УДК 517.518.8

Д. Радченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,

НАБЛИЖЕННЯ ВІДОБРАЖЕННЯМИ З ДОДАТНІМ ЯКОБІАНОМ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається задача про наближення неперервних локально однозначних відображень у тривимірному просторі гладкими відображеннями з додатнім якобіаном.

ВСТУП. У статті [1] було доведено наступний результат, що є локальним аналогом теореми про наближення гомеоморфізмів на площині [4].

Теорема 1. *Нехай* $f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ *– неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке гладке відображення* $g:[0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ із класу C^∞ *з додатнім якобіаном на* $[0,1]^2$*, що* $\|f-g\| < \varepsilon$.

Тут і надалі через $\|\cdot\|$ ми позначаємо супремум-норму на просторі неперервних функцій, $\|f\|_K = \sup_{x\in K} |f(x)|$, де K це множина визначення f, яку ми зазвичай не будемо вказувати. Будемо називати відображення $f:K \to \mathbb{R}^3$ локально однозначним, якщо для кожної точки $x \in K$ існує її окіл U такий, що звуження $f|_U$ – ін'єктивне відображення. Нарешті, під збереженням орієнтації розуміється властивість $\deg(f,U,x) > 0$ для всіх $x \in \mathrm{int}(K)$, і всіх достатньо малих відкритих околів $x \in U$, де $\deg(f,U,x)$ – це так званий топологічний степінь відображення (див. [8]).

Основна мета цієї статті – довести аналогічний результат у тривимірному просторі.

Теорема 2. Нехай $f:[0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ – неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке гладке відображення $g:[0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ із класу C^∞ з додатнім якобіаном на $[0,1]^3$, що $\|f-g\| < \varepsilon$.

З теореми 1, теореми 2, а також простих результатів стосовно наближення поліномами функцій багатьох змінних (див., наприклад, [2]) випливає також наступний простий наслідок стосовно наближення поліноміальними відображеннями з тими самими умовами.

Наслідок 1. Нехай $d \in \{2,3\}$ і $f:[0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ – неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке поліноміальне відображення $p:[0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ з додатнім якобіаном на $[0,1]^d$, що $\|f-p\| < \varepsilon$.

Доведення. Нехай $g:[0,1]^d \to \mathbb{R}^d$ – таке гладке відображення з додатнім якобіаном, що $\|f-g\| < \varepsilon/2$. З [2, теор. 1] слідує, що для довільного $\delta > 0$ існує таке поліноміальне відображення p, що $\|g-p\| < \delta$ і $\|\partial_i g_j - \partial_i p_j\| < \delta$, $1 \le i,j \le d$. Нехай $0 < C_1, C_2$ такі, що $\delta < C_2$, $C_1 < J_g(x)$ і $|\partial_i g_j(x)| < C_2$ для всіх $x \in [0,1]^d$, $1 \le i,j \le d$. Тоді, за нерівністю трикутника, маємо

$$J_p(x) > J_g(x) - d!2^d C_2^{d-1}\delta > C_1 - d!2^d C_2^{d-1}\delta,$$

тому $J_p(x) > \delta/2$ за умови $\delta < \dfrac{C_1}{2^d d! C_2^{d-1}}$. Якщо тепер покласти

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{C_1}{2^d d! C_2^{d-1}}\right),$$

то отримаємо, що відповідне поліноміальне відображення p задовольняє необхідні умови.

ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ. Так само як і у статті [1], доведемо теорему 2 у два кроки. Спочатку ми встановимо існування кусково-лінійного наближення до f (лема 1), а потім наведемо відповідну процедуру для згладження цього відображення (лема 3). Ми вільно користуватимемось поняттями кусково-лінійної топології – симпліціальний d-комплекс, тріангуляція, тощо (див. [7, ст. 1–6]).

Лема 1. Нехай $f:[0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ – неперервне локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке локально однозначне кусково-лінійне відображення $h:[0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$, що $\|f-h\| < \varepsilon$.

Так само, як і в [1], цю лему можна довести адаптуючи доведення теореми про наближення гомеоморфізмів [7 , теор. 33.1]. Наведемо інше доведення, що спирається на результати статті [3].

Лема 2. Нехай C – скінченний 2-комплекс, $g:|C| \to \mathbb{R}^3$ – неперервне відображення, що є гомеоморфізмом при звуженні на будь-який підкомплекс діаметру $\le k$, де $k > 3$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке кусково-лінійне відображення $h:|C| \to R^3$ з тією самою властивістю, що $\|g-h\| < \varepsilon$.

Доведення. З доведення теореми [3, теор. 5] випливає існування відображення $\tilde{g}:|C|\to\mathbb{R}^3$, що є гомеоморфізмом при звуженні на будь-який підкомплекс діаметру $\le k$ і яке задовольняє нерівності $\left\|g-\tilde{g}_{|C|}\right\|<\varepsilon/2$ і має таку властивість: під дією $\tilde{g}$ образ кожного ребра в C є ламаною лінією, а образ кожного трикутника – кусково-лінійним 2-диском (за означенням, це образ в R^3 стандартного трикутника Δ під дією кусково-лінійного ін'єктивного відображення). Залишається знайти кусково-лінійне відображення h, що наближає $\tilde{g}$ і має властивість $h(\sigma)=\tilde{g}(\sigma)$ для кожного симплекса $\delta\in C$.

Для цього покладемо $h(v)=\tilde{g}(v)$ для кожної вершини $v\in C$, і визначимо h на ребрі vw як кусково-лінійну параметризацію ламаної лінії $\tilde{g}(vw)$, за умови $\left\|h-\tilde{g}\right\|_{vw}<\varepsilon/4$. Щоб визначити h на трикутниках залишається скористатися наступним фактом: якщо $f:\Delta\to\Delta$ – гомеоморфізм, а $l_0:\partial\Delta\to\partial\Delta$ – кусково-лінійний гомеоморфізм що задовольняє $\left\|f-l_0\right\|_{\partial\Delta}<\delta/2$, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм $l_1:\Delta\to\Delta$, що $l_1|_{\partial\Delta}=l_0$ і $\left\|f-l_1\right\|<\delta$. Цей факт випливає з конструкції використаної у доведенні [7, теор. 6.3]. Лему 2 доведено.

Нам також знадобиться наступний результат (див. [7, теор. 17.12]).

Твердження 1 (Теорема Шенфліса). Якщо $Q=[0,1]^3$ і $f:\partial Q\to\mathbb{R}^3$ – кусково-лінійний гомеоморфізм, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, що $F|_{\partial Q}=f$.

Доведення леми 1. Розглянемо таке відкрите покриття $\bigcup_i U_i\supset[0,1]^3$, що $f|_{U_i}$ є гомеоморфізмом для всіх i. Нехай L – стала Лебега цього покриття. Розіб'ємо Q на N^3 однакових кубів, $[0,1]^3=Q_1\cup\ldots\cup Q_{N^3}$, де $\operatorname{int}(Q_i\cup Q_j)=\varnothing$.. Виберемо N так, щоб $\operatorname{diam}(f(Q_i))<\min(\varepsilon/3,L/4)$ і позначимо через C – симпліціальний 2-комплекс з геометричною реалізацією $|C|=\{(x,y,z)\in[0,1]^3:\{x,y,z\}\cap\{0,1,\ldots,N\}\ne\varnothing\}$ (об'єднання $(N+1)^3$ площини). Тоді $f|_{|C|}$ задовольняє умови леми 2, а отже існує таке кусково-лінійне відображення $h_0:|C|\to\mathbb{R}^3$, що $\left\|f-h_0\right\|<\varepsilon/3$ і яке є однозначним на будь-якому підкомплексі C комбінаторного діаметра ≤ 4. Залишається лише N^3 разів скористуватися теоремою Шенфліса, щоб побудувати кусково-лінійне продовження $h_1:[0,1]^3\to\mathbb{R}^3$ з умовою $h_1|_{|C|}=h_0$ і переконатися, що воно локально однозначне і виконується нерівність $\left\|f-h\right\|<\varepsilon$.

Основна складність другого кроку полягає в тому, що, при спробі згладити кусково-лінійне відображення наївним чином, наприклад, за допомогою згортки з гладкою фінітною функцією, відображення може втратити властивість локальної однозначності.

Лема 3. Нехай $f:[0,1]^3\to\mathbb{R}^3$ – кусково-лінійне локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ існує гладке відображення $g:[0,1]^3\to\mathbb{R}^3$ із класу C^∞ з додатнім якобіаном таке, що $\left\|f-g\right\|<\varepsilon$.

Доведення. Помітимо, що функція $f_n(x)=f(x_0+(x-x_0)\cdot(1-1/n))$, де $x_0=(1/2,1/2,1/2)$ має ті самі властивості, що й f, визначена на множині $[-1/n,1+1/n]^3$ і $f_n\to f$ на $Q=[0,1]^3$. Тому, без обмеження загальності, вважатимемо, що f продовжується на деякий відкритий окіл $U_0\supset Q$. Нехай $\omega:\mathbb{R}^3\to[0,+\infty)$ – деяка функція класу C^∞ з носієм в кулі $\overline{B_1(0)}$ така, що $\int_{\mathbb{R}^3}\omega(x)=1$ і $\int_{\mathbb{R}^3}x\omega(x)=0$. Покладемо $\omega_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-3}\omega(x/\varepsilon)$.

Нехай K – такий симпліціальний комплекс, що $|K|=[-\delta,1+\delta]^3\subset U_0$ і відображення f – лінійне на кожному симплексі $\delta\in K$. Вважатимемо також, що K містить такий підкомплекс K_0, що $|K_0|=Q$. Вибираючи достатньо дрібне підрозбиття, так само як в доведенні леми 1, можемо гарантувати, що звуження f на будь-який підкомплекс комбінаторного діаметру 4 є однозначним. Ми будемо використовувати стандартне позначення K^i для i-остову комплексу K ($B=N(I,2\varepsilon)-N(\{-1,1\},\varepsilon_1)$ – множина усіх вершин, K^1 – множина усіх вершин і ребер, тощо). Позначатимемо також через $N(A,\eta)$ – η-окіл множини A. Побудуємо згладження $g:Q\to\mathbb{R}^3$ у декілька етапів.

1. Задамо $g_1:Q\to\mathbb{R}^3$ як згортку

$$g_1(x)=f*\omega_\varepsilon(x)=\int f(y)\cdot\omega_\varepsilon(x-y)dy,$$

де значення ε набагато менше за довжину $f(e)$ будь-якого з ребер $e\in K_0$. Відображення g_1 гладке класу C^∞, рівномірно збігається до f при $\varepsilon>0$ і співпадає з f на множині $Q\setminus N({K_0}^2,\varepsilon)$ (що випливає з того, що при згортці з ω_ε лінійне відображення не змінюється). Нехай Δ – деякий трикутник в K_0, а σ_1,σ_2 – його суміжні 3-симплекси в K. У звуженні на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus N(K_0^{\,1}, \varepsilon)$, g_1 переводить площини паралельні до Δ у деяке сімейство паралельних площин, g_1 також є монотонним у напрямі ортогональному до Δ. Крім того, g_1 є афінним у напрямі площини Δ. Отже, звуження g_1 на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus N(K_0^{\,1}, \varepsilon)$ є дифеоморфізмом.

2. Зафіксуємо тепер $\varepsilon_1 > 3\varepsilon$ і змінимо відображення g_1 на множині $N(|K_0^{\,1}|, \varepsilon) \setminus N(|K_0^{\,0}|, \varepsilon_1)$, тобто в малому околі кожного з ребер. Наша побудова буде локальною, тому для зручності будемо вважати, що ребро має вигляд $I = \{(0,0)\} \times [-1,1]$. З точністю до лінійного перетворення у множині значень, можемо вважати, що $f(0,0,1) = (0,0,1)$ і $f(0,0,-1) = (0,0,-1)$. Тоді на множині $B := N(I, 2\varepsilon) \setminus N(\{-1,1\}, \varepsilon_1)$ відображення f задовольняє $f(x,y,z) = f(x,y,0) + (0,0,z)$. З означення g_1 випливає, що g_1 також задовольняє $g_1(x,y,z) = g_1(x,y,0) + (0,0,z)$. Таким чином, щоб продовжити g_1 з $A := N(I, 2\varepsilon) \setminus (N(I, \varepsilon) \cup N(\{-1,1\}, \varepsilon_1))$ до дифеоморфізму на B, достатньо продовжити з $A_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < |x| < 2\varepsilon\}$ на множину $B_0 = \{x \in \mathbb{Z}^2 : |x| < 2\varepsilon\}$ відображення $(x,y) \mapsto (g_{1,1}(x,y,0), g_{1,2}(x,y,0))$ із збереженням однозначності. Це гарантує лема 4. Нехай g_2 – отримане продовження.

3. Побудоване відображення $g_2 : Q \setminus N(|K_0^{\,0}|, \varepsilon_1) \to \mathbb{R}^3$ є локальним дифеоморфізмом. При достатньо малому значенні ε_1, воно також буде однозначним на множині $B_{2\varepsilon_1}(v) - B_{\varepsilon_1}(v)$ для кожної вершини $v \in K_0^{\,0}$. Тому, застосовуючи лему 4, ми отримаємо продовження $g_3 : Q \to \mathbb{R}^3$, що має всі необхідні властивості. Лему 3 доведено.

Існування продовження у кроках 2 і 3 випливає з наступної леми. Будемо позначати кільце з центром в точці x_0 і радіусами r_1, r_2 через

$$A_{r_1,r_2}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 \le |x - x_0| \le r_2\}.$$

Лема 4. Нехай $d \in \{2,3\}$, $0 < r_1 < 1 < r_2$, а відображення $f : A_{r_1,r_2}(0) \to \mathbb{R}^d$ – дифеоморфізм на свій образ. Тоді існує такий дифеоморфізм $F : \overline{B_{r_2}(0)} \to \mathbb{R}^d$, що $F(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in A_{1,r_2}(0)$ і $F(x) = x$ для $x \in B_{r_1}(0)$.

Доведення. Нехай $d = 3$, і зафіксуємо $s \in (r_1, 1)$. За теоремою Александера [5, теор. 1.1] існує такий дифеоморфізм $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, що $g(f(x)) = x$ при $|x| = s$. Тому будемо вважати, що $f(x) = x$ при $|x| = s$. Визначимо $F_1(x) = x$, $|x| \le s$ і $F_1(x) = f(x)$, $|x| > s$. Тоді F_1 – гомеоморфізм, а звуження F_1 на кожну з множин $\overline{B_s(0)}$, $A_{s,r_2}(0)$ є дифеоморфізмом. Застосовуючи теорему про склеювання дифеоморфізмів [6, теор. 2.8] отримаємо шуканий дифеоморфізм $F : B_{r_2}(0) \to \mathbb{R}^3$, що співпадає з F_1 усюди поза $N(\{x : |x| = s\}, (1-s)/2)$. Випадок $d = 2$ розглядається аналогічно.

Лему 4 доведено.

Основний результат (теорема 2) випливає з леми 1 і леми 3.

Висновок. Доведено, що неперервне, локально однозначне відображення куба, яке зберігає орієнтацію, можна як завгодно добре наблизити гладким відображенням із додатнім якобіаном.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Радченко Д. В. О приближении отображениями с неотрицательным якобианом // Матем. заметки, 93:2 (2013), с. 263–275.
2. Bagby T., Bos L., Levenberg N. Multivariate simultaneous approximation, Constructive Approximation, Vol. 18, No. 4 (2002), p. 569–577.
3. Bing R. H. An Alternative Proof that 3-Manifolds Can be Triangulated, Annals of Mathematics, Vol. 69, No. 1 (1959), p. 37–65.
4. Franklin P., Wiener N. Analytic Approximations to Topological Transformations, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 28, No. 4 (1926), p. 762–785.
5. Hatcher A. Notes on basic 3–manifold topology, www.math.cornell.edu/hatcher/3M/3Mdownloads.html.
6. Matsumoto Y. An Introduction to Morse Theory, Translations of Mathematical Monographs, AMS (2001).
7. Moise E. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, New York, Springer-Verlag (1977).
8. O'Regan D., Cho Y. J., Chen Y. Q. Topological Degree Theory and Applications, Chapman and Hall/CRC, New York (2006).

Стаття надійшла до редколегії 10.05.16

Радченко Д., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,

ПРИБЛИЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЯКОБИАНОМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача приближения непрерывных локально однозначных отображений в трёхмерном пространстве гладкими отображениями с положительным якобианом.

Radchenko D., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv

APPROXIMATION BY MAPPINGS WITH POSITIVE JACOBIAN IN THE THREE-DIMENSIONAL SPACE

We consider the problem of approximating continuous locally univalent mappings in three-dimensional Euclidean space by smooth mappings with positive Jacobian determinant.