

Kiforenko B., Full Doctor,, Vasil'ev I., PhD, Kutsenko O., PhD, O. Kharytonov, PhD.
Taras Shevchenko National university of Kyiv

BIMODAL ROCKET ENGINES EFFICIENCY FOR NEAR-EARTH ORBIT-TO-ORBIT TRANSFERS CARRYING OUT

The initial efficiency estimation is taken in terms of the general problem of spaceflight mechanics of the bimodal rocket engines comparing to the traditional ones in the case of the near-earth orbital transfers.

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухолинського, Миколаїв
Л. Федорченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
С. Колесник, інж.
Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухолинського, Миколаїв
e-mail: l.molchenko@gmail.com, fedorchenko555@gmail.com

МАГНІТОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ З УРАХУВАННЯМ ДЖОУЛЕВОГО НАГРІВУ

Запропоновано методику розв'язання нелінійної задачі магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості. Наведено постановку задачі та отримано розв'язувальну систему гнучкої кільцевої пластини з урахуванням джоулевого нагріву.

ВСТУП. Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої пов'язана з навантаженням в умовах взаємодії різних фізичних факторів, обумовлює необхідність створення і розробки теорії та методів розрахунку спряжених полів. Фізичні основи цієї теорії детально висвітлюються в ряді курсів з класичної електродинаміки і фізики твердого тіла [6,7,10–12]. З класичної фізики відомо, що ефекти зв'язності динамічних переміщень електропровідних тіл обумовлені в основному пондеромоторними силами Лоренца. Відмітимо також, що врахування конвективних членів в рівняннях електродинаміки (нелінійна теорія) дозволяє враховувати вплив джоулевого тепла на фізико-механічні властивості матеріалу. Сили Лоренца залежать від швидкості руху електропровідних елементів і зовнішнього магнітного поля, а для струмонесучих елементів – від величини і напрямку стороннього електричного струму відносно зовнішнього магнітного поля. Тому, в першу чергу необхідно розвивати математичні основи магнітопружності і прикладні методи розв'язання подібних класів задач. Серед цих задач в першу чергу відмітимо задачі для тонкостінних гнучких струмонесучих кільцевих пластин, які знаходяться в зовнішньому магнітному полі.

При вивченні питань нелінійної магнітопружності значний інтерес становить визначення напружено-деформованого стану струмонесучих кільцевих пластин, які знаходяться під дією нестационарних механічних і електромагнітних полів.

У даній статті запропоновано нову модель та методику розв'язання нелінійних крайових задач магнітопружності струмонесучих кільцевих пластин, на які діють нестационарні механічні та електромагнітні поля з урахуванням джоулевого тепла.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ДВОВИМІРНІ НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ МАГНІТОПРУЖНОСТІ ОБОЛОНОК. Нехай електропровідна оболонка знаходиться в магнітному полі, яке утворене як електричним струмом в самому тілі (власне магнітне поле), так і джерелом, яке знаходиться на віддалі від тіла (зовнішнє магнітне поле). Вважаємо також, що сторонній електричний струм у незбуреному стані рівномірно розподілений по тілу (густина струму не залежить від координат). Тіло має скінчену електропровідність σ і не має властивості самовільної поляризації та намагнічування (діа-та парамагнітні матеріали).

Використовуючи гіпотезу Кірхгофа–Лява і адекватні їй електромагнітні гіпотези [1, 3], за допомогою принципу віртуальних переміщень, отримуємо наближену систему зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності оболонок.

Пропонована двовимірна модель магнітопружності гнучких оболонок будуються в квадратичному наближенні, а в виразах для сил Лоренца враховується кубічна нелінійність. Це пояснюється тим, що в таких задачах при скінченних переміщеннях нелінійні ефекти цих сил є визначальними і взаємодія електромагнітного поля з полем деформацій відбувається в основному через ці сили.

Просторові рівняння магнітопружності в диференціальній формі в змінних Лагранжа записуються у вигляді [3, 12]

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho (\vec{f} + \vec{f}^{\wedge}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}; \quad (2)$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля; \vec{H} – напруженість магнітного поля; \vec{B} – магнітна індукція; \vec{J} – густина електричного струму; ρ – густина матеріалу; \vec{f} – об'ємна механічна сила; \vec{f}^{\wedge} – об'ємна сила Лоренца; $\hat{\sigma}$ – тензор внутрішніх напружень.

Закон Ома і сила Лоренца, з урахуванням стороннього струму \vec{J}_{cm} , відповідно, мають вигляд

$$\vec{J} = \vec{J}_{cm} + \sigma [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}], \quad (3)$$

$$\rho \vec{f}^{\wedge} = \vec{J}_{cm} \times \vec{B} + \sigma [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \times \vec{B}. \quad (4)$$

Зауважимо також, що в рівняннях Максвелла нехтуємо струмами зміщення, вектором електричної індукції та об'ємною густиною електричних зарядів (квазістатичні рівняння) [3].

При побудові наближених рівнянь руху та рівнянь електродинаміки теорії тонких оболонок в геометрично-нелінійній постановці використовуються гіпотези Кірхгофа-Лява та гіпотези про характер розподілу електромагнітного поля за товщиною оболонки у випадку відомого розподілу стороннього струму.

У [1] показано, що нормальна компонента збудженого магнітного поля і тангенціальні компоненти індукованого поля не залежать від товщини оболонки. Спираючись на результати [1] і використовуючи граничні умови на поверхнях оболонки, приймаємо в ортогональній криволінійній системі координат (α, β, γ) (підхід Лагранжа)

$$H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t), J_\alpha = J_\alpha(\alpha, \beta, t), J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t), J_\gamma = 0. \quad (5)$$

Для отримання гіпотез розподілу тангенціальних складових напруженості магнітного поля за товщиною оболонки, скористаємося операторним методом, вважаючи, що нам відомий закон розподілу магнітного поля на поверхнях оболонки. Після відповідних перетворень вирази для тангенціальних складових напруженості магнітного поля отримуємо у вигляді [3]

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \cos P\gamma \sec \frac{Ph}{2} \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \sin P\gamma \cos ec \frac{Ph}{2} \frac{H_\alpha^+ - H_\alpha^-}{2}; \\ H_\beta &= \cos P_1\gamma \sec \frac{P_1h}{2} \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \sin P_1\gamma \cos ec \frac{P_1h}{2} \frac{H_\beta^+ - H_\beta^-}{2}; \end{aligned} \quad (6)$$

де $P^2 = [(K_\beta - K_\alpha)K_\alpha - K^2] - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}$, $P_1^2 = [(K_\beta - K_\alpha)K_\beta - K^2] - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}$ – оператори; K_α, K_β – головні кривизни;

H_i^\pm – відомі компоненти напруженості магнітного поля на поверхнях оболонки; μ – магнітна проникність; h – товщина оболонки.

Залежності (6) визначають розподіл тангенціальних складових магнітного поля за товщиною оболонки у вигляді рядів. Наближені залежності для визначення H_α, H_β можна отримати, обмежуючись тією чи іншою скінченною кількістю членів розвинення. Надалі, обмежуючись одним членом розвинення, лінійним за γ , отримаємо

$$H_\alpha = \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\alpha^+ - H_\alpha^-), H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\beta^+ - H_\beta^-), \quad (7)$$

що відповідає припущенням [1].

Таким чином, при побудові наближених рівнянь магнітопружності гнучких струмонесучих оболонок, які перебувають у магнітному полі, скористаємося групою гіпотез

$$\begin{aligned} E_\alpha &= E_\alpha(\alpha, \beta, t), E_\beta = E_\beta(\alpha, \beta, t), E_\gamma = \frac{\partial u_\beta}{\partial t} B_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0, J_\alpha = J_\alpha(\alpha, \beta, t), J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t), J_\gamma = 0; \\ H_\alpha &= \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\alpha^+ - H_\alpha^-), H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\beta^+ - H_\beta^-), H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t), \end{aligned} \quad (8)$$

Зауважимо, що група електродинамічних гіпотез (8) є відповідним аналогом групи механічних гіпотез Кірхгофа-Лява теорії оболонок.

Використовуючи варіаційний принцип, з урахуванням гіпотези Кірхгофа-Лява та електродинамічних гіпотез, отримуємо рівняння магнітопружності гнучких оболонок [3, 4, 12]:

- рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - N_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2S) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A\tilde{H}}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{H} + \frac{AB}{R_\alpha} Q_\alpha + AB(f_\alpha + \rho f_\alpha^\wedge) &= AB\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_\beta) - N_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2S) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B\tilde{H}}{R_\beta} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{H} + \frac{AB}{R_\beta} Q_\beta + AB(f_\beta + \rho f_\beta^\wedge) &= AB\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AQ_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A\tilde{H}}{R_\alpha} \right) - AB \left(\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} \right) + AB(f_\gamma + \rho f_\gamma^\wedge) &= AB\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2\tilde{H}) - ABQ_\alpha - AB \left(N_\alpha - \frac{M_\beta}{R_\beta} \right) \vartheta_\alpha - ABS\vartheta_\beta &= AB\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2\tilde{H}) - ABQ_\beta - AB \left(N_\beta - \frac{M_\alpha}{R_\alpha} \right) \vartheta_\beta - ABS\vartheta_\alpha &= AB\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_\beta}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (9)$$

- рівняння електродинаміки

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} &= \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BE_\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(AE_\alpha)}{\partial \beta} \right); \\ \sigma \left[E_\alpha + \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_\beta^+ + B_\beta^-)}{2} \right] &= \frac{1}{B} \left(\frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} - \frac{B(H_\beta^+ - H_\beta^-)}{h} \right); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma \left[E_{\beta} - \frac{\partial w}{\partial t} B_{\gamma} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-})}{2} \right] = \frac{1}{A} \left(-\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial \alpha} + \frac{A(H_{\alpha}^{+} - H_{\alpha}^{-})}{h} \right).$$

Тут через $\rho f_{\alpha}^{\wedge}, \rho f_{\beta}^{\wedge}, \rho f_{\gamma}^{\wedge}$ позначено проєкції пондеромоторної сили на координатні осі, які визначаються таким чином

$$\begin{aligned} \rho f_{\alpha}^{\wedge} &= -h J_{\beta cm} B_{\gamma} + \sigma h \left[E_{\beta} B_{\gamma} - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-})}{2} B_{\gamma} \right]; \\ \rho f_{\beta}^{\wedge} &= h J_{\alpha cm} B_{\gamma} + \sigma h \left[-E_{\alpha} B_{\gamma} - \frac{\partial v}{\partial t} B_{\gamma}^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-})}{2} B_{\gamma} \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho f_{\gamma}^{\wedge} &= \frac{h}{2} [-J_{\alpha cm} (B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-}) + J_{\beta cm} (B_{\alpha}^{+} + B_{\alpha}^{-})] + \frac{\sigma h}{2} [E_{\alpha} (B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-}) - E_{\beta} (B_{\alpha}^{+} + B_{\alpha}^{-})] + \\ &+ \frac{\sigma h}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial t} (B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-}) B_{\gamma} + \frac{\partial u}{\partial t} (B_{\alpha}^{+} + B_{\alpha}^{-}) B_{\gamma} \right] - \frac{\sigma h}{4} \frac{\partial w}{\partial t} [(B_{\beta}^{+} + B_{\beta}^{-})^2 + (B_{\alpha}^{+} + B_{\alpha}^{-})^2] \end{aligned}$$

Складові сили Лоренца визначаються в залежності від швидкості деформацій оболонки, від величини, густини і орієнтації струму провідності відносно магнітного поля.

У виразах (9–11) введені наступні позначення:

$N_{\alpha}, S, Q_{\alpha}$ – нормальне, дотичне та поперечне зусилля в перерізі $\alpha = const$; N_{β}, S, Q_{β} – аналогічні фактори в перерізі $\beta = const$; $M_{\alpha}, M_{\beta}, \tilde{H}$ – згинальні та скручувальний моменти в перерізі $\alpha = const, \beta = const$ відповідно; u, v, w – компоненти переміщень; $\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\beta}$ – кути повороту нормалі; R_{α}, R_{β} – головні радіуси кривизни оболонки; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона; A, B – коефіцієнти Ламе серединної поверхні оболонки; E_{α}, E_{β} – компоненти вектора напружень електричного поля; H_{γ} – нормальна складова напруженості магнітного поля; $B_{\alpha}^{\pm}, B_{\beta}^{\pm}$ – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки.

При отриманні рівнянь магнітопружності використано геометричні співвідношення у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_{\alpha}} + \frac{1}{2} \vartheta_{\alpha}^2; \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_{\beta}} + \frac{1}{2} \vartheta_{\beta}^2; \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \vartheta_{\alpha} \vartheta_{\beta}; \quad \chi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_{\beta}; \quad \chi_{\beta\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_{\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_{\alpha}; \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_{\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_{\alpha}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_{\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_{\beta} \right) + \frac{1}{R_{\alpha}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) + \frac{1}{R_{\beta}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right); \\ \vartheta_{\alpha} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_{\alpha}}; \quad \vartheta_{\beta} = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_{\beta}}. \end{aligned} \quad (12)$$

НЕЛІНІЙНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАГНІТОПРУЖНОСТІ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ. Розглянемо осесиметричну нелінійну задачу магнітопружності про напружено-деформівний стан кільцевої пластини змінної жорсткості вздовж радіуса, яка знаходиться під дією нестационарного магнітного поля та механічного навантаження з урахуванням джоулевого тепла. Пластина пружна ізотропна, виготовлена з матеріалу скінченної провідності. Пластина є провідником рівномірно розподіленого стороннього електричного струму густини \vec{J}_{cm} .

Нехай задача магнітостатики для збуреного стану розв'язана, тобто відомі вектори магнітної індукції вихідного стану для зовнішньої і внутрішньої областей. За координатну площину вибираємо серединну поверхню пластини, віднесено до полярної системи координат r, θ , координата γ відраховується по нормалі до серединної площини (рис. 1).

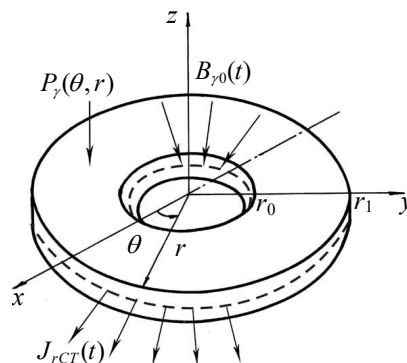


Рис. 1. Кільцева пластина

Припускаючи, що всі шукані компоненти збуреного електромагнітного поля й поля переміщень не залежить від координати β (осесиметрична задача), покладемо

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = 0, \quad v = 0, \quad E_\alpha = 0, \quad B_\beta = 0, \quad f_\beta = 0, \quad \hat{f}_\beta = 0, \quad A = 1, \quad B = r. \quad (13)$$

Крім того враховуємо, що для пластини $\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{R_\beta} = 0$, а також покладемо $\alpha = r, \beta = \theta$.

Враховуючи (13), з рівнянь (9–12) отримуємо вихідні рівняння в одновимірній за радіальною координатою постановці [3, 8, 9, 13]:

- рівняння руху

$$\frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + r(f_r + \rho \hat{f}_r) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + r(f_r + \rho \hat{f}_r) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta - rQ_r - rN_r \vartheta_r = 0; \quad (14)$$

- рівняння електродинаміки

$$-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}; \quad \sigma \left[E_\theta + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial r} + \frac{B_r^+ - B_r^-}{\mu h}; \quad (15)$$

- вирази для деформацій

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\vartheta_r^2}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \chi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}, \quad \chi_\theta = \frac{\vartheta_r}{r}, \quad \vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}; \quad (16)$$

- співвідношення пружності

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - (1+\nu) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r - (1+\nu) \varepsilon_T]; \quad M_r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_r + \nu \chi_\theta - (1+\nu) \chi_T];$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_\theta + \nu \chi_r - (1+\nu) \chi_T]; \quad \varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T(r, \gamma, t) d\gamma, \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T(r, \gamma, t) \gamma d\gamma; \quad (17)$$

- компоненти об'ємної сили Лоренца

$$\rho \hat{f}_r = h J_{\theta cm} r B_\gamma + \sigma h \left[E_\theta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} B_\gamma \right];$$

$$\rho \hat{f}_\gamma = -\frac{h}{2} J_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\sigma h}{2} \left[\left(E_\theta + \frac{\partial u}{\partial t} \right) (B_r^+ + B_r^-) + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)^2}{2} \right]. \quad (18)$$

Тут ε_T, χ_T – інтегральні характеристики температурного поля $T(r, \gamma, t)$, α_T – коефіцієнт лінійного температурно-го розширення.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ДЖОУЛЕВИЙ НАГРІВ. При розрахунку температури $T(r, \gamma, t)$ будемо використовувати рівняння балансу тепла у вигляді

$$C_v = \frac{\partial Q}{\partial t} = Q_{дж}, \quad (19)$$

де $Q_{дж}$ – джоулеве тепло, яке виділяється в результаті циркуляції в пластині вихрових струмів; C_v – питома теплоємність. При цьому використовуючи граничні умови (6), з рівняння (19) випливає, що температура буде сталою за товщиною пластини.

Слідуючи [5], рівняння (19) перетворюється у відоме рівняння теплопровідності з джерелом джоулевого тепла для гнучких пластин

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{сеп}} Q_{дж} + \lambda_T \Delta T, \quad (20)$$

де $C_\varepsilon^{сеп}$ – середнє значення питомої теплоємності при сталій деформації; λ_T – коефіцієнт теплової дифузії.

Густина магнітної енергії на одиницю об'єму описується функцією $W = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2}$, а кількість тепла, що виділяється густиною стороннього струму \vec{J} за одиницю часу (потужність джоулевого тепла на одиницю маси) дорівнює $Q_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}$.

Використовуючи вираз для підрахунку джоулевого тепла, а також рівняння $rot\vec{H} = \sigma\vec{E}$, з міркувань теорії розмірності і на основі (20) можемо записати

$$T \approx T_0 + \frac{2\tilde{W}}{\rho C_\varepsilon^{сеп}} + \frac{\lambda_T}{\alpha_D} \tilde{T}, \quad \tilde{W} = \frac{\tilde{B}^2}{2\mu}, \quad (21)$$

де α_D – коефіцієнт дифузії магнітного поля.

Тут за характерний час прийнято час дифузії магнітного поля на віддаль \tilde{L} , тобто $\tilde{t} = \frac{\tilde{L}}{\alpha_D}$.

Так як для металів $\frac{\lambda_T}{\alpha_D} \ll 1$ (наприклад, для нержавіючої сталі $\frac{\lambda_T}{\alpha_D} \approx 0.8 \cdot 10^{-5}$), то з рівняння (21) випливає, що процесом теплопровідності в перехідному режимі можна знехтувати.

Таким чином, для кільцевої пластини маємо

$$T = T_0 + \frac{1}{\rho \mu C_{\varepsilon}^{cep}} \left[\frac{(B_r^+ + B_r^-)^2}{4} + B_{\gamma}^2 \right], \quad (22)$$

У подальшому, при розв'язанні конкретних задач магнітопружності будемо оцінювати напружено-деформівний стан пластини з урахуванням джоулевого тепла в залежності від величини магнітної індукції.

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ У ФОРМІ КОШІ. Припустимо, що шукані компоненти електромагнітного поля і поля переміщень не залежать від колової координати. У цьому випадку за розв'язувальні функції виберемо

$$u, w, \vartheta_r, N_r, Q_r, M_r, B_{\gamma}, E_{\theta}. \quad (23)$$

Використовуючи рівняння та співвідношення (14–18, 22, 23), після перетворень (див. [3, 8, 9, 13]) отримуємо повну систему нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності, яка описує напружено-деформівний стан струннесучих оболонок з урахуванням джоулевого тепла.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_r - \frac{\nu}{r} u - \frac{\vartheta_r^2}{2} + (1+\nu) \alpha_T T; & \frac{\partial w}{\partial r} &= -\vartheta_r; \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r - \frac{\nu}{r} \vartheta_r + (1+\nu) \alpha_T T; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= -J_{\theta cm} B_{\gamma} - \frac{1-\nu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} u - f_r - \sigma h \left[E_{\theta} B_{\gamma} - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} B_{\gamma} \right] + \frac{Eh}{r} \alpha_T T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} &= -\frac{Q_r}{r} + \sigma h \left[E_{\theta} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{(B_r^+ + B_r^-)^2}{4} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} B_{\gamma} \right] - f_{\gamma} + h J_{\theta cm} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &= -\frac{1-\nu}{r} M_r + \frac{Eh^3}{12r^2} \vartheta_r + Q_r + N_r \vartheta_r - \frac{Eh}{2} \alpha_T T; & \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r} &= -\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial t} - \frac{E_{\theta}}{r}; \\ \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial r} &= -\sigma \mu \left[E_{\theta} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

тут $T(r, t)$ – обчислюється за виразом (22).

Розв'язувальна система рівнянь (24) є нелінійною гіперболічно-параболічною системою рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Для визначення невідомих сталих, які з'являються в загальному розв'язку системи рівнянь після інтегрування, мають ставитися граничні умови на контурах пластини та доповнюватися початковими умовами. Граничні умови для функцій, що характеризують механічну частину задачі, задаються так само, як і у звичайній теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних функцій можуть задаватися через компоненти електромагнітного поля або комбінацію компонент магнітних і електричних полів.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ГНУЧКИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА. Запропонована методика чисельного розв'язання нелінійних задач магнітопружності кільцевих пластин базується на послідовному використанні скінченно-різницевої схеми Ньюмарка [14], методів квазілінеаризації [2] та дискретної ортогоналізації [3, 4].

Представимо у векторному вигляді розв'язувальну систему кільцевої пластини (24)

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{F}_1 \left(r, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right), \quad (25)$$

з граничними умовами

$$g_1 \vec{N}(r_0, t) = \vec{b}_1, \quad g_2 \vec{N}(r_N, t) = \vec{b}_2 \quad (26)$$

і початковими умовами

$$\vec{N} = 0, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad (27)$$

де $\vec{N} = \{u, w, \vartheta_r, N_r, Q_r, M_r, E_{\theta}, B_{\gamma}\}^T$ – вектор-стовпець шуканих функцій; \vec{F}_1 – в загальному випадку нелінійна вектор-функція; g_1, g_2 – прямокутні матриці; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – відомі вектори.

Використання схеми Ньюмарка дозволяє весь часовий інтервал розбити на окремі малі інтервали і відслідковувати деформування пластини на кожному часовому інтервалі.

Після застосування цієї схеми розв'язувальну систему магнітопружності (24) для відповідного часового проміжку можна записати у такому вигляді

$$\frac{d\vec{N}}{dr} = F(r, \vec{N}). \quad (28)$$

Граничні умови на контурі $r = const$ мають вигляд

$$D_1 \vec{N} \Big|_{r=r_0} = \vec{d}_1, D_2 \vec{N} \Big|_{r=r_N} = \vec{d}_2, \quad (29)$$

де D_1, D_2 – задані прямокутні матриці відповідно порядків $k \times 8$ та $(8-k) \times 8, k < 8$; \vec{d}_1, \vec{d}_2 – задані вектори; k – число граничних умов на контурі $r = r_0$.

За допомогою метода квазілінеаризації вихідна крайова задача (28), (29) зводиться до послідовності лінійних крайових задач на кожному часовому інтервалі

$$\frac{d\vec{N}^{k+1}}{dr} = \vec{G}_1(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k), \quad B_1(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(r_0) = \vec{b}_1(\vec{N}^k), \quad B_2(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(r_N) = \vec{b}_2(\vec{N}^k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де $\vec{N}^{k+1} = \{u^{k+1}, w^{k+1}, \vartheta_r^{k+1}, N_r^{k+1}, Q_r^{k+1}, M_r^{k+1}, E_\theta^{k+1}, B_\gamma^{k+1}\}^T$; \vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k – розв'язки відповідно на $(k+1)$ -й та k -й ітерації; $\vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k)$ – вектор правої частини системи рівнянь; $B_1(\vec{N}^k), B_2(\vec{N}^k), \vec{b}_1(\vec{N}^k), \vec{b}_2(\vec{N}^k)$ – відповідно матриці та праві частини граничних умов.

Кожна з лінійних крайових задач послідовності на відповідному часовому інтервалі розв'язується чисельно за допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації. На першому за часом кроці за початкове наближення в ітераційному процесі вибирається розв'язок крайової задачі в лінеаризованій постановці, на послідовних кроках – розв'язок отриманий на попередньому кроці. Вибір такої схеми значно зменшує кількість ітерацій необхідних для розв'язання задачі.

ВИСНОВКИ. Запропоновано нову фізичну модель і методику розрахунку нелінійної магнітопружної крайової задачі гнучкої кільцевої пластини з урахуванням джоулевого тепла. Побудовано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості. Запропонована методика розрахунку крайових задач магнітопружності кільцевих пластин, які знаходяться під дією нестационарних механічного та магнітного полів, дозволить визначити напружено-деформівний стан пластини змінної жорсткості при довільних крайових умовах, включаючи і нелінійні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основы теории пластин та оболонок з елементами магнітопружності. Підручник.-К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 403 с.
4. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К.: Вышш. Школа, –1983. – 286 с.
5. Дресвянников В. И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей //Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32–47.
6. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968.– 501 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
8. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Федорченко Л. Н. Исследование влияния стороннего тока на напряженное состояние ортотропной кольцевой пластины с ортотропной электропроводностью //Прикл. мех. – 2014. – Т. 50. № 6. С. 90–96.
9. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Федорченко Л. Н. //Прикл. мех.-2016. – Т. 52. №1 С. 86–94.
10. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. – М.: Л.: ГТТИ, 1948. – 624 с.
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – Наука, 1976. – 616 с.
12. Green A. E., Naghdi P. M. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates //Phil. Trans. Roy. Soc. – London. – 1983, – A309, P. 559–610.
13. Mol'chenko L. V. Influence of an Extranous Electric Current on the Stress of an Annular Plate of Variable Rigidity // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37. № 12. – P. 1607–1611.
14. Newmark N. M. Method of Computation for Structural Dynamics //J. end Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, № 7. – P. 67–97.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.16

Мольченко Л., д-р. физ.-мат. наук, проф.,

Николаевский национальный университет им. В. А. Сухолинского, Николаев

Федорченко Л., асп., КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

Колесник С., инж., Николаевский национальный университет им. В. А. Сухолинского, Николаев

МАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТИ С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОГО НАГРЕВА

Приведена постановка задачи и получена разрешающая система гибкой кольцевой пластины с учетом джоулевого нагрева. Предложена методика решения нелинейной задачи магнитоупругости кольцевой пластины переменной жёсткости.

Mol'chenko L., Full Doctor, Prof, V. O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv

Fedorchenko L., PhD graduate, Taras Shevchenko National university of Kyiv

Kolesnik S., Engineer, V.O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv

MAGNETOELASTICITY OF DEFORMATION FLEXIBLE ANNULAR PLATE OF VARIABLE STIFFNESS WITH THE JOULE HEATING

The problem statement is given. The resolving system of flexible annular plates taking into account the Joule heating is obtained. The offered technique for solving the nonlinear problem of magnetoelasticity annular plate of variable stiffness is proposed.