Оскільки множина $\wp$, є щільною в $W_1^2$, то з останньої нерівності випливає, що для довільного $\varphi \in W_1^2$ виконується рівність

$$\int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau \varphi(\tau)\rangle + \lambda \langle u(\tau), \varphi(\tau)\rangle\right) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, \varphi\rangle d\tau - \int_0^t \langle f, \varphi\rangle d\tau = 0,$$

яка означає, що елемент $u \in W_1^2$ є розв'язком системи (1). Теорему 1 доведено.

**Висновки.** Одержано апріорні оцінки розв'язків квазілінійної параболічної системи з сингулярними коефіцієнтами за умов форм обмеженості збурюючих коефіцієнтів. Встановлено умови неперервності за Гельдером розв'язків параболічної системи. Доведено існування розв'язку квазілінійної параболічної системи рівнянь (1) в усьому евклідовому просторі $R^l$ за досить загальних умов щодо нелінійності, а саме за умов форм-обмеженості модуля векторфункцій (4), (5), що входять в параболічну систему.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Вишик М. Й. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М. Й. Вишик // Матем. сб. – 1951. – Т. 29(71), №3. – С. 615–676.
2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К.Захариас. – М.:Мир, 1978. – 336 с.
3. Гильберг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гильберг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
4. Дубинский Ю. А., Похожаев С. И. Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений / Ю. А.Дубинский, С. И. Похожаев // Матем. сб. – 1967. – Т. 72(114), №2. – С. 226–236.
5. Коваленко В. Ф., Кухарчук Н. М., Семенов Ю. А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором $\frac{1}{2}\Delta + d\nabla$ /В. Ф. Коваленко, Н. М. Кухарчук, Ю. А. Семенов. – Деп. в УкрНИИНТИ. – Киев, 1985. – №2380-Ук 85.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 579 с.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А.Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 735 с.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л.Лионс. – М: Мир, 1972. – 587 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.15

**Яременко Н., канд. физ.-мат. наук**
**Международный математический центр НАН Украины**

## КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Исследованы квазилинейные параболические системы дифференциальных уравнений в частных производных во всем евклидовом пространстве, установлены новые более слабые условия существования решения таких систем в определенном классе (результаты новые в случае линейных систем и квазилинейного уравнения $N = 1$). Установлено априорные оценки решений квазилинейной системы, рассмотрены ограниченность обобщенных решений и непрерывность по Гельдера, доказана теорема о существовании решения.*

**Yaremenko M., Ph.D**
**International Mathematical Centre of National Academy of Science of Ukraine**

## QUASI-LINEAR PARABOLIC SYSTEM WITH SINGULAR COEFFICIENTS

*In this paper studied quasi-linear parabolic systems of differential equations in whole Euclidean space, we consider new conditions of existence of a weak solution of such systems in some class (this results are new results in the case of linear systems and quasi-linear equations $N = 1$). We obtained a priori estimates of solutions of quasi-linear systems we considered limited generalized solutions and Holder continuity of this solutions, we proved theorem on the existence of the solution.*

**УДК 519.21**

**О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук, Т. Шовкопляс, канд. фіз.-мат. наук**
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**
*e-mail: from_Tatyana@ukr.net*

# ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

***В роботі наведені умови існування узагальненого розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу з випередженням.***

**1. Вступ.** Початковим етапом дослідження стохастичних диференціальних рівнянь є вирішення проблеми існування розв'язків цих рівнянь. Дана проблема є актуальною і становить інтерес для широкого кола науковців. Дослідженню цієї проблематики присвячено багато праць різних авторів. Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу з невипадковою початковою умовою досліджувалися Б. Л. Розовським [3]. Задачі з початковою умовою, залежною від вінерівського процесу, потребують розширеного стохастичного інтегрування. Різні підходи дослідження питання існування розв'язку запропоновані, наприклад, в [6]. У даній статті доведено існування розв'язку методом Гальоркіна для початкової умови, яка має скінчений розклад Вінера-Іто.

**2. Основні позначення.** Нехай $t \in [0, T]$, $T < \infty$; $\lambda$ – міра Лебега на відрізку $[0, T]$, $x \in R^d$, $|\cdot|$ – норма вектора з $R^d$. Через $G$ будемо позначати обмежену область (відкриту зв'язну множину в $R^d$) з кусково-гладкою межею [5], $\partial G$ – межа області $G$, $\lambda_d$ – міра Лебега на $G$:

$$G_T = \{(x, t) : x \in G, t \in (0, T)\}, \ \partial G_T = \{(x, t) : x \in \partial G, t \in [0, T]\}.$$

Надалі в цій статті по парам однакових індексів здійснюється підсумовування в межах від $1$ до $d$ . Позначимо, $u_{x_i} = du/dx_i$ , $i=\overline{1,...,d}$ , $u_s = du/ds$ , $u_x = \left(u_{x_1},\ldots,u_{x_d}\right)$ . Всі похідні розглядаються в узагальненому сенсі [2].

Через $(\cdot,\cdot)_0$ і $(\cdot,\cdot)_{0,0}$ позначено скалярні добутки в $L^2(G)$ і в $L^2(G_T)$ відповідно: $\|f\|_0 = (f,f)_0^{1/2}$ , $W_1^2(G)$ – простір Соболєва функцій $f \in L^2(G)$ , які мають похідну $f_x \in L^2(G)$ ; $(f,g)_1 = (f,g)_0 + \left(f_{x_k}, g_{x_k}\right)_0$ , $\|f\|_1 = (f,f)_1^{1/2}$ – скалярний добуток і норма елементів в $W_1^2(G)$ ; $\overset{\circ}{W}{}_1^2(G) = W_{1,0}^2(G_T) \cap \left\{ f : f|_{\partial G_T} = 0 \right\}$ .

$W_{1,0}^2(G_T)$ – простір Соболєва функцій $f \in L^2(G_T)$ з похідними $f_x \in L^2(G_T)$ і скалярним добутком $(f,g)_{1,0} = (f,g)_{0,0} + \left(f_{x_k}, g_{x_k}\right)_{0,0}$ ; $\overset{\circ}{W}{}_{1,0}^2(G_T) = W_{1,0}^2(G_T) \cap \left\{ f : f|_{\partial G_T} = 0 \right\}$ .

$W_{1,1}^2(G_T)$ – простір Соболєва функцій $f \in L^2(G_T)$ , що мають похідні $f_x \in L^2(G_T)$ та $f_s \in L^2(G_T)$ , та скалярний добуток в $W_{1,1}^2(G_T)$ : $(f,g)_{1,1} = (f_s, g_s)_{0,0} + (f,g)_{1,0}$ ; $\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^2(G_T) = W_{1,1}^2(G_T) \cap \left\{ f : f|_{\partial G_T} = 0 \right\}$ .

Нехай $(\Omega, \Im, P)$ – канонічний ймовірностний простір; $\mathrm{w}(t),\, t \in [0,T]$ – вінерівський процес, заданий на ньому. Це означає, що $\Omega = C_0([0,T])$ , $\Im = \overline{B}^P(\Omega)$ , $P$ – вінерівська міра на $\Im$ , а $W(t,\omega) = \omega(t)$ ; $\|F\|_2 = \left(\mathrm{E}|F|^2\right)^{1/2}$ .

Позначимо через $I_n(f_n)$ , $f_n \in L^2\left([0,T]^n\right)$ – кратний стохастичний інтеграл Вінера-Іто; $D_s F,\, s \in [0,T],$ – стохастична похідна випадкової величини $F = F(W)$ ; $D^k_{s_1,s_2,\ldots,s_k} F = D_{s_1} D_{s_2} \ldots D_{s_k} F,\, k \in \mathrm{N}$ .

$\mathrm{D}^{k,p}$ , $k \in \mathrm{N},\ p > 1,$ – банахів простір тих випадкових величин $F$ , для яких існує і скінченна норма

$$\|F\|_{k,p} = \left( \mathrm{E}\left(|F|^p\right) + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{E}\left\|D^j F\right\|^p_{L^2\left([0,T]^j\right)} \right)^{1/p} .$$

$$\mathrm{L}^{k,p} = \left(L^p\left([0,T];\ \mathrm{D}^{k,p}\right), k \in \mathrm{N},\ p>1;\ \|u\|_{L^{k,p}} = \left( \int_0^T \|u(s)\|^p_{k,p}\, ds \right)^{1/p} .$$

Через $\overset{\circ}{SV}$ будемо позначати банахів простір, який складається з таких елементів $L^2\left([0,T]\times\Omega; \overset{\circ}{W}{}_1^2(G)\right)$, що мають скінченну норму: $\|f\|_{\overset{\circ}{SV}} = \underset{0 \le t \le T}{ess\sup} \left( \mathrm{E}\| f(\cdot,t,\cdot)\|_0^2 \right)^{1/2} + \left( \mathrm{E} \int_{G_T} |f_x(x,s,\cdot)|^2 dxds \right)^{1/2}$ . Під $\int_0^t u(s) dw(s),\quad 0 \le t \le T$ розуміємо невизначений розширений стохастичний інтеграл Скорохода [4, 7].

Нехай $a_{ij}(x,t)$ , $b_i(x,t)$ , $(x,t) \in G_T, i,j = \overline{1,d}$ ; $\phi(x,\omega)$ , $(x,\omega) \in G \times \Omega$ – задані функції. Надалі, з метою спрощення записів, аргументи функцій можуть опускатися, якщо це не призводить до неоднозначності, наприклад, $a_{ij} \equiv a_{ij}(x,t)$ , $b_i \equiv b_i(x,t)$ , $\phi \equiv \phi(x) \equiv \phi(x,\omega)$ , $u \equiv u(t) \equiv u(x,t) \equiv u(x,t,\omega)$ , $u_{x_i} \equiv u_{x_i}(x,t,\omega)$ , $i,j = \overline{1,d}$ , і т. п.

**3. Формулювання задачі.** Розглянемо рівняння

$$u(x,t) = \phi(x) + \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} ds + \int_0^t b_i u_{x_i} dw(s) . \tag{1}$$

**Означення.** Узагальненим розв'язком першої крайової задачі для рівняння (1) в циліндрі $G_T$ з умовами $u\big|_{t=0} = \phi$ , $u\big|_{\partial G_T} = 0$ , називається такий елемент $u \in \overset{\circ}{SV}$ , що для всіх $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ співвідношення

$$\left(u(t),\eta\right)_0 = (\phi,\eta)_0 - \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}, \eta_{x_j}\right)_0 ds + \int_0^t \left(b_i u_{x_i}, \eta\right)_0 dw(s) \tag{2}$$

виконується $(\lambda \times P)$ – майже напевно на $[0,T]\times\Omega$ .

Знайдемо умови існування розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1).

**4. Припущення.** Сформулюємо припущення, які будуть використані у подальшому.

A) $\left|a_{ij}(x,t)\right| + \left|b_i(x,t)\right| \le K < \infty, (x,t) \in G_T$ ;

B) $\delta|\xi|^2 \le 2a_{ij}(x,t)\xi_i\, \xi_j - \left|\sum_{i=1}^{d} b_i(x,t)\xi_i\right|^2$ , $\xi \in R^d$ , $\delta > 0, (x,t) \in G_T$ ;

C) $\phi(x,\omega) = \sum_{n=0}^{M} I_n\left(\phi_n(x,\cdot)\right)$ , $\phi_n \in L^2\left(G \times [0,T]^n\right)$ $M < \infty.$

**5. Основний результат.** Узагальнений розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1) будемо шукати наближеним методом Гальоркіна. Нехай $\left\{\psi^k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ складає таку фундаментальну систему в $\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$, що $\left(\psi^k,\psi^l\right)_0=\delta_{kl}$ [1, 2]. Покладемо $u^N(x,t,\omega)=\sum\limits_{k=1}^{N}c_k^N(t,\omega)\,\psi^k(x)$. Функції $c_k^N(t,\omega)=\left(u^N(t),\psi^k\right)_0$, $k=\overline{1,N}$, знаходяться з системи

$$\left(u^N(t),\psi^k\right)_0=\left(\phi,\psi^k\right)_0-\int_0^t\left(a_{ij}u^N_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 ds+\int_0^t\left(b_i u^N_{x_i},\psi^k\right)_0 dw(s). \qquad (3)$$

Система (3) становить систему лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} dC_N(t)=A_N(t)C_N(t)dt+B_N(t)C_N(t)d\omega(t),\\ C_N(0)=\phi_N,\end{cases}$$

де $C_N(t)=\left(c_1^N(t),...,c_N^N(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик розв'язку; $A_N(t)=\left\{\tilde a_{kl}(t)\right\}_{k,l=1}^{N}$, $\tilde a_{kl}(t)=\left(a_{ij}(t)\psi^l_{x_i}\psi^k_{x_j}\right)_0$; $B_N(t)=\left\{\tilde b_{k,l}(t)\right\}_{k,l=1}^{N}$, $\tilde b_{kl}(t)=\left(b_i(t)\psi^l_{x_i},\psi^k\right)_0$ – матриці коефіцієнтів; $\phi_N=\left(\left(\phi,\psi^1\right)_0,...,\left(\phi,\psi^N\right)_0\right)^T$ – вектор-стовпчик початкових умов. Покажемо, що $\sup\limits_{N\in\mathrm{N}}\left\|u^N\right\|_{\overset{\circ}{SV}}<\infty$.

**Лема.** Нехай виконуються умови A), B) і C). Тоді існує така стала $L_M<\infty$, що

$$\sup_{0\le t\le T}\mathrm{E}\left\|u^N(t)\right\|_0^2+\int_0^T\mathrm{E}\left\|u^N(s)\right\|_1^2 ds\le L_M\left(\mathrm{E}\|\phi\|_0^2+\sum_{k=1}^{M}\int\limits_{\Delta_k(T)}\mathrm{E}\left\|D^k_{s_1...s_k}\phi\right\|_0^2 ds_1...ds_k\right), \qquad (4)$$

де за $\Delta_k(T)=\left\{(s_1,...,s_k):0\le s_1\le...\le s_k\le T\right\}$ позначено симплекс розмірності $k$, $k=\overline{1,M}$.

**Зауваження.** Для $M=0$ в правій частині (4) залишається лише перший доданок.

**Доведення.** Доведення леми проведемо індукцією за порядком хаосу $M$. При $M=0$ початкова умова $\phi(x)$ не випадкова. Для цього випадку в [3] встановлено таку нерівність:

$$\mathrm{E}\left\|u^N(t)\right\|_0^2+\delta_1\int_0^t\mathrm{E}\left\|u^N(s)\right\|_1^2 ds\le\mathrm{E}\|\phi\|_0^2+\delta_1\int_0^t\mathrm{E}\left\|u^N(s)\right\|_0^2 ds+\varepsilon^{-1}\int_0^T\mathrm{E}\left\|D_s^-u_N(s)\right\|_0^2 ds.$$

Отже, для $M=0$ твердження леми справедливе. Припустимо, що оцінка (4) справедлива у випадку, коли порядок хаосу у розкладі $\phi(x)$ не більший за $M$. Покажемо, що (4) має місце і для $M+1$, тобто, для $\phi(x)=\sum\limits_{n=0}^{M+1}I_n\left(\phi_n(x,\,\cdot\,)\right)$. З цією метою покажемо спочатку, що

$$\|\tilde u\|_{\overset{\circ}{SV}}<\infty. \qquad (5)$$

Для цього застосуємо до процесу $\left\|u^N(t)\right\|_0^2=\left|C_N(t)\right|^2=\sum\limits_{k=1}^{N}\left(c_k^N(t)\right)^2$ формулу Іто [7]. Це можливо, оскільки $C_N\in L^{k,p}$ для $k,N\in\mathrm{N}$, $p>1$ [5, 8].

За формулою Іто маємо рівність:

$$\left\|u^N(t)\right\|_0^2=\left\|\phi^N\right\|_0^2+\int_0^t\left\{-2\left(a_{ij}u^N_{x_i},u^N_{x_j}\right)_0+\left\|b_iu^N_{x_i}\right\|_0^2+2\left(D_s^-u^N(s),\psi^k\right)_0\left(b_iu^N_{x_i},\psi^k\right)_0\right\}ds+$$
$$+\int_0^t\left(u^N(s),\psi^k\right)_0\left(b_iu^N_{x_i},\psi^k\right)_0 dw(s),$$

де $\phi^N=\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\phi,\psi^k\right)_0\psi^k$, а $D_t^-u^N(t)$, $t\in[0,T]$, визначається так:

$$\left(D_t^-u^N(t),\psi^k\right)_0=\left(D_t\,\phi,\psi^k\right)_0-\int_0^t\left(a_{ij}(s)D_tu^N_{x_i}(s),\psi^k_{x_j}\right)_0 ds+\int_0^t\left(b_i(s)D_tu^N_{x_i}(s),\psi^k\right)_0 dw(s),\ t\in[0,T]. \qquad (6)$$

Враховуючи те, що $2ab\le\varepsilon^{-1}a^2+\varepsilon b^2$ для $\varepsilon>0$, будемо мати:

$$\mathrm{E}\left\|u^N(t)\right\|_0^2\le\mathrm{E}\|\phi\|_0^2+\mathrm{E}\int_0^t\left\{-2\left(a_{ij}u^N_{x_i},u^N_{x_j}\right)_0+(1+\varepsilon)\left\|b_iu^N_{x_i}\right\|_0^2+\varepsilon^{-1}\left\|D_s^-u^N(s)\right\|_0^2\right\}ds.$$

Звідси, за рахунок умови B), випливає існування таких $\varepsilon_0>0$ і $\delta_1>0$, що при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ виконується нерівність:

$$\mathrm{E}\left\|u^N(t)\right\|_0^2\le\mathrm{E}\|\phi\|_0^2+\mathrm{E}\int_0^t\left\{-2\left(a_{ij}u^N_{x_i},u^N_{x_j}\right)_0+(1+\varepsilon)\left\|b_iu^N_{x_i}\right\|_0^2+\varepsilon^{-1}\left\|D_s^-u^N(s)\right\|_0^2\right\}ds. \qquad (7)$$

Нерівність (5) випливає з нерівності (7) та леми Гронуолла-Беллмана [3]. Оцінимо $\mathrm{E}\left\|D_t^- u_N(t)\right\|_0^2$. Для цього покладемо

$$\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k\right)_0 = \left(D_t u_N(\tau), \psi^k\right)_0 - \mathrm{I}_0^\tau(t)\left(b_i(t) u_{x_i}^N(t), \psi^k\right)_0, \quad \tau \in [0, t]. \tag{8}$$

Враховуючи властивості інтегралу Скорохода [7], маємо:

$$\left(D_t u_N(\tau), \psi^k\right)_0 = \left(D_t \phi, \psi^k\right)_0 + \mathrm{I}_0^\tau(t)\left(b_i(t) u_{x_i}^N(t), \psi^k\right)_0 - \int_0^\tau \left(a_{ij} D_t u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k\right)_0 ds + \int_0^\tau \left(b_i D_t u_{x_i}^N, \psi^k\right)_0 dw(s), \tau \in [0, t],$$

для $\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k\right)_0$, $k \in \overline{1, N}$, $\tau \in [0, t]$, отримаємо рівняння

$$\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k\right)_0 = \left(D_t \phi, \psi^k\right)_0 - \int_0^\tau \left(a_{ij} D_t^- u_{x_i}^N(s), \psi_{x_j}^k\right)_0 ds + \int_0^\tau \left(b_i D_t^- u_{x_i}^N(s), \psi^k\right)_0 dw(s), \tau \in [0, t]. \tag{9}$$

Враховуючи, що в силу (8) праві частини (6) та (9) при $t = \tau$ співпадають, ми прийшли до того, що $\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k\right)_0 = \left(D_t^- u_N(t), \psi^k\right)_0\Big|_{t=\tau}$. Але форма рівняння (9) співпадає з (3), а порядок хаосу дорівнює $M$, оскільки $D_t^- u_N(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, справедлива оцінка (4), а відтак

$$\mathrm{E}\left\|D_t^- u^N(t)\right\|_0^2 \le \sup_{0 \le \tau \le t} \mathrm{E}\left\|D_t^- u^N(\tau)\right\|_0^2 \le L_M\left(\mathrm{E}\left\|D_t \phi\right\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(t)} \mathrm{E}\left\|D_{s_1 \ldots s_k}^k D_t \phi\right\|_0^2 ds_1 \ldots ds_k\right) =$$

$$= L_M\left(\mathrm{E}\left\|D_t \phi\right\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(t)} \mathrm{E}\left\|D_{s_1 \ldots s_k}^{k+1} D_t \phi\right\|_0^2 ds_1 \ldots ds_k\right). \tag{10}$$

З (5) і (10) випливає

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathrm{E}\left\|u^N(t)\right\|_0^2 + \int_0^T \mathrm{E}\left\|u^N(s)\right\|_1^2 ds \le K\left(\mathrm{E}\|\phi\|_0^2 + \int_0^T L_M\left(\mathrm{E}\left\|D_t \phi\right\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(t)} \mathrm{E}\left\|D_{s_1 \ldots s_k}^{k+1} \phi\right\|_0^2 ds_1 \ldots ds_k\right) dt\right) \le$$

$$\le L_{M+1}\left(\mathrm{E}\|\phi\|_0^2 + \sum_{k=1}^{M+1} \int_{\Delta_k(t)} \mathrm{E}\left\|D_{s_1 \ldots s_k}^k D_t \phi\right\|_0^2 ds_1 \ldots ds_k\right).$$

Лему доведено.

**Теорема.** Нехай виконуються умови A), B) і C). Тоді перша крайова задача для рівняння (1) має узагальнений розв'язок.

**Доведення.** З леми випливає, що елементи послідовності $\left\{u^N\right\}_{N=1}^\infty$ належать простору $\overset{\circ}{SV}$ і при цьому $\sup_{N \in \mathrm{N}} \left\|u^N\right\|_{\overset{\circ}{SV}} < \infty$. Враховуючи властивості простору $\overset{\circ}{SV}$, з послідовності $\left\{u^N\right\}_{N=1}^\infty$ можна виділити підпослідовність $\left\{u^{N_m}\right\}_{m=1}^\infty$, яка буде слабо збігатися в $L^2\left([0, T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}{}_1^2(G)\right)$ до деякого граничного елементу $\tilde{u} \in L^2\left([0, T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}{}_1^2(G)\right)$ такого, що $\|\tilde{u}\|_{\overset{\circ}{SV}} < \infty$. Надалі, для спрощення записів, будемо цю послідовність також позначати $\left\{u^N\right\}_{N=1}^\infty$.

Покажемо, що граничний елемент $\tilde{u}$ буде задовольняти означенню узагальненого розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1). Обгрунтуємо граничний перехід в (3) $(P \times \lambda)$ – майже напевно.

Нехай $\alpha \in L^\infty([0, T]) \cap L^1([0, T])$; $f \in C_b^\infty\left(R^n\right)$, $h_k \in C_0^\infty([0, T])$, $k = \overline{1, n}$, $n \in N$,

$$F = f\left(\int_0^T h_1(s) dw(s), \ldots, \int_0^T h_n(s) dw(s)\right).$$

Множина таких $F$ щільна в $D^{1,2}$, а відтак і в $L^2(\Omega)$. Враховуючи властивість стохастичного інтегралу, з (3) випливає:

$$\mathrm{E}\int_0^T \alpha(t) F\left(u^N(t), \psi^k\right)_0 dt = \mathrm{E}\int_0^T \alpha(t) F\left(\phi, \psi^k\right)_0 dt - \mathrm{E}\int_0^T \alpha(t) F \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k\right)_0 ds dt +$$

$$+\mathrm{E}\int_0^T \alpha(t) \int_0^t \left(D_s F\right)\left(b_i u_{x_i}^N, \psi^k\right)_0 ds dt. \tag{11}$$

Зі слабкої збіжності $\left\{u^N\right\}_{N=1}^\infty$ до $\tilde{u}$ випливає: $\lim_{N \to \infty} \mathrm{E}\int_0^T \alpha(t) F\left(u^N(t), \psi^k\right)_0 dt = \mathrm{E}\int_0^T \alpha(t) F\left(\tilde{u}(t), \psi^k\right)_0 dt.$

Оскільки $\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\mathrm{E}F\int\limits_0^t\left(a_{ij}u^N_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 dsdt\right|<M$ для деякого $M<\infty$ і $\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{E}\int\limits_0^t\left(a_{ij}u^N_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 ds=\mathrm{E}\int\limits_0^t\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 ds$ , то, враховуючи теореми Лебега і Фубіні, маємо:

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)F\int\limits_0^t\left(a_{ij}u^N_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 dsdt=\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)F\int\limits_0^t\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 dsdt.$$

З аналогічних міркувань маємо: $\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)\int\limits_0^t(D_sF)\left(b_iu^N_{x_i},\psi^k\right)_0 dsdt=\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)\int\limits_0^t(D_sF)\left(b_i\tilde{u}_{x_i},\psi^k\right)_0 dsdt.$ Остаточно отримаємо:

$$\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)F\left(\tilde{u}(t),\psi^k\right)_0 dt=\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)F\left(\phi,\psi^k\right)_0 dt-\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)F\int\limits_0^t\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 dsdt+\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)\int\limits_0^t(D_sF)\left(b_i\tilde{u}_{x_i},\psi^k\right)_0 dsdt\,. \quad (12)$$

Покажемо тепер, що процес $\left\{\mathrm{I}_{[0,t]}(s)\left(b_i\tilde{u}_{x_i}(s),\,\psi^k\right)_0,\,0\le s\le T\right\}$ належить області визначення стохастичного інтегралу для майже всіх $t\in[0,T]$ по мірі Лебега. З (12) випливає, що майже для всіх $t\in[0,T]$ виконується рівність:

$$\mathrm{E}\int\limits_0^t(D_sF)\left(b_i\tilde{u}_{x_i},\psi^k\right)_0 ds=\mathrm{E}F\left(\tilde{u}(t),\psi^k\right)_0-\mathrm{E}F\left(\phi,\psi^k\right)_0+\mathrm{E}F\int\limits_0^t\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 ds\,. \quad (13)$$

Враховуючи нерівність Коші і те, що $\tilde{u}\in\overset{\circ}{SV}$ , легко отримати оцінки:

$$\left|\mathrm{E}F\left(\phi,\psi^k\right)_0\right|\le L\|F\|_2,\ \underset{0\le t\le T}{ess\sup}\left|\mathrm{E}F\left(\tilde{u}(t),\psi^k\right)_0\right|\le L\|F\|_2,\ \underset{0\le t\le T}{ess\sup}\left|\mathrm{E}F\int\limits_0^t\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 ds\right|\le L\|F\|_2\,.$$

Звідси, враховуючи (13), маємо:

$$\underset{0\le t\le T}{ess\sup}\left|\mathrm{E}\int\limits_0^t(D_sF)\left(b_i\tilde{u}_{x_i},\psi^k\right)_0 ds\right|\le L\|F\|_2\,. \quad (14)$$

Нерівність (14) означає, що майже для всіх $t\in[0,T]$ по мірі Лебега процес $\left\{\mathrm{I}_{[0,t]}(s)\left(b_i\tilde{u}_{x_i}(s),\,\psi^k\right)_0,\,0\le s\le T\right\}$ належить області визначення стохастичного інтегралу Скорохода, тому, звідси (12) можна записати у вигляді

$$\mathrm{E}\int\limits_0^T\alpha(t)F\left\{\left(\tilde{u}(t),\psi^k\right)_0-\left(\phi,\psi^k\right)_0-\int\limits_0^t\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_i},\psi^k_{x_j}\right)_0 ds+\int\limits_0^t\left(b_i\tilde{u}_{x_i},\psi^k\right)_0 dw(s)\right\}dt=0\,. \quad (15)$$

Для закінчення доведення того, що $\tilde{u}$ задовольняє означенню, залишається зробити два зауваження. По-перше, $\psi^k$ можна замінити на $\eta^M=\sum\limits_{k=1}^M c_k\psi^k,\ c_k=const,\,k=1,...,M$ . По-друге, кожний елемент $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ може бути наближений в нормі $\|\cdot\|_1$ послідовністю виду $\left\{\eta^M\right\}_{M=1}^\infty$. При цьому граничний перехід в співвідношенні (12) в результаті заміни $\psi^k$ на $\eta^M$ при $M\to\infty$ , обґрунтовується цілком аналогічно тому, як це було зроблено в (11) при $N\to\infty$ . В результаті будемо мати (15), де $\psi^k$ буде замінено на довільний елемент $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$. Теорему доведено.

**ВИСНОВКИ.** В статті доведено існування узагальненого розв'язку першої крайової задачі для стохастичного диференціального рівняння в частинних похідних параболічного типу. Початкова умова задачі становить випадковий елемент, який має скінченний розклад Вінера-Іто. Стохастичним інтегралом обрано інтеграл Скорохода. Доведення проводиться методом Гальоркіна. Основне припущення щодо коефіцієнтів рівняння складає сильна параболічність.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. Никольский С. М.. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. - М.: Наука, 1969. – 480с.
3. Розовский . Б. Л.. Эволюционные стохастические системы. - М.: Наука, 1983..– 208с.
4. Скороход А. В. Об одном обобщении стохастического интеграла. – Теория вероятностей и применение, № 2, вып. 20, 1975. – С. 223–237.
5. Buckdahn R., Nualart D. Linear stochastic differential equations and Wick products // Probab. Theory Relat. Fields, 99, 501–526, 1994.
6. Mohammed S.-E. A., Zhang T. The substitution theorem for semilinear stochastic partial differential equations // Journal of Functional Analysis, 253:1, 2007. – P. 122–157.
7. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics, Springer, 1995. – 266 p.
8. Watanabe S. Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin calculus. – Tata Institute of Fundamental Research, 1984. – 448 p.

**Стаття надійшла до редколегії 05.11.15**

**Ильченко А., канд. физ.-мат. наук, Шовкопляс Т., канд. физ.-мат. наук,**
**КНУ имени Тараса Шевченко**

## СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТИЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

*В данной работе сформулированы условия существования обобщенного решения стохастических дифференциальных уравнений в частичных производных параболического типа с опережением.*

Ilchenko A., PhD, Shovkoplyas T., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv

## THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF ANTICIPATING PARTIAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

*In this paper, conditions for existence of the generalized solution of anticipating partial stochastic differential equations of parabolic type are offered.*

**УДК 517.5+517.13+511.72**

**С. Сербенюк, мол. наук. співр.,**
**Інститут математики НАН України**
*e-mail:simon6@ukr.net*

# НЕГА-$\tilde{Q}$-ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕЯКИХ ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

***У даній статті побудовано нега-$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел, яке є узагальненням представлення чисел знакопочережними рядами Кантора. Для моделювання нега-$\tilde{Q}$-представлення використовується аналітичний та геометричний підходи. Недоліки та переваги кожного із способів досліджено, шукане представлення змодельовано.***

**1. Вступ.** Нехай заданою є матриця $\tilde{Q} = \left\| q_{i,j} \right\|$, де $i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in N^0_\infty = N \cup \{0, \infty\}$, $j = 1, 2, \ldots$, для якої справедливою є наступна система властивостей:

$$\begin{cases} 1.\ 0 < q_{i,j} \in R; \\ 2.\ \forall j \in N : \sum\limits_{i=0}^{m_j} q_{i,j} = 1; \\ 3.\ \forall (i_j), i_j \in N \cup \{0\} : \prod\limits_{j=1}^{\infty} q_{i_j, j} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

**Лема 1 [1, с. 88].** *Для будь-якого* $x \in [0;1)$ *існує послідовність* $(i_k(x))$, $i_k(x) \in N^0_{m_k} \equiv \{0, 1, \ldots, m_k\}$, *така, що*

$$x = a_{i_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[ a_{i_k(x),k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x),j} \right], \qquad (2)$$

*де*

$$a_{i_k(x),k} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{i_k - 1} q_{i,k}, \text{ якщо } i_k \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } i_k = 0. \end{cases}$$

**Означення 1.** Подання числа $x \in [0;1)$ у вигляді розкладу (2) називають [1, с.89] *$\tilde{Q}$-представленням* (або *$\tilde{Q}$-розкладом) числа* $x \in [0;1)$ і позначають $x = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}$. Останній запис називають *$\tilde{Q}$-зображенням числа* $x$.

$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел, очевидно, є узагальненням представлення дійсних чисел знакододатними рядами Кантора [4, 10]

$$x = \Delta^D_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots} \equiv \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} + \ldots,$$

де $(d_n)$ – фіксована послідовність натуральних чисел $d_n$, більших $1$, $\left(A_{d_n}\right)$ – послідовність алфавітів $A_{d_n} \equiv \{0, 1, \ldots, d_n - 1\}$, $\varepsilon_n \in A_{d_n}$. Останні ряди, в свою чергу, є узагальненням класичного $s$-го представлення

$$x = \Delta^s_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n}, \alpha_n \in A \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\},$$

де $1 < s$ – фіксоване натуральне число. Взагалі кажучи, поняття про $s$-ві розклади дійсних чисел, де $1 < s$ - довільне фіксоване, було введене в [10] Rényi як частинний випадок $f$-зображення дійсних чисел, а саме: зображення чисел нескінченним ітеруванням додатної функції $f(x) = x / s$ при $0 \le x \le s$ та $f(x) = 1$ при $s < x$. Подібними до властивостей $s$-розкладів є властивості $(-s)$-розкладів, які, здається, вперше [6] зустрічаються у роботі [8], де розглядається випадок фіксованої основи $-2 \ge -s \in Z$. Загалом, дослідженням властивостей $s$- і $(-s)$-розкладів (з довільною фіксованою основою $(-s) < -1$) дійсних чисел займалося чимало математиків [1, 3, 4, 6–10]. Серед них: Ambrož P., Frougny Ch., Masáková Z., Pelantová E., Ito S., Sadahiro T., Rényi A., Solomyak B., Lai A. Ch. Деякі з їх робіт