_j]=0, \quad [Z_i,M]=0.\end{aligned} \tag{14}$$

Встановимо зображення операторів алгебри $AG(1,n)$, відносно якої може бути інваріантна система (3).

Враховуючи вигляд основної алгебри інваріантності (5), з формул (11), (13), (14) випливає наступний найбільш загальний вигляд операторів T, X_i, Y_{ij}, Z_i, M:

$$\begin{aligned}&T = \partial_0, \quad X_i = \partial_i, \quad Y_{ij} = J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j,\\ &Z_i = G_i = A^i(x_0)\partial_0 + B^{ij}(x_0,\vec{x})\partial_j + [m^{ibc}(x_0,\vec{x})u^c + n^{ib}(x_0,\vec{x})]\partial_{u^b},\\ &M = Q_0 = a(x_0)\partial_0 + b^i(x_0,\vec{x})\partial_i + [\alpha^{ab}(x_0,\vec{x})u^b + \beta^a(x_0,\vec{x})]\partial_{u^a},\end{aligned} \tag{15}$$

де $A^i(x_0), B^{ij}(x_0,\vec{x}), a(x_0), b^i(x_0,\vec{x}), m^{ibc}(x_0,\vec{x}), n^{ib}(x_0,\vec{x})$, $\alpha^{ab}(x_0,\vec{x}), \beta^a(x_0,\vec{x})$ – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Для того, щоб оператори (15) утворювали алгебру Галілея, необхідно, щоб вони задовольняли комутаційні співвідношення (14), з яких отримуємо:

$$\begin{aligned}&[T,Z_i] = \dot{A}^i\partial_0 + B_0^{ij}\partial_j + (m_0^{ibc}u^c + n_0^{ib})\partial_{u^b} = \partial_i,\\ &[T,M] = \dot{a}\partial_0 + b_0^i\partial_i + (\alpha_0^{ab}u^b + \beta_0^a)\partial_{u^a} = 0, \qquad [X_j,M] = b_j^i\partial_i + (\alpha_j^{ab}u^b + \beta_j^a)\partial_{u^a} = 0,\\ &[X_j,Z_i] = B_j^{ik}\partial_k + (m_j^{ibc}u^c + n_j^{ib})\partial_{u^b} = \delta_{ij}M, \qquad [T,X_i] = [Z_i,M] = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

З перших трьох співвідношень (16) знаходимо функції $A^i, B^{ij}, a, b^i, m^{ibc}, n^{ib}, \alpha^{ab}, \beta^a$:

$$\begin{aligned}&a = d_0, \quad b^i = d_i, \quad A^i = c_i, \quad \alpha^{ab} = \alpha_{ab}, \quad \beta^a = \beta_a,\\ &m^{ibc} = m^{ibc}(\vec{x}), \quad n^{ib} = n^{ib}(\vec{x}), \quad B^{ij} = \delta_{ij}x_0 + B^{ij1}(\vec{x}),\end{aligned} \tag{17}$$

де $d_0, d_i, c_i, \alpha_{ab}, \beta_a$ – довільні сталі.

З формул (17), враховуючи вигляд алгебри (5), за теоремою Лі знаходимо оператор M у вигляді:

$$M = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}. \tag{18}$$

Враховуючи вигляд (18) оператора M, із четвертого співвідношення (16) знаходимо:

$$B^{ij} = \delta_{ij}x_0 + c_{ij}, \quad m^{ibc} = \alpha_{cb}x_i + m_{ibc}, \quad n^{ib} = \beta_b x_i + n_{ib}, \tag{19}$$

де c_{ij}, m_{ibc}, n_{ib} – довільні сталі. З формул (18), (19), враховуючи вигляд основної алгебри інваріантності системи (12), отримуємо уточнений вигляд алгебри Галілея $AG(1,1)$:

$$AG(1,n) = \langle T = \partial_0, X_i = \partial_i, \quad Y_{ij} = J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j, \quad Z_i = G_i = x_0\partial_i + x_iQ_0 + R_i, \quad M = Q_0\rangle, \tag{20}$$

де

$$Q_0 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}, \quad R_i = (m_{icb}u^b + n_{ic})\partial_{u^c}, \tag{21}$$

причому, як випливає з останнього комутаційного співвідношення (16),

$$[Q_0, R_i] = 0. \tag{22}$$

Розширеною алгеброю Галілея згідно з [6] назвемо алгебру лінійних диференціальних операторів $AG_1(1,n) = \langle AG(1,n), D\rangle$, що визначається комутаційними співвідношеннями (13), (14) та:

$$[T,D] = 2T, \quad [X_i,D] = X_i, \quad [Y_{ij},D] = 0, \quad [Z_i,D] = -Z_i, \quad [M,D] = 0. \tag{23}$$

Встановимо зображення операторів алгебри $AG_1(1,n)$, відносно якої може бути інваріантна система (3).

Із визначальних рівнянь (7) випливає, що координати оператора D повинні мати вигляд (11), тобто

$$D = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^i(x_0,\vec{x})\partial_i + [\gamma^{ab}(x_0,\vec{x})u^b + \delta^a(x_0,\vec{x})]\partial_{u^a}.$$

З першого співвідношення (23) випливає:

$$[\partial_0, D] = \dot{\xi}^0\partial_0 + \xi_0^i(x_0,\vec{x})\partial_i + [\gamma_0^{ab}(x_0,\vec{x})u^b + \delta_0^a(x_0,\vec{x})]\partial_{u^a} = 2\partial_0. \quad (24)$$

З рівняння (24)отримуємо:

$$\xi^0 = 2x_0 + d_0, \quad \xi^i = \xi^i(\vec{x}), \quad \gamma^{ab} = \gamma^{ab}(\vec{x}), \quad \delta^a = \delta^a(\vec{x}). \quad (25)$$

З другого співвідношення (23) маємо:

$$[\partial_j, D] = \xi_j^i\partial_i + [\gamma_j^{ab}(\vec{x})u^b + \delta_j^a(\vec{x})]\partial_{u^i} = \partial_j. \quad (26)$$

З рівнянь (25), (26) одержуємо, що координати оператора D мають вигляд:

$$\xi^0 = 2x_0 + d_0, \quad \xi^i = x_i + d_i, \quad \gamma^{ab} = \gamma_{ab}, \quad \delta^a = \delta_a,$$

де $d_0, d_a, \gamma_{ab}, \delta_a$ – сталі.

Після наведених міркувань, врахувавши вигляд основної алгебри інваріантності (5), знаходимо остаточний вигляд оператора D

$$D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_1, \quad (27)$$

де

$$Q_1 = (\gamma_{ab}u^b + \delta_a)\partial_{u^a}. \quad (28)$$

Обчисливши дужку Лі операторів G_a, D, маємо:

$$[G_i, D] = -x_0\partial_i - x_iQ_0 + x_i[Q_0,Q_1] + [R_i,Q_1] = -G_i + x_i[Q_0,Q_1] + [R_i,Q_1]. \quad (29)$$

Враховуючи четверте комутаційне співвідношення (23), із рівності (29) отримуємо

$$[Q_0,Q_1] = 0, \quad [R_i,Q_1] = 0. \quad (30)$$

Таким чином, в результаті проведених міркувань, стає зрозуміло, що розширена алгебра Галілея $AG_1(1,n)$ системи (3) може мати наступний єдиноможливий вигляд

$$AG_1(1,n) = \langle \partial_0, \partial_i, J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j, G_i = x_0\partial_i + x_iQ_0 + R_i, Q_0, D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_1 \rangle, \quad (31)$$

де Q_0, R_i, Q_1 визначаються формулами (21), (28), причому оператори R_i, Q_0, Q_1 задовольняють комутаційні співвідношення (22), (30).

Узагальненою алгеброю Галілея назвемо алгебру лінійних диференціальних операторів $AG_2(1,n) = \langle AG_1(1,n), \Pi \rangle$, що визначається комутаційними співвідношеннями (13), (14), (23) та наступними:

$$\alpha = -1 + ki, \beta = \lambda_4 + \lambda_3 i, \theta = \arg\psi \quad (32)$$

Встановимо зображення операторів алгебри $AG_2(1,n)$, відносно якої може бути інваріантна система (3).

З наслідку 1 випливає, що оператор Π слід шукати у вигляді

$$\Pi = \tau^0(x_0)\partial_0 + \sigma^i(x_0,\vec{x})\partial_i + [P^{ab}(x_0,\vec{x})u^b + L^a(x_0,\vec{x})]\partial_{u^a}.$$

З першого співвідношення (32) отримуємо: $\dot{\tau}^0 = 2x_0, \quad \sigma_0^i = x_i, \quad P_0^{ab} = \gamma_{ab}, \quad L_0^a = \delta_a$.

Проінтегрувавши останні рівняння за змінною x_0, одержимо:

$$\tau^0 = x_0^2 + d_0, \quad \sigma^i = x_0x_i + d^i(\vec{x}), \quad P^{ab} = \gamma_{ab}x_0 + \kappa^{ab}(\vec{x}), \quad L^a = \delta_a x_0 + \lambda^a(\vec{x}). \quad (33)$$

З другого співвідношення (32), врахувавши рівності (33), отримуємо

$$d_j^i(\vec{x}) = 0, \quad \kappa_j^{ab}(\vec{x}) = x_j\alpha_{ab} + m_{jab}, \quad \lambda_j^a(\vec{x}) = x_j\beta_a + n_{ja}. \quad (34)$$

Загальним розв'язком рівнянь (34) є функції

$$d^i(\vec{x}) = d_i, \quad \kappa^{ab} = \alpha_{ab}\frac{\vec{x}^2}{2} + m_{jab}x_j + p_{ab}, \quad \lambda^a(\vec{x}) = \beta_a\frac{\vec{x}^2}{2} + n_{ja}x_j + q_a, \quad (35)$$

де $d_i, m_{jab}, n_{ja}, p_{ab}, q_a$ – сталі. Формули (33) при умовах (35) мають вигляд:

$$\tau^0 = x_0^2 + d_0, \quad \sigma^i = x_0x_a + d_i, \quad P^{ab} = \gamma_{ab}x_0 + \alpha_{ab}\frac{\vec{x}^2}{2} + \delta_{ab}m_{jab}x_j + p_{ab},$$

$$L^a = \delta_a x_0 + \beta_a\frac{\vec{x}^2}{2} + n_{ja}x_j + q_a.$$

Врахувавши дані формули та вигляд основної алгебри інваріантності (5), можна записати наступний оператор

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_0Q_1 + \frac{\vec{x}^2}{2}Q_0 + x_iR_i + Q_2,$$

де

$$Q_2 = (p_{ab}u^b + q_a)\partial_{u^a}. \quad (36)$$

Із 3–го та 4–го комутаційних співвідношень (32) отримуємо відповідно наступні умови для уточнення виразу Q_2

$$[Q_0,Q_2] = 0, \quad [Q_1,Q_2] = 2Q_2. \quad (37)$$

Таким чином, в результаті проведених міркувань, стає зрозуміло, що узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,n)$ системи (3) може мати наступний єдиноможливий вигляд

$$AG_2(1,n) = \langle \partial_0, \quad \partial_i, \quad J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j, \qquad G_i = x_0\partial_i + x_iQ_0 + R_i, \quad Q_0,$$
$$D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_1, \quad \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_0Q_1 + \frac{\vec{x}^2}{2}Q_0 + x_iR_i + Q_2\rangle, \tag{38}$$

з операторами Q_0, Q_1, Q_2, R_i, що мають вигляд (21), (28), (36) і задовольняють комутаційні співвідношення (22), (30) та (37).

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ (3). При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу рівнянь. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Лема 2. Лінійні перетворення
$$U = AW + B, \tag{39}$$
де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ – нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – довільні сталі матриці (матриця A невироджена), є перетвореннями еквівалентності системи (3).

Лема 2 доводиться безпосередньою підстановкою формул (39) у систему (3).

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ.

Встановимо вигляд нелінійностей $F(U), G(U)$, при яких система (3) інваріантна відносно алгебр Галілея, одержаних нами у першому пункті.

Теорема 1. *Система рівнянь реакції-дифузії (3) інваріантна відносно алгебри Галілея (20) тоді й тільки тоді, коли ця алгебра має реалізацію (12), а система (3) з точністю до перетворень (39) еквівалентна одній з таких систем:*
$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\vec{\nabla}U\right] + \begin{pmatrix} u^1\varphi^1(\omega) \\ u^2\varphi^2(\omega) \end{pmatrix}, \tag{40}$$
де $\omega = \dfrac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – довільні сталі, причому оператор Q_0 має вигляд
$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2};$$
$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\vec{\nabla}U\right] + \begin{pmatrix} u^1\varphi^1(\omega) \\ u^2\varphi^1(\omega) + u^1\varphi^2(\omega) \end{pmatrix},$$
де $\omega = \dfrac{u^2}{u^1} + m\ln u^1$, $\varphi^1(u^2)$, $\varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, λ_1, m – довільні сталі, причому оператор Q_0 має вигляд
$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1}(I - mu^1\partial_{u^2});$$
$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\vec{\nabla}U\right] + \begin{pmatrix} u^1\varphi^1(\omega) + u^2\varphi^2(\omega) \\ -u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega) \end{pmatrix}, \tag{41}$$
де $\omega = 2k\, arctg\frac{u^2}{u^1} + \ln\vec{u}^2$, $\varphi^1(u^2)$, $\varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, k – довільніа стала, причому оператор Q_0 має вигляд
$$Q_0 = -\frac{1}{2(k^2+1)}(kI - J);$$
$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1\frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix}\vec{\nabla}U\right] + \begin{pmatrix} u^1\varphi^1(u^2) \\ \varphi^2(u^2) \end{pmatrix},$$
де $g(u^2)$, $\varphi^1(u^2)$, $\varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, причому оператор Q_0 має вигляд $Q_0 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}$.

У формулах теореми 1 і надалі I, J – диференціальні оператори вигляду: $I = u^b\partial_{u^b}$, $J = -u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$.

Доведення. З'ясуємо, при якому вигляді функцій $F(U)$ та $G(U)$, система рівнянь реакції-дифузії (3) є інваріантною відносно алгебри диференціальних операторів (12). Для цього використаємо систему визначальних рівнянь (7), (8), (9), (10) системи (3), попередньо уточнений вигляд алгебри Галілея $AG(1,n)$ (20), (21) та комутаційні властивості (22).

Інфінітезимальним оператором алгебри (20) є оператор
$$X = d_0\partial_0 + d_i\partial_i + c_{ij}J_{ij} + q_iG_i + kQ_0, \tag{42}$$
координати ξ^μ, η^a якого згідно формул (20), (21), (31) мають вигляд
$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^i = q_ix_0 + c_{jl}x_j + d_i,$$
$$\eta^a = (q_ix_i + k)(\alpha_{ab}u^b + \beta_a) + q_i(m_{iab}u^b + n_{ia}), \tag{43}$$
де d_0, d_i, c_{jl}, q_i, k – довільні сталі.

З рівнянь (8), (9), (10), враховуючи формули (43), після розщеплення за змінними x_i отримуємо

$$\begin{gathered}(\alpha_{cd}u^d+\beta_c)f^{ab}_{u^c}+\alpha_{cb}f^{ac}-\alpha_{ac}f^{cb}=0,\quad (\alpha_{bc}u^c+\beta_b)g^a_{u^b}=\alpha_{ab}g^b,\\ (\alpha_{bk}u^k+\beta_b)(f^{ac}_{u^b}+f^{ab}_{u^c})+2\alpha_{bc}f^{ab}+\delta_{ac}=0,\\ (m_{icd}u^d+n_{ic})f^{ab}_{u^c}+m_{icb}f^{ac}-m_{iac}f^{cb}=0,\quad (m_{ibc}u^c+n_{ib})g^a_{u^b}-m_{iab}g^b=0.\end{gathered}\tag{44}$$

Два останні з рівнянь (44), очевидно, є умовою інваріантності системи (3) відносно оператора

$$R_i=(m_{icb}u^b+n_{ic})\partial_{u^c}.$$

Оскільки ми не розглядаємо задачу про знаходження алгебри інваріантності системи (3) більш широкої, ніж (12), (13), то будемо вважати, що $R_i=0$. У такому випадку координати (43) оператора (42) набувають вигляду

$$\xi^0=d_0,\quad \xi^i=q_ix_0+c_{jl}(\delta_{ji}x_l-\delta_{li}x_j)+d_i,\quad \eta^a=(q_ix_i+k)(\alpha_{ab}u^b+\beta_a).\tag{45}$$

З рівнянь (44) та формул (45) випливає, що для того, щоб система (3) була інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1,n)$, функції f^{ab} та g^a повинні задовольняти наступну систему диференціальних рівнянь:

$$M^cf^{ab}_{u^c}+\alpha_{cb}f^{ac}-\alpha_{ac}f^{cb}=0;\tag{46}$$

$$M^cf^{ac}_{u^b}+\alpha_{cb}f^{ac}+\alpha_{ac}f^{cb}+\delta_{ab}=0,\tag{47}$$

$$M^cg^a_{u^c}-\alpha_{ac}g^c=0,\tag{48}$$

де $M^c=\alpha_{cd}u^d+\beta_c$.

В [1] показано, що з точністю до перетворень (39) існує 6 нееквівалентних зображень оператора Q_0.

Ці зображення задаються наступними матрицями:

$$1)\quad \alpha=0,\quad \beta=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\qquad 2)\quad \alpha=m\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\quad 3)\quad \alpha=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};$$

$$4)\quad \alpha=m\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad \beta=0;\quad 5)\quad \alpha=m\begin{pmatrix}k&-1\\1&k\end{pmatrix},\quad \beta=0;\quad 6)\quad \alpha=m\begin{pmatrix}-1&0\\0&k\end{pmatrix},\quad \beta=0,\quad k\neq-1,$$

де $k,m\neq0$ – довільні сталі. Вказані вище набори матриць α,β назвемо "канонічними". Зауважимо, що довільний інший набір матриць α,β з точністю до перетворень (39) локально еквівалентний одному з канонічних, причому, не втрачаючи загальності, з точністю до розтягу за змінною x_0, можна вважати, що $m=1$. Для встановлення вигляду нелінійностей системи (3) та знаходження відповідних операторів симетрії необхідно далі розв'язати системи (46), (47), (48) для кожного з випадків 1)–6).

Неважко переконатися, що системи рівнянь (46), (47) у випадках 1), 2), 3) несумісні.

Розв'язком системи (46) у випадку 6) є функції

$$f^{11}=\varphi^{11}(\omega),\quad f^{12}=(u^1)^{k+1}\varphi^{12}(\omega),\quad f^{21}=(u^1)^{-(k+1)}\varphi^{21}(\omega),\quad f^{22}=\varphi^{22}(\omega),\tag{49}$$

де $\omega=(u^1)^{-k}u^2$. Підставивши функції (49) у систему рівнянь (47), одержимо:

$$\begin{cases}k\omega[\dot\varphi^{11}+k\omega\dot\varphi^{12}+(k+1)\varphi^{11}]=-2\varphi^{11}-1,\quad \dot\varphi^{11}+k\omega\dot\varphi^{12}+(k-1)\varphi^{12}=0,\\ k(k\omega^2\dot\varphi^{22}-\omega\dot\varphi^{21}+2\varphi^{21})=0,\quad k\omega\dot\varphi^{22}-\dot\varphi^{21}=-2k\varphi^{22}-1.\end{cases}\tag{50}$$

Розв'язавши систему рівнянь (50) для $k\neq0$, з точністю до перетворень $t\to-2\lambda_1x_0$ одержуємо таку матрицю F системи (3)

$$F=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix},\ \text{ де } \lambda_2=\frac{\lambda_1}{k}.$$

При цьому оператор Q_0 алгебри Галілея (12) має вигляд

$$Q_0=-\tfrac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}-\tfrac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2},$$

а матриці α,β мають такий вигляд

$$\alpha=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\lambda_1}&0\\0&-\frac{1}{2\lambda_2}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.\tag{51}$$

Розв'язавши рівняння (48) за умов (51), знаходимо функції g^a у вигляді

$$g^1=u^1\varphi^1(\omega),\quad g^2=u^2\varphi^2(\omega),$$

де $\omega=\dfrac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, при якому система (3) має вигляд (40).

У випадку, коли $k=0$, з системи (50) з точністю до перетворень $t\to-2\lambda_1x_0$ знаходимо матрицю F:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix}, \tag{52}$$

де $\lambda_1 \neq 0$ – довільна стала, $g(u^2)$ – довільна гладка функція. Якщо врахувати рівність (52), то з рівнянь (47) знаходимо, що

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}.$$

Очевидно, що матриці α, β у цьому випадку задаватимуться наступними формулами:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Розв'язавши рівняння (48) за умов (53), отримуємо вигляд функцій g^a

$$g^1 = u^1 \varphi^1(\omega), \quad g^2 = \varphi^2(\omega),$$

де $\omega = u^2$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, за якого система (3) має вигляд (41). Для випадків 4), 5) доведеня відбувається аналогічно.

Теорему 1 доведено.

Поставимо задачу встановити, при якому вигляді нелінійностей F і G система (3) допускає розширення алгебри (20) оператором ділатації вигляду (27).

Теорема 2. *Система нелінійних рівнянь вигляду (3) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея (31) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень (39) еквівалентна одній з наступних систем:*

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} \omega^p,$$

де $\omega = \dfrac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $p = \dfrac{2}{k\lambda_1 - m\lambda_2}$, $k\lambda_1 \neq m\lambda_2$, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \tfrac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_1 = k u^1 \partial_{u^1} + m u^2 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1 \end{pmatrix} e^{\frac{u^2}{u^1}},$$

де
$$Q_0 = -\tfrac{1}{2} I, \quad Q_1 = I - 2u^1 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 - \lambda_4 u_2 \\ \lambda_4 u^1 + \lambda_3 u_2 \end{pmatrix} e^{m\,arctg \frac{u^2}{u^1}},$$

де $m \neq 0$, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2} I, \quad Q_1 = \tfrac{2}{m} J;$$

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^1 + \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} \cdot e^{k\omega},$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, $m, k \neq 0$ – довільні сталі, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2\lambda_1}(I - m u^1 \partial_{u^2}), \quad Q_1 = -\tfrac{2}{km} I;$$

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 + \lambda_4 u^2 \\ \lambda_3 u^2 - \lambda_4 u^1 \end{pmatrix} e^{m\omega},$$

де $\omega = 2k\,arctg \frac{u^2}{u^1} + \ln \vec{u}^2$, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2(k^2+1)}(kI - J), \quad Q_1 = (pk - \tfrac{1}{m}) I - pJ,$$

$m, k \neq 0, p$ – довільні сталі;

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} (u^2)^k,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, k, p$ – довільні сталі, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_1 = p u^1 \partial_{u^1} - \tfrac{2}{k} u^2 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right],$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ – довільні сталі, $g(u^2)$ – довільна гладка функція, причому $Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}$, $Q_1 = 0$.

Дослідимо тепер, при якому вигляді нелінійностей F і G система (3) допускає розширення алгебри (31) оператором проективних перетворень вигляду (44).

Теорема 3. *Система нелінійних рівнянь вигляду (3) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (38) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень (39) еквівалентна одній з наступних систем:*

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} \omega^p, \qquad (54)$$

де $\omega = \dfrac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, $p = \dfrac{4}{n(\lambda_2 - \lambda_1)}$, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \tfrac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_1 = -\tfrac{n}{2} I, \quad Q_2 = 0;$$

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} \frac{u^2}{u^1}, \qquad (55)$$

де $\lambda_3 \neq \lambda_4$, причому $Q_0 = -\frac{1}{2} I$, $Q_1 = (\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} - \frac{n}{2}) I - 2u^2 \partial_{u^2}$, $Q_2 = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_4} u^1 \partial_{u^2}$;

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^1 + \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} \cdot e^{\frac{4}{mn}\omega}, \qquad (56)$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, причому $Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1}(I - m u^1 \partial_{u^2})$, $Q_1 = -\frac{n}{2} I$, $Q_2 = 0$;

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 + \lambda_4 u^2 \\ \lambda_3 u^2 - \lambda_4 u^1 \end{pmatrix} e^{\frac{2}{n}\omega}, \qquad (57)$$

де $\omega = 2k \operatorname{arctg} \frac{u^2}{u^1} + \ln \vec{u}^2$, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2(k^2+1)}(kI - J), \quad Q_1 = (pk - \tfrac{n}{2}) I - pJ, \quad Q_2 = 0,$$

де $m, k \neq 0, p$ – довільні сталі;

$$U_0 = \vec{\nabla}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{\nabla} U\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} (u^2)^{\frac{2}{n}}, \qquad (58)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні сталі, причому

$$Q_0 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}. \quad Q_1 = -n(\tfrac{1}{2} u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \quad Q_2 = 0.$$

Зауваження 2. Теореми 2, 3 доводяться аналогічно до теореми 1.

ВИСНОВКИ. Деякі з систем, одержані в теоремі 3, застосовуються для опису конкретних явищ природи. Так, зокрема, якщо у системі (57) змінні u^1, u^2 вважати дійсною та уявною частинами комплексної функції $\psi = u^1 + iu^2$, то одержимо рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$i\psi_0 = \alpha \Delta \psi + \beta(|\psi| e^{k\theta})^{\frac{4}{n}} \psi, \qquad (59)$$

де $\alpha = -1 + ki, \beta = \lambda_4 + \lambda_3 i, \theta = \arg \psi$. Рівняння Гінзбурга-Ландау є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаосу і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів та хімічній кінетиці. Симетрійні властивості одновимірного випадку рівняння Гінзбурга-Ландау вивчались в роботах [11], [12].

При $k = 0$ рівняння (59) є рівнянням Шредінгера, яке використовується для моделювання хвильових процесів в різних розділах фізики.

Системи (54), (55), (56) є *n*-вимірним узагальненням систем, симетрійні властивості яких досліджені в [7], [8], [9], [12]. Система (58) є *n*-вимірним узагальненням системи рівнянь хемотаксису, дослідженої в [5].

Оскільки системи, одержані в теоремі 3, володіють широкими симетрійними властивостями, зокрема задовольняють принцип відносності Галілея, то вони претендують на роль математичних моделей конкретних фізичних та біологічних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Глеба А. В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис. канд. фіз.-мат наук: 01.01.03. – Київ., 2003.
2. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1967.
3. Ибрагимов Н. Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирск, 1972.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М..; Наука, 1978.

5. Сєров М. І., Омелян О. М. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису. – Полтава: ПолтНТУ, 2012.
6. Фущич В. И., Штелень В. М., Сєров Н. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К.: Наук.думка 1989.
7. Cherniha R. M., King J. R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 267–282.
8. Cherniha R. M., King J. R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 7839–7841.
9. Cherniha R. M., King J. R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A. – 2002. – Vol. 36.– P. 405–425.
10. Dorodnitsyn V. A. On invariant solutions of non-linear heart conduction with a sourse // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1982. – Vol. 22. – P. 115–122.
11. Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2006. – Vol. 324. – P. 615–628.
12. Nikitin A. G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations // Ukrainian Marhematical Bulletin. – 2005. – Vol. 2, № 2. – P. 153–204.
13. Nikitin A. G., Wiltshire R. Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations // Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics: Proc. of the Third Int. Conf., Kiev, 1999. – K., 2000.
14. Nikitin A. G., Wiltshire R. Systems of Reaction Diffusion Equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001.– Vol. 42. – P. 1667–1688.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.15

Serov M., Full Doctor, Omelyan O.. PhD
Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University, Poltava

THE GALILEI INVARIANCE OF THE N-DIMENSIONAL SYSTEM OF NONLINEAR REACTION-DIFFUSION EQUATIONS

With classic Lie method and reverse group classification method the Galilei invariance of the system of nonlinear reaction-diffusion equations from n spatial variables is studied.

Серов Н., д-р.физ.-мат.наук, Омелян А., канд. физ.-мат.наук
ПолтНТУ им. Ю. Кондратюка, Полтава

ГАЛИЛЕЕВСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ N-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

При помощи классического алгоритма Ли и метода обратной груповой классификации исследована галилеевская инвариантность системы нелинейных уравнений реакции-диффузии с n пространственными переменными.

УДК 517.9

М. Плахотник, канд. фіз.-мат. наук, асист.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *Makar_plakhotnyk@ukr.net*

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ГОМЕОМОРФІЗМУ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ПАРИ ТЕНТОПОДІБНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ІНТЕРВАЛУ В СЕБЕ

Досліджено питання про диференційованість гомеоморфізму, що визначає топологічну спряженість відображення $f(x)=1-|2x-1|$ та унімодального відображення f_v інтервалу $[0,\ 1]$ в себе, чий графік складається з двох відрізків і яке має максимум в точці v. Побудовано множину, щільну в інтервалі $[0,\ 1]$, в кожній точці якої похідна спрягаючого гомеоморфізму існує, похідні в усіх точках побудованої множини рівні між собою та залежать лише від знаку виразу $v-1/2$, але не від конкретного значення v.

ВСТУП. Розглянемо задачу про властивості гомеоморфізму h, котрий задає топологічну спряженість відображень

$$f(x)=\begin{cases}2x & при\ \ 0\le x\le 0{,}5\\ 2-2x & при\ \ 0{,}5\le x\le 1\end{cases}\quad f_v(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{v} & при\ \ 0\le x\le 0{,}5\\ \dfrac{1-x}{1-v} & при\ \ 0{,}5\le x\le 1,\end{cases}$$

тобто неперервного оборотного відображення h, яке відображає інтервал $[0,\ 1]$ в себе і задовольняє функціональне рівняння $h(f)=f_v(h)$. Відображення f топологічно спряжене з відображенням f_v для кожного $v\in(0,\ 1),\ \ v\ne 0{,}5$, причому відповідний спрягаючий гомеоморфізм єдиний (його єдиність випливає з леми 1 нижче)

В одновимірній динаміці широко відомий факт (див, наприклад, [3, стор. 14]) про топологічну спряженість згаданого відображення f та відображення $\tilde f(x)=4x(1-x)$. Відображення $\tilde h$, котре визначає топологічну спряженість відображень f та $\tilde f$, задається формулою $\tilde h(x)=\sin^2\dfrac{\pi x}{2}$.

Відмітимо, що топологічна спряженість неперервних відображень інтервалу в себе вивчалась в [4]. В цій роботі описано класи топологічно спряжених відображень, напівгрупа ітерацій яких є скінченною групою.

В [5] вивчалася задача про відображення f та f_v та встановлено, що гомеоморфізм існує, є зростаючим та має похідну, яка дорівнює 0 майже скрізь за мірою Лебега. Також в [5] доведено, що якщо похідна цього гомеоморфізму існує і дорівнює дійсному числу (тобто є скінченною), то вона дорівнює 0. Водночас, згідно теореми Лебега про похідну монотонної функції (див., наприклад, [1, стор. 15]), будь-яка монотонна функція має скінченну похідну скрізь крім, можливо, деякої множини міри 0. В нашій роботі ми уточнимо результат роботи [5] зокрема побудуємо щільну в інтервалі $[0,\ 1]$ множину, похідні спрягаючого гомеоморфізму в усіх точках якої існують (втім, можливо, дорівнюють нескінченності), рівні між собою та залежать лише від знаку виразу $v-1/2$, але не від конкретного значення v.

Для довільного $n\ge 1$ позначатимемо n-ту ітерацію відображення f через f^n, тобто $f^n(x)=f(f(\dots f(x))\dots)$.

© Плахотник М., 2015