Зауваження 4. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_1(t,x,y,z)$, $g_j^1(x,y,z)$, $g_j^2(x,y,z)$, $\theta_j^1(t,y,z)$, $\theta_j^2(t,y,z)$, $\omega_j^1(t,x,z)$, $\omega_j^2(t,x,z)$, $g_0(t,x,y)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в напівобмеженому багатошаровому просторовому середовищі, Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
5. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992.
6. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2008.
7. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.
8. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001.
9. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут. 2004.
10. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997.
12. Подстригач Я. С. Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984.
13. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
15. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983.
16. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука. 1965.

Стаття надійшла до редколегії 06.11.15

Громик А., канд. техн. наук, доц.
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольск
Конет И., д-р физ.-мат. наук, проф.
Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СРЕДЫ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) построено точное аналитическое решение алгоритмического характера гиперболической краевой задачи математической физики для полуограниченной многослойной пространственной среды.

Gromyk A., Ph.D., Associate Professor
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
Konet I., Full Doctor, Professor
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS FOR SEMIBOUNDED MULTILAYER HOMOGENEOUS SPATIAL ENVIRONMENT

By means of method of integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrices and Green matrices) the exact solution of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in semibounded multilayer homogeneous spatial environment is constructed.

УДК 517.9

І. Романюк, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: romanjuk.iv@gmail.com

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ДЛЯ ОДНІЄЇ МНОГОЗНАЧНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Методами теорії глобальних атракторів досліджено якісну поведінку однієї нескінченновимірної імпульсної динамічної системи без єдиності. Доведено існування глобального атрактору, встановлено його явний вигляд та властивість інваріантності.

Вступ. Автономна еволюційна система називається імпульсною (або розривною) динамічною системою (ДС), якщо її траєкторії зазнають імпульсного впливу в моменти досягнення ними деякої фіксованої гіперповерхні фазового простору [3]. Якісному дослідженню таких систем в скінченновимірному випадку присвячено роботи [2, 4, 6, 8]. Для нескінченновимірних дисипативних ДС однією з найбільш важливих задач якісної теорії є дослідження глобального атрактору [9]. Перенесення класичних результатів теорії глобальних атракторів напівгруп на імпульсні ДС для різних класів задач здійснено в [1, 5]. В даній роботі, використовуючи методи роботи [7], існування та властивості глобального атрактору досліджено для одного класу нескінченновимірних імпульсних ДС без єдиності.

Побудова многозначної імпульсної динамічної системи. Нехай (X,ρ) – метричний простір, $P(X)$ ($\beta(X)$) – множина непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин X.

Означення 1. Многозначне відображення $G: R_+ \times X \to P(X)$ називається многозначною динамічною системою (МДС), якщо

1) $\forall x \in X \;\; G(0,x) = x$;

2) $\forall x \in X \;\; \forall t,s \geq 0 \;\; G(t+s,x) \subseteq G(t, G(s,x))$.

Означення 2. Підмножина $A \subset X$ називається глобальним атрактором МДС G, якщо

1) A – компактна множина;

2) A – рівномірно притягуюча, тобто $\forall B \in \beta(X) \;\; dist(G(t,B), A) \to 0, t \to \infty$;

3) A – мінімальна в класі замкнених множин, що задовольняють 2).

Наступний результат гарантує критерій існування глобального атрактора для дисипативної МДС.

Лема. [7] Нехай для МДС G виконується умова дисипативності:

$$\exists B_0 \in \beta(X) \;\; \forall B \in \beta(X) \;\; \exists T = T(B) > 0 \;\; \forall t \geq T \;\; G(t,B) \subset B_0 . \tag{1}$$

Тоді є еквівалентними наступні умови:

1) МДС G має глобальний атрактор;

2) МДС G є асимптотично компактною, тобто

$$\forall t_n \to \infty \quad \forall B \in \beta(X) \quad \forall \xi_n \in G(t_n, B) \text{ послідовність } \{\xi_n\} \text{ є передкомпактною.} \tag{2}$$

Крім того, для глобального атрактора A справедлива формула:

$$A = \omega(B_0) := \bigcap_{\tau > 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} G(t,B)} . \tag{3}$$

У даній статті будемо розглядати МДС G, що породжується наступною імпульсною задачею.

Нехай в фазовому просторі X задана неперервна напівгрупа $V: R_+ \times X \to X$, траєкторії якої зазнають імпульсного многозначного збурення, що задається відображенням $I: M \to P(X)$ при зустрічі з замкненою множиною $M \subset X$. Будемо вважати траєкторії неперервними справа.

Тоді для коректного задання імпульсної траєкторії будемо вважати виконаними наступні умови:

$$M \cap I(M) = \varnothing , \tag{4}$$

$$\forall x \in M \;\; \exists \tau = \tau(x) \;\; \forall t \in (0,\tau) \;\; V(t,x) \notin M . \tag{5}$$

Введемо позначення:

$$\forall x \in X \;\; M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} V(t,x) \right) \cap M .$$

Тоді, якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то існує момент часу $s = \phi(x) > 0$, такий що

$$\begin{cases} V(t,x) \notin M \;\; \forall t \in (0,s); \\ V(s,x) \in M. \end{cases}$$

Імпульсна траєкторія $\varphi: R_+ \to X$, що стартує з точки $x \in X$, будується наступним чином.

Якщо $M^+(x) = \varnothing$, то $\varphi(t) = V(t,x) \;\; \forall t \geq 0$.

Якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то для $s_0 = \phi(x) > 0$, $x_1 = V(s_0, x) \in M$ і довільного $x_1^+ \in Ix_1$ визначаємо φ на $[0, s_0]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t,x), \; t \in [0, s_0); \\ x_1^+, \; t = s_0. \end{cases}$$

Якщо $M^+(x_1^+) = \varnothing$, то $\varphi(t) = V(t - s_0, x_1^+) \;\; \forall t \geq s_0$.

Якщо $M^+(x_1^+) \neq \varnothing$, то для $s_1 = \phi(x_1^+) > 0$, $x_2 = V(s_1, x_1^+) \in M$ і довільного $x_2^+ \in Ix_2$ визначаємо φ на $[s_0, s_0 + s_1]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - s_0, x_1^+), \; t \in [s_0, s_0 + s_1); \\ x_2^+, \; t = s_0 + s_1 . \end{cases}$$

Міркуючи аналогічно, отримаємо імпульсну траєкторію зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{x_n^+\}_{n \geq 1} \subset X$ та відповідних їм моментів часу $\{s_n\}_{n \geq 0} \subset (0, +\infty)$.

Покладемо $t_0 := 0, \;\; t_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} s_k , \; n \geq 0$.

Якщо φ має нескінченну кількість імпульсів, тоді $\forall n \geq 0 \;\; \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$ маємо формулу

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - t_n, x_n^+), \; t \in [t_n, t_{n+1}); \\ x_{n+1}^+, \; t = t_{n+1} . \end{cases}$$

Через K_x позначимо множину всіх імпульсних траєкторій, що стартують з точки x.

Будемо вважати виконаною наступну умову:

$$\forall x \in X \text{ кожна траєкторія } \varphi \in K_x \text{ визначена на } [0,+\infty), \tag{5}$$

тобто для будь-якої імпульсної траєкторії кількість імпульсних точок або не більш як скінчена, або $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty$.

Покладемо $\forall x \in X \ \forall t \geq 0 \ \tilde{V}(t,x) = \{\varphi(t) | \varphi \in K_x\}$.

Легко показати, що $\tilde{V} : R_+ \times X \to P(X)$ задовольняє умови означення 1, тобто є МДС, яку будемо називати імпульсною МДС.

Основний результат. Розглянемо компактне щільне вкладення трійки гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$. Позначимо $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ норму та скалярний добуток в H. Нехай $\|\cdot\|_V$ норма в V та $\exists \alpha > 0 \ \forall u \in V \ \|u\|^2 \leq \alpha \|u\|_V^2$.

Розглянемо лінійний неперервний самоспряжений оператор $A : V \to V^*$ такий, що $\exists \beta > 0 \ \forall u \in V \ \langle Au, u \rangle \geq \beta \|u\|_V^2$.

Нехай $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ – повна ортонормована в H система така, що

$$\forall i \geq 1 \ A\psi_i = \lambda_i \psi_i, \ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \ \lambda_i \to \infty, \ i \to \infty.$$

Нехай неперервна напівгрупа $V : R_+ \times H \to H$ породжується задачею

$$\frac{dy}{dt} = -Ay, t > 0, \tag{7}$$

тобто для $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in H$

$$V(t, y_0) = y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t} \psi_i .$$

Будемо розглядати імпульсне збурення з такими параметрами:

для фіксованих $p \geq 1$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{p} \subset (0,+\infty)$, $a > 0$, $\mu > 0$ імпульсна множина задається рівністю

$$M = \left\{ y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in H \,\middle|\, \forall i = \overline{1,p} \ \ c_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i = a \right\}. \tag{8}$$

Імпульсне відображення $I : M \to P(H)$ задається рівністю

$$\text{для } y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in M \quad Iy = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c_i' \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \psi_i \,\middle|\, \forall i = \overline{1,p} \ \ c_i' \geq 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i' = a(1+\mu) \right\}. \tag{9}$$

В [8] було доведено існування глобального атрактору для імпульсної динамічної системи в наступному однозначному випадку: $A = -\Delta$, $H = L^2(\Omega)$, $p = 1$, $I : M \to L^2(\Omega)$, $c_1' = (1+\mu) c_1$,

$$M = \{ y \in L^2(\Omega) | (y, \psi_1) = a \}, \ Iy = (1+\mu) c_1 \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \psi_i .$$

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема. Для будь-яких $p \geq 1$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{p} \subset (0,+\infty)$, $a > 0$, $\mu > 0$ задача (7)–(9) породжує многозначну імпульсну динамічну систему $\tilde{V}$, що задовольняє умови (1), (4)–(6) і має в просторі H глобальний атрактор A, для якого справедлива формула

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \tau} \psi_i \mid \tau \in [0, \bar{\tau}], \ c_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i = a(1+\mu) \right\} \cup \{0\}. \tag{10}$$

Крім того, A задовольняє наступну властивість інваріантності:

$$\forall t \geq 0 \ \ \tilde{V}(t, A \setminus M) = A \setminus M . \tag{11}$$

Доведення. Доведемо виконання умов (4)–(6).

Умова (4) випливає з означення множини M та відображення I. Перевіримо виконання умови (5). В силу (7) для $y(t) = V(t, y_0)$ маємо, що

$$(y(t), \psi_i) = e^{-\lambda_i t} (y_0, \psi_i). \tag{12}$$

Нехай $y_0 \in M$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e^{-\lambda_i t} (y_0, \psi_i).$$

Так як $g(0) = a$ і $\forall i = \overline{1,p} \ \ \alpha_i > 0 \ (y_0, \psi_i) \geq 0$,то

$$g'(0) = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i (y_0, \psi_i) \leq -\lambda_1 a .$$

Отже, для деякого $\tau_0 = \tau_0(y_0) > 0$ отримаємо, що $\forall t \in (0, \tau_0)$ $g(t) < a - \frac{a\lambda_1}{2}t$. Звідси випливає виконання умови (5). Перевіримо умову (6). Якщо траєкторія не зазнає імпульсних збурень, то (6) виконується. В іншому випадку розглянемо $y_0 \in I(M)$. Оскільки

$$g'(t) = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i e^{-\lambda_i t}(y_0, \psi_i) < 0,$$

то $\exists s_0 = s_0(y_0) > 0: \ \forall t \in (0, s_0), V(t, y_0) \notin M, \ V(s_0, y_0) \in M$.

Тоді

$$a = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot e^{-\lambda_i s_0}(y_0, \psi_i) \le \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e^{-\lambda_1 s_0} \|y_0\|.$$

Отже,

$$s_0 \le \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{\|y_0\| \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}{a}. \tag{13}$$

З іншого боку

$$a = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot e^{-\lambda_i s_0}(y_0, \psi_i) \ge a(1+\mu) \cdot e^{-\lambda_p s_0}.$$

Отже,

$$s_0 \ge \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu).$$

Після стрибка для $y_1^+ \in I(V(s_0, y_0))$ повторюємо попередні міркування і для s_1 одержуємо вказану оцінку і т.д. Одержимо нескінчену кількість імпульсних моментів $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, причому

$$\forall k \ge 0 \quad s_k \ge \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu), \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j = t_k \ge \frac{k}{\lambda_p} \ln(1+\mu) \to \infty, \ k \to \infty.$$

Отже, $\tilde{V}$ задовольняє (6). Доведемо існування глобального атрактора. Для цього необхідно довести виконання умов дисипативності (1) та асимптотичної компактності (2).

Нехай $\|y_0\| \le R$. Якщо траєкторія, що стартує з точки y_0, не зазнає імпульсних збурень, то за час $\tau \le \frac{1}{\lambda_1} \ln R$ вона опиняється в одиничній кулі. Інакше в силу (13) за час $s_0 \le \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}{a}$ фазова точка досягає поверхні M і опиняється в точці $y_1^+ \in I(V(s_0, y_0))$. Отже потрібно довести, що

$$\exists R_0 > 0 \ \ \forall R > 0 \ \ \exists T = T(R) > 0 \ \ \forall y_0 \in I(M) \ \ \|y_0\| \le R \ \forall y \in K_{y_0} \quad \forall t \ge T \ \ \|y(t)\| \le R_0.$$

З попередніх міркувань $y(\cdot)$ має стрибки в моменти часу $\{s_0, s_0 + s_1, \ldots\}$ з імпульсними точками $\{y_j^+\}_{j=1}^{\infty}$ і $\forall j \ge 0 \ \ s_j \ge \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu)$. Нехай $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i = \sum_{i=1}^{p} c_i \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \psi_i$. Тоді

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^2 \le \|y_0\|^2, \tag{15}$$

$$y_1 = V(s_0, y_0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} \psi_i = \sum_{i=1}^{p} c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} \psi_i,$$

$$\|y_1\|^2 \le e^{-2\lambda_1 s_0} \sum_{i=1}^{p} c_i^2 + e^{-2\lambda_{p+1} s_0} \|y_0\|^2.$$

Покладемо $\delta = \min_{1 \le i \le p} \{\alpha_i\}$, тоді $\sum_{i=1}^{p} c_i^2 \le p \frac{a^2}{\delta^2}$. Так як $c_i' \le \frac{a(1+\mu)}{\delta}$, то $\sum_{i=1}^{p} (c_i')^2 \le p \frac{a^2 (1+\mu)^2}{\delta^2}$.

Звідси $$\|y_1^+\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (c_i')^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty} \left(c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0}\right)^2 \le p \frac{a^2 (1+\mu)^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1} s_0} \cdot \|y_0\|^2,$$

$$\|y_2\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(c_i' \cdot e^{-\lambda_i s_1}\right)^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty}\left(c_i \cdot e^{-\lambda_i (s_0+s_1)}\right)^2 \le e^{-2\lambda_1 s_1} \cdot p\frac{a^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1}(s_0+s_1)} \cdot \|y_0\|^2,$$

$$\left\|y_2^+\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(c_i'\right)^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty}\left(c_i \cdot e^{-\lambda_i (s_0+s_1)}\right)^2 \le p\frac{a^2(1+\mu)^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1}(s_0+s_1)} \cdot \|y_0\|^2,$$

Після k кроків отримуємо

$$\|y_{k+1}\|^2 \le p\frac{a^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1}\sum_{j=0}^{k} s_j} \cdot \|y_0\|^2, \tag{16}$$

$$\left\|y_{k+1}^+\right\|^2 \le p\frac{a^2(1+\mu)^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1}\sum_{j=0}^{k} s_j} \cdot \|y_0\|^2. \tag{17}$$

Таким чином, використовуючи (14), з (16), (17) отримуємо, що

$$\exists T = T(R) \quad \forall t \ge T \quad \left\|\tilde{V}(t, y_0)\right\|^2 \le p\frac{a^2(1+\mu)^2}{\delta^2} + \|y_0\|^2 (1+\mu)^{\frac{-2\lambda_{p+1}(k+1)}{\lambda_p}},$$

а отже, виконується умова дисипативності.

Нехай $\left\{y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(n)}\psi_i\right\}$ – довільна обмежена послідовність початкових даних. Якщо відповідні траєкторії не перетинають M, то для довільного $t_n \to \infty$:

$$\tilde{V}\left(t_n, y_0^{(n)}\right) = V\left(t_n, y_0^{(n)}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, будемо розглядати випадок, коли є перетин з M та $\left\|y_0^{(n)}\right\| \le R$.

Тоді

$$\forall i \ge 0 \quad s_i^{(n)} \ge \frac{1}{\lambda_p}\ln(1+\mu),$$

$$y_1^{(n)+} = \sum_{i=1}^{p} c_i'^{(n)}\psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^{(n)} \cdot e^{-\lambda_i s_i^{(n)}}\psi_i.$$

Для $\quad t_n \to \infty \quad \exists k(n) \ge 1, \ k(n) \to \infty, n \to \infty: \ \sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)} \le t_n < \sum_{j=0}^{k(n)+1} s_j^{(n)}$.

Тоді

$$y_{k(n)+1}^{(n)+} = \sum_{i=1}^{p} c_i'^{(n)}\psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^{(n)} \cdot e^{-\lambda_i \sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)}}\psi_i. \tag{18}$$

Так як $k(n) \to \infty$, $0 \le c_i^{(n)\prime} \le \frac{a(1+\mu)}{\delta}$, то з формули (18) по підпослідовності

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{p} c_i'^{(n)}\psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^{(n)} \cdot e^{-\lambda_i \sum_{j=0}^{k(n)} s_j}\psi_i \to \eta = \sum_{i=1}^{p} c_i'\psi_i, \ n \to \infty$$

де $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i' = a(1+\mu)$. Крім того, оскільки $\tau_n = t_n - \sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)} \in \left[0, \frac{1}{\lambda_p}\ln(1+\mu)\right]$, то по підпослідовності $\tau_n \to \tau \in [0, \bar{\tau}]$, $n \to \infty$, де $\bar{\tau}$ визначається з рівності $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a$. Отже, для $\xi_n = \tilde{V}\left(t_n, y_0^{(n)}\right)$ по підпослідовності

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \to V(\tau, \eta) = \sum_{i=1}^{p} e^{-\lambda_i \tau} c_i'\psi_i,$$

що і доводить асимптотичну компактність, а отже, існування глобального атрактора. Крім того, використовуючи формулу (3), отримуємо, що глобальний атрактор складається з граничних точок всіх послідовностей вигляду $\tilde{V}\left(t_n, y_0^{(n)}\right)$, де $\left\{y_0^{(n)}\right\} \subset B_0$, $t_n \to \infty$. Отже,

$$A = \bigcup_{\substack{\tau\in[0,\bar{\tau}],\\ c_i \ge 0}} \left\{\sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \tau}\psi_i\right\} \cup \{0\}, \quad \text{де} \ \sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a, \ \sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i = a(1+\mu).$$

При цьому, якщо $c_i \ge 0$ такі, що $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i = a(1+\mu)$, то рівністю $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a$ момент $\bar{\tau} > 0$ визначається однозначно, для функції $f(t) = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_i e^{-\lambda_i t}: f(0) = a(1+\mu), \ f'(t) < 0, \ \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Доведемо виконання властивості інваріантності (11). Нехай $y_0 \in A \setminus M$. Тоді $y_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \tau}\psi_i,\ \tau \in [0, \overline{\tau})$. Нехай s_0 – момент потрапляння траєкторії, що стартує з y_0, на множину M. Оскільки $V(s_0, y_0) \in M$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \tau} e^{-\lambda_i s_0} = a$, а $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \overline{\tau}} = a$, то $\tau + s_0 = \overline{\tau}$, отже $s_0 = \overline{\tau} - \tau$. Тоді $\forall t \in [0, s_0)$

$$\tilde{V}(t, y_0) = V(t, y_0) = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \tau} e^{-\lambda_i t}\psi_i \in A \setminus M,$$

$$\tilde{V}(s_0, y_0) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} c_i'\psi_i,\ c_i' \geq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i' = a(1+\mu) \right\} \in A \setminus M.$$

Повторюючи попередні міркування на $[s_0, s_0 + s_1), [s_0 + s_1, s_0 + s_1 + s_2)$ і т.д., одержуємо, що $\forall t \geq 0\ \tilde{V}(t, A \setminus M) \subset A \setminus M$.

Тепер нехай $t > 0$ – довільне і $\xi \in A \setminus M$. Тоді $\xi = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \tau}\psi_i,\ \tau \in [0, \overline{\tau})$, причому $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i = a(1+\mu)$ та $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \overline{\tau}} = a$. Якщо $t \in [0, \tau]$, то для $y_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i (\tau - t)}\psi_i \in A \setminus M$ маємо

$$\tilde{V}(t, y_0) = V(t, y_0) = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i (\tau - t)} e^{-\lambda_i t}\psi_i = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \tau}\psi_i = \xi.$$

Отже,

$$\xi \in \tilde{V}(t, y_0) \subset \tilde{V}(t, A \setminus M).$$

Далі, якщо $t > \tau$, то будемо виходити з рівності $t = t - \tau + \tau$ і по кожному $t > \tau$ вибирати $y_0 \in A \setminus M$ так, щоб $\tilde{V}(t - \tau, y_0) \in I(M)$, вибираючи при цьому весь час одні і ті ж імпульсні точки $\sum_{i=1}^{p} c_i \psi_i$, де c_i – з визначення ξ. Наприклад, для $t \in [\tau, \tau + \overline{\tau}]$ покладемо $y_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i (\overline{\tau} - (t - \tau))}\psi_i \in A \setminus M$.

Тоді $V(t - \tau, y_0) = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i (\overline{\tau} - (t - \tau))} e^{-\lambda_i (t - \tau)}\psi_i = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{-\lambda_i \overline{\tau}}\psi_i \in M$. Оскільки для $y_1^+ = \sum_{i=1}^{p} c_i \psi_i \in IM \quad V(\tau, y_1^+) = \xi$, то

$$\xi = \tilde{V}(\tau, y_1^+) \subset \tilde{V}(\tau, \tilde{V}(t - \tau, y_0)) = \tilde{V}(t, y_0) \subset \tilde{V}(t, A \setminus M),$$

що й потрібно було довести. **Теорему доведено.**

Висновки. Розглянуто якісну поведінку однієї нескінченновимірної динамічної системи без єдиності. Знайдено явну формулу глобального атрактору цієї динамічної системи та на основі одержаної формули, доведено виконання властивості інваріантності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Перестюк М. О., Капустян О. В. Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем // Доповіді НАН України. – 2015. – № 12. – С. 13–17
2. Рожко В. Ф. Устойчивость по Ляпунову в розрывных динамических системах // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 6. – С. 1005–1012.
3. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.,1987.
4. Bonotto E. M. Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol.332. – P. 81–96.
5. Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R. Global attractors for impulsive dynamical systems // J. Diff. Eqn. – 2015. – Vol. 259, № 7. – P. 2602–2625.
6. Kaul S. K. Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems //J. Appl. Stoch. Anal. – 1994. – Vol.7, № 4. – P. 509–523.
7. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. Long-time behaviour of evolution inclusion withnon-dumped impulsive effects // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2012. – Vol.56. – P. 89–113.
8. Ciesielski K. On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol.52. – P. 81–91.
9. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics // New York: Springer. – 1988.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.16

Романюк И., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ГЛОБАЛЬНЫЙ АТРАКТОР ДЛЯ ОДНОЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе методами теории глобальных аттракторов исследуется качественное поведение одной бесконечномерной импульсной динамической системы без единственности. Доказано существование глобального аттрактора, установлен его явный вид и свойство инвариантности

Romaniuk I., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv

GLOBAL ATTRACTOR FOR ONE MULTIVALUED IMPULSIVE DYNAMICAL SYSTEM

In this paper, using the theory of global attractors was studied the qualitative behavior of one infinite-dimensional impulsive dynamical system without uniqueness. Was proved existence of the global attractor, found his explicit form and invariance condition.