УДК 517.947

А. Громик, канд. тех. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
e-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПРОСТОРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру гіперболічної крайової задачі математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі.

ВСТУП. Відомо, що актуальні задачі теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач математичної фізики не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими.

Деякі класи подібних крайових задач розглядалися в працях Б. Болі. Дж. Уейнера [1], В. Дейнеки, І. Сергієнка, В. Скопецького [4, 13], Ю. Коляна [5], Я. Підстригача, В. Ломакіна, Ю. Коляна [12], Г. Шиліна [15] та ін., в яких досліджено низку важливих математичних моделей механіки суцільного середовища, механіки деформівного твердого тіла, термомеханіки, тощо. При цьому часто використовувалися методи чисельного аналізу або ж метод зведення задач у кусково-однорідному середовищі до відповідних задач для диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами у вигляді узагальнених функцій (δ -функції Дірака та її похідних) в однорідному середовищі, точний розв'язок яких побудувати практично неможливо.

Водночас для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 7-9, 11]. Цей метод дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідних середовищах через їх інтегральне зображення.

У цій статті побудовано методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в напівобмеженому за аплікатною змінною кусково-однорідному просторовому середовищі,координат..

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3=\left\{(t,x,y,z): t>0; (x,y)\in\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;b); z\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1} I_j=\bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j), l_0\ge 0, l_k<l_{k+1}, l_{n+1}=+\infty\right\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [14]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+\chi_j^2 u_j=f_j(t,x,y,z),\ z\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0}=g_j^1(x,y,z),\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0}=g_j^2(x,y,z),\ \ z\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}\,; \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)u_j\right|_{x=0}=\theta_j(t,y,z);\ \left.\frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\right|_{x=+\infty}=0;\ \ k=0,1;\ \ j=\overline{1,n+1}\,; \tag{3}$$

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)u_j\right|_{y=0}=\omega_j^1(t,x,z),\ \left.\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)u_j\right|_{y=b}=\omega_j^2(t,x,z),\ j=\overline{1,n+1}\,; \tag{4}$$

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_1\right|_{z=l_0}=g_0(t,x,y),\ \left.\frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k}\right|_{z=+\infty}=0,\ \ k=0,1 \tag{5}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\right|_{z=l_k}=0,\ \ j=1,2,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{6}$$

де a_{xj}, $a_{yj,}$ a_{zj}, χ_j, p, h, k, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі невід'ємні сталі, причому $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\ne 0;$ $c_{1k}c_{2k}>0;$ $\alpha_{11}^0\le 0,\ \ \beta_{11}^0\ge 0;\ \ \left|\alpha_{11}^0\right|+\left|\beta_{11}^0\right|\ne 0;$

$$f(t,x,y,z)=\left\{f_1(t,x,y,z),f_2(t,x,y,z),\ldots,f_{n+1}(t,x,y,z)\right\};\ g^1(x,y,z)=\left\{g_1^1(x,y,z),g_2^1(x,y,z),\ldots,g_{n+1}^1(x,y,z\right\};$$

$$g^2(x,y,z)=\left\{g_1^2(x,y,z),g_2^2(x,y,z),\ldots,g_{n+1}^2(x,y,z\right\};\ \theta^1(t,y,z)=\left\{\theta_1^1(t,y,z),\theta_2^1(t,y,z),\ldots,\theta_{n+1}^1(t,y,z)\right\};$$

$\theta^2(t,y,z)=\left\{\theta_1^2(t,y,z),\theta_2^2(t,y,z),\ldots,\theta_{n+1}^2(t,y,z)\right\}$; $\omega^1(t,x,z)=\left\{\omega_1^1(t,x,z),\omega_2^1(t,x,z),\ldots,\omega_{n+1}^1(t,x,z\right\}$;

$\omega^2(t,x,z)=\left\{\omega_1^2(t,x,z),\omega_2^2(t,x,z),\ldots,\omega_{n+1}^2(t,x,z\right\}$; $g_0(t,x,y)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t,x,y,z)=\{u_1(t,x,y,z),u_2(t,x,y,z),\ldots,u_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – шукана функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j^2\equiv 0$ рівняння (1) є класичними тривимірними неоднорідними хвильовими рівняннями (рівняннями коливань, рівняннями Даламбера) для ортотропного просторового середовища;

2) у випадку $\alpha_{11}^k=0,\ \beta_{11}^k=1;\ \alpha_{12}^k=0,\ \beta_{12}^k=1;\ \alpha_{21}^k=E_1^k,\ \beta_{21}^k=0;\ \alpha_{22}^k=E_2^k,\ \beta_{22}^k=0$, де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга, $k=\overline{1,n}$, умови спряження (6) збігаються з умовами ідеального механічного контакту.

Отже, у зазначених випадках розглянута задача є математичною моделлю вимушених коливних процесів у напівобмеженому багатошаровому просторовому середовищі $\Omega_3=\left\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega_2;z\in I_n^+\right\}$.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Припустимо, що розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [10, 11].

До задачі (1)–(6) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;a]$ щодо змінної x [10]:

$$Z_{xm}\left[g(x)\right]=\int_0^a g(x)\omega_m(x)dx\equiv g_m, \tag{7}$$

$$Z_{xm}^{-1}\left[g_m\right]=\sum_{m=1}^{\infty}g_m\frac{\omega_m(x)}{\|\omega_m\|}\equiv g(x), \tag{8}$$

$$Z_{xm}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\delta_m^2g_m+\omega_m(0)\left(-\frac{dg}{dx}+p_1g\right)\Bigg|_{x=0}+\omega_m(a)\left(\frac{dg}{dx}+p_2g\right)\Bigg|_{x=a}, \tag{9}$$

де ядро перетворення $\omega_m(x)=\dfrac{\delta_m\cos(\delta_m x)+p_1\sin(\delta_m x)}{\sqrt{\delta_m^2+p_1^2}}$, $\|\omega_m\|^2=\int_0^a\omega_m^2(x)dx=\dfrac{a}{2}+\dfrac{(p_1+p_2)\left(\delta_m^2+p_1p_2\right)}{2\left(\delta_m^2+p_1^2\right)\left(\delta_m^2+p_2^2\right)}$,

$\{\delta_m\}_{m+1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння $ctg(\delta a)=\dfrac{\delta^2-p_1p_2}{\delta(p_1+p_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Z_{xm} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)–(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\left\{(t,y,z);t>0;y\in(0;b);z\in I_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2u_{jm}}{\partial t^2}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm}+\left(a_{xj}^2\delta_m^2+\chi_j^2\right)u_{jm}=F_{jm}(t,y,z) \tag{10}$$

з початковими умовами

$$u_{jm}\big|_{t=0}=g_{jm}^1(y,z),\ \frac{\partial u_{jm}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g_{jm}^2(y,z),\ \ z\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)u_{jm}\bigg|_{y=0}=\omega_{jm}^1(t,z);\ \left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)u_{jm}\bigg|_{y=b}=\omega_{jm}^2(t,z), \tag{12}$$

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_{1m}\bigg|_{z=l_0}=g_{0m}(t,y);\ \ \frac{\partial^k u_{jm}}{\partial z^k}\bigg|_{z=+\infty}=0,\ \ k=0,1, \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_{km}-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1,m}\right]\bigg|_{z=l_k}=0,\ \ j=1,2,\ k=\overline{1,n},, \tag{14}$$

де $$F_jm(t,y,z)=f_{jm}(t,y,z)+a_{xj}^2\omega_m(0)\theta_j^1(t,y,z)+a_{xj}^2\omega_m(a)\theta_j^2(t,y,z),\ \ j=\overline{1,n+1}.$$

До задачі (10)–(14) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y [10]:

$$\Lambda_{yk}\left[g(y)\right]=\int_0^b g(y)\nu_k(y)dy\equiv g_k, \tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}\left[g_k\right]=\sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{\nu_k(y)}{\left\|\nu_k\right\|^2} \equiv g(y), \tag{16}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2 g_k+\nu_k(0)\left(-\frac{dg}{dy}+h_1 g\right)\Bigg|_{y=0}+\nu_k(b)\left(\frac{dg}{dy}+h_2 g\right)\Bigg|_{y=b}, \tag{17}$$

де ядро перетворення $\nu_k(y)=\dfrac{\gamma_k \cos(\gamma_k y)+h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2+h_1^2}}$, $\left\|\nu_k\right\|^2 \equiv \int_0^b \nu_k^2(y)dy=\dfrac{b}{2}+\dfrac{(h_1+h_2)(\gamma_k^2+h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2+h_1^2)(\gamma_k^2+h_2^2)}$,

$\left\{\gamma_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння $ctg(\gamma b)=\dfrac{\gamma^2-h_1 h_2}{\gamma(h_1+h_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)–(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3^{"}=\left\{(t,z);t>0;z\in I_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jmk}}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2 u_{jmk}}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\delta_m^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2\right)u_{jmk}=G_{jmk}(t,z) \tag{18}$$

з початковими умовами

$$u_{jmk}\Big|_{t=0}=g_{jmk}^1(z);\ \ \frac{\partial u_{jmk}}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=g_{jmk}^2(z),\ \ z\in I_j, \tag{19}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_{1mk}\Bigg|_{z=l_0}=g_{0mk}(t);\ \ \frac{\partial^p u_{jmk}}{\partial z^p}\Bigg|_{z=+\infty}=0,\ \ p=0,1, \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^s\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^s\right)u_{smk}-\left(\alpha_{j2}^s\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^s\right)u_{s+1,mk}\right]\Bigg|_{z=l_s}=0,\ \ j=1,2,\ s=\overline{1,n},, \tag{21}$$

де $G_{jmk}(t,z)=F_{jmk}(t,z)+a_{xj}^2\nu_k(0)\omega_{jm}^1(t,z)+a_{yj}^2\nu_k(b)\omega_{jm}^2(t,z),\ \ j=\overline{1,n+1}.$

До задачі (18)–(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $\left(l_0;+\infty\right)$ з n точками спряження щодо змінної z [11]:

$$F_{n,+}\left[g(z)\right]=\int_{l_0}^{+\infty} g(z)V(z,\beta)\sigma(z)dz\equiv\tilde{g}(\beta), \tag{22}$$

$$F_{n,+}^{-1}\left[\tilde{g}(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde{g}(\beta)V(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\equiv g(z), \tag{23}$$

$$\begin{gathered}F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^n a_{zj}^2\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_j-z\right)\frac{d^2 g}{dz^2}+a_{z,n+1}^2\theta\left(z-l_n\right)\frac{d^2 g}{dz^2}\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sigma_1 a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(z,l_0)\times\\ \times\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0 g\right)\Bigg|_{z=l_0}-\sum_{j=1}^{n+1}\kappa_j^2\int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz.\end{gathered} \tag{24}$$

У формулах (22)–(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\beta)=\sum_{k=1}^n V_k(z,\beta)\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+V_{n+1}(z,\beta)\theta(z-l_n),\quad \sigma(z)=\sum_{k=1}^n\sigma_k\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+\sigma_{n+1}\theta(z-l_n),$$

$$\Omega_n(\beta)=\frac{\beta}{b_{n+1}(\beta)\omega_n(\beta)},\quad V_m(z,\beta)=\prod_{j=m}^n c_{2j}a_{z,j+1}^{-1}b_{j+1}(\beta)G_m(z,\beta),\ \ m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\beta)=\omega_{n2}(\beta)\cos\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right)-\omega_{n1}(\beta)\sin\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right);\ \sigma_k=\prod_{j=k}^n\frac{c_{1j}\cdot a_{z,n+1}}{c_{2j}\cdot a_{zj}^2};\ \sigma_n=\frac{c_{1n}\cdot a_{z,n+1}}{c_{2n}\cdot a_{2n}};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{z,n+1}};$$

$$G_k(z,\beta)=\omega_{k-1,2}(\beta)\cos\left(\frac{b_k z}{a_{zk}}\right)-\omega_{k-1,1}(\beta)\sin\left(\frac{b_k z}{a_{zk}}\right);\ \ k=\overline{1,n};\ \ b_j(\beta)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2};\ \ j=\overline{1,n+1};$$

$$\omega_n(\beta)=\omega_{n1}^2(\beta)+\omega_{n2}^2(\beta);\ \ \omega_{01}(q_1 l_0)=-\nu_{11}^{01}(q_1 l_0);\ \ \omega_{02}(q_1 l_0)=-\nu_{11}^{02}(q_1 l_0);$$

$$\omega_{jm}(\beta)=\omega_{j-1,2}(\beta)\psi_{1m}^j(q_j l_j;q_{j+1}l_j)-\omega_{j-1,1}(\beta)\psi_{2m}^j(q_j l_j;q_{j+1}l_j);$$

$$\psi_{jm}^{k}(q_k l_k; q_{k+1} l_k) = v_{11}^{kj}(q_k l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1} l_k) - v_{21}^{kj}(q_k l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1} l_k);$$

$$v_{ij}^{k1}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^{k} \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^{k}\right) \cos(q_s z)\Big|_{z=l_m} = -\alpha_{ij}^{k} q_s \sin(q_s l_m) + \beta_{ij}^{k} \cos(q_s l_m); \quad v_{ij}^{k2}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^{k} \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^{k}\right) \sin(q_s z)\Big|_{z=l_m} =$$

$$= \alpha_{ij}^{k} q_s \cos(q_s l_m) + \beta_{ij}^{k} \sin(q_s l_m); \quad m = 1,2;$$

Запишемо диференціальні рівняння (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\delta_m, \gamma_k)\right) u_{1mk}(t,z) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\delta_m, \gamma_k)\right) u_{2mk}(t,z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\delta_m, \gamma_k)\right) u_{n+1,mk}(t,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1mk}(t,z) \\ G_{2mk}(t,z) \\ \dots\dots\dots \\ G_{n+1,mk}(t,z) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1mk}(t,z) \\ u_{2mk}(t,z) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1,mk}(t,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1mk}^{1}(z) \\ g_{2mk}^{1}(z) \\ \dots\dots\dots \\ g_{n+1,mk}^{1}(z) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_{1mk}(z) \\ u_{2mk}(z) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1,mk}(z) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1mk}^{2}(z) \\ g_{2mk}^{2}(z) \\ \dots\dots\dots \\ g_{n+1,mk}^{2}(z) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

де $q_j^2(\delta_m, \gamma_k) = a_{xj}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за формулою (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[\cdots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z,\beta)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\beta)\sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z,\beta)\sigma_{n+1} dz\right] \tag{27}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26).

Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + q_j^2(\delta_m, \gamma_k) + k_j^2\right) \tilde{u}_{jmk}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jmk}(t,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\beta) g_{0mk}(t), \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jmk}(t,\beta)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^{1}(\beta); \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jmk}(t,\beta)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^{2}(\beta), \tag{29}$$

де $\tilde{u}_{jmk}(t,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} u_{jmk}(t,z) V_j(z,\beta) \sigma_j dz; \; j = \overline{1, n+1}; \; \tilde{G}_{jmk}(t,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} G_{jmk}(t,\beta) V_j(z,\beta) \sigma_j dz; \; j = \overline{1, n+1};$

$$\tilde{g}_{jmk}^{s}(\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} g_{jmk}(t,\beta) V_j(z,\beta) \sigma_j dz; \; j = \overline{1, n+1}; \quad s = 1,2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, ..., q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2 = q_1^2 - q_j^2, \; j = \overline{1, n+1}$..

Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{mk}}{dt^2} + \Delta^2(\delta_m, \gamma_k, \beta) \tilde{u}_{mk} = \tilde{G}_{mk}(t,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0,\beta) g_{0mk}(t), \tag{30}$$

$$\tilde{u}_{mk}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}_{mk}^{1}(\beta), \; \frac{d\tilde{u}_{mk}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{mk}^{2}(\beta), \tag{31}$$

де

$$\tilde{u}_{mk}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jmk}(t,\beta); \quad \Delta^2(\delta_m, \gamma_k, \beta) = \beta^2 + a_{x1}^2 \delta_m^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2; \quad \tilde{g}_{mk}^{1}(\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^{1}(\beta); \; \tilde{g}_{mk}^{2}(\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^{2}(\beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (30), (31) є функція

$$\tilde{u}_{mk}(t,\beta) = \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \tilde{g}_{mk}^{2}(\beta) + \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \tilde{g}_{mk}^{1}(\beta) + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)(t-\tau))}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \times$$

$$\times \left[\tilde{G}_{mk}(\tau,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0,\beta) g_{0mk}(\tau)\right] d\tau. \tag{32}$$

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1}[\ldots] = \frac{2}{\pi} colon\left(\int_0^{+\infty} \ldots V_1(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta, \int_0^{+\infty} \ldots V_2(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta, \cdots\cdots\cdots, \int_0^{+\infty} \ldots V_{n+1}(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta \right) \quad (33)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_{mk}(t,\beta)\right]$, де функція $\tilde{u}_{mk}(t,\beta)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)–(21):

$$u_{jk}(t,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\delta_m,\gamma_k,\beta)t)}{\Delta(\delta_m,\gamma_k,\beta)}\tilde{g}_{mk}^2(\beta) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(\Delta(\delta_m,\gamma_k,\beta)t)}{\Delta(\delta_m,\gamma_k,\beta)}\tilde{g}_{mk}^1(\beta)\right]V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta +$$

$$+\int_0^t \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\delta_m,\gamma_k,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\delta_m,\gamma_k,\beta)}\left[\tilde{G}_{mk}(\tau,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0;\beta)g_{0mk}(\tau)\right]V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau; \quad j=\overline{1,n+1}. \quad (34)$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jmk}(z)$, визначених формулами (34), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та Z_{xm}^{-1}, одержуємо функції

$$u_j(t,x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^a\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^a\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)g_k^1(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta +$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^a\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)g_k^2(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \int_0^t\int_0^a\int_0^b W_j(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau +$$

$$+a_{xj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}[W_{xjk}^1(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta)\theta_k^1(\tau,\eta,\zeta) + W_{xjk}^2(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta)\theta_k^2(\tau,\eta,\zeta)]\sigma_k d\eta d\zeta d\tau +$$

$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^a\int_{l_{k-1}}^{l_k}[W_{yjk}^1(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_k^1(\tau,\xi,\zeta) + W_{xjk}^2(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_k^2(\tau,\xi,\zeta)]\sigma_k d\xi d\zeta d\tau, \quad j=\overline{1,n+1}, \quad (35)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\delta_m,\gamma_r,\beta)t)}{\Delta(\delta_m,\gamma_r,\beta)}V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)\Omega_n(\beta)\frac{w_m(x)w_m(\xi)v_r(y)v_r(\eta)}{\|w_m\|^2 \quad \|v_r\|^2}d\beta; \quad j,k=\overline{1,n+1},$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z) = -\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)$ аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти $W_{xjk}^1(t,x,y,\eta,z,\zeta) = E_{j1}(t,x,0,y,\eta,z,\zeta)$ лівої абсцисної матриці Гріна, компоненти $W_{xjk}^2(t,x,y,\eta,z,\zeta) = E_{j1}(t,x,a,y,\eta,z,\zeta)$ правої абсцисної матриці Гріна, компоненти $W_{yjk}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{jk}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta)$ лівої ординатної матриці Гріна та компоненти $W_{yjk}^2(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{jk}(t,x,\xi,y,b,z,\zeta)$ правої ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}^s(t,x,y,\eta,z,\zeta),\ W_{yjk}^s(t,x,\xi,y,z,\zeta),\ (s=1,2)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (5) та умови спряження (6) в сенсі теорії узагальнених функцій [16].

Єдиність розв'язку (35) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(6).

Методами з [2, 6] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані задачі, формули (35) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої гіперболічної крайової задачі.

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2 = a_{yj}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 > 0$ формули (35) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(6) в ізотропному $(n+1)$-шаровому напівобмеженому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри $p_j, h_k\,(j,k=1,2)$ дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач (1)–(6) у випадках задання на поверхнях $x=0,\ x=a;\ y=0,\ y=b$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 3. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z=l_0$ крайової умови 1-го роду $(\alpha_{11}^0=0, \beta_{11}^0=1)$, 2-го роду $(\alpha_{11}^0=-1, \beta_{11}^0=0)$ та 3-го роду $(\alpha_{11}^0=-1, \beta_{11}^0\equiv h>0)$.

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_1(t,x,y,z)$, $g_j^1(x,y,z)$, $g_j^2(x,y,z)$, $\theta_j^1(t,y,z)$, $\theta_j^2(t,y,z)$, $\omega_j^1(t,x,z)$, $\omega_j^2(t,x,z)$, $g_0(t,x,y)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в напівобмеженому багатошаровому просторовому середовищі, Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
5. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992.
6. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2008.
7. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.
8. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001.
9. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут. 2004.
10. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997.
12. Подстригач Я. С. Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984.
13. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
15. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983.
16. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука. 1965.

Стаття надійшла до редколегії 06.11.15

Громик А., канд. техн. наук, доц.
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольск
Конет И., д-р физ.-мат. наук, проф.
Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СРЕДЫ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) построено точное аналитическое решение алгоритмического характера гиперболической краевой задачи математической физики для полуограниченной многослойной пространственной среды.

Gromyk A., Ph.D., Associate Professor
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
Konet I., Full Doctor, Professor
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS FOR SEMIBOUNDED MULTILAYER HOMOGENEOUS SPATIAL ENVIRONMENT

By means of method of integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrices and Green matrices) the exact solution of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in semibounded multilayer homogeneous spatial environment is constructed.

УДК 517.9

І. Романюк, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: romanjuk.iv@gmail.com

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ДЛЯ ОДНІЄЇ МНОГОЗНАЧНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Методами теорії глобальних атракторів досліджено якісну поведінку однієї нескінченновимірної імпульсної динамічної системи без єдиності. Доведено існування глобального атрактору, встановлено його явний вигляд та властивість інваріантності.

Вступ. Автономна еволюційна система називається імпульсною (або розривною) динамічною системою (ДС), якщо її траєкторії зазнають імпульсного впливу в моменти досягнення ними деякої фіксованої гіперповерхні фазового простору [3]. Якісному дослідженню таких систем в скінченновимірному випадку присвячено роботи [2, 4, 6, 8]. Для нескінченновимірних дисипативних ДС однією з найбільш важливих задач якісної теорії є дослідження глобального атрактору [9]. Перенесення класичних результатів теорії глобальних атракторів напівгруп на імпульсні ДС для різних класів задач здійснено в [1, 5]. В даній роботі, використовуючи методи роботи [7], існування та властивості глобального атрактору досліджено для одного класу нескінченновимірних імпульсних ДС без єдиності.

Побудова многозначної імпульсної динамічної системи. Нехай (X,ρ) – метричний простір, $P(X)$ ($\beta(X)$) – множина непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин X.