Ilchenko A., PhD, Shovkoplyas T., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF ANTICIPATING PARTIAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

In this paper, conditions for existence of the generalized solution of anticipating partial stochastic differential equations of parabolic type are offered.

УДК 517.5+517.13+511.72

С. Сербенюк, мол. наук. співр.,
Інститут математики НАН України
e-mail:simon6@ukr.net

НЕГА-$\tilde{Q}$-ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕЯКИХ ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

У даній статті побудовано нега-$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел, яке є узагальненням представлення чисел знакопочережними рядами Кантора. Для моделювання нега-$\tilde{Q}$-представлення використовується аналітичний та геометричний підходи. Недоліки та переваги кожного із способів досліджено, шукане представлення змодельовано.

1. Вступ. Нехай заданою є матриця $\tilde{Q}=\|q_{i,j}\|$, де $i=\overline{0,m_j}$, $m_j\in N_\infty^0=N\cup\{0,\infty\}$, $j=1,2,...$, для якої справедливою є наступна система властивостей:

$$\begin{cases} 1.\ 0<q_{i,j}\in R; \\ 2.\ \forall j\in N: \sum\limits_{i=0}^{m_j} q_{i,j}=1; \\ 3.\ \forall (i_j),\, i_j\in N\cup\{0\}: \prod\limits_{j=1}^{\infty} q_{i_j,j}=0. \end{cases} \tag{1}$$

Лема 1 [1, с. 88]. *Для будь-якого* $x\in[0;1)$ *існує послідовність* $(i_k(x))$, $i_k(x)\in N_{m_k}^0\equiv\{0,1,...,m_k\}$, *така, що*

$$x=a_{i_1(x),1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{i_k(x),k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{i_j(x),j}\right], \tag{2}$$

де

$$a_{i_k(x),k}=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{i_k-1}q_{i,k},\ \text{якщо}\ i_k\neq 0;\\ 0,\ \text{якщо}\ i_k=0.\end{cases}$$

Означення 1. Подання числа $x\in[0;1)$ у вигляді розкладу (2) називають [1, с.89] $\tilde{Q}$*-представленням* (або $\tilde{Q}$*-розкладом) числа* $x\in[0;1)$ і позначають $x=\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)...}$. Останній запис називають $\tilde{Q}$*-зображенням числа* x.

$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел, очевидно, є узагальненням представлення дійсних чисел знакододатними рядами Кантора [4, 10]

$$x=\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\equiv\frac{\varepsilon_1}{d_1}+\frac{\varepsilon_2}{d_1d_2}+...+\frac{\varepsilon_n}{d_1d_2...d_n}+...,$$

де (d_n) – фіксована послідовність натуральних чисел d_n, більших 1, (A_{d_n}) – послідовність алфавітів $A_{d_n}\equiv\{0,1,...,d_n-1\}$, $\varepsilon_n\in A_{d_n}$. Останні ряди, в свою чергу, є узагальненням класичного s-го представлення

$$x=\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{s^n},\ \alpha_n\in A\equiv\{0,1,...,s-1\},$$

де $1<s$ – фіксоване натуральне число. Взагалі кажучи, поняття про s-ві розклади дійсних чисел, де $1<s$ - довільне фіксоване, було введене в [10] Rényi як частинний випадок f-зображення дійсних чисел, а саме: зображення чисел нескінченним ітеруванням додатної функції $f(x)=x/s$ при $0\le x\le s$ та $f(x)=1$ при $s<x$. Подібними до властивостей s-розкладів є властивості $(-s)$-розкладів, які, здається, вперше [6] зустрічаються у роботі [8], де розглядається випадок фіксованої основи $-2\ge -s\in Z$. Загалом, дослідженням властивостей s- і $(-s)$-розкладів (з довільною фіксованою основою $(-s)<-1$) дійсних чисел займалося чимало математиків [1, 3, 4, 6–10]. Серед них: Ambrož P., Frougny Ch., Masáková Z., Pelantová E., Ito S., Sadahiro T., Rényi A., Solomyak B., Lai A. Ch. Деякі з їх робіт (наприклад, [6, 9]) присвячені порівняльному аналізу властивостей цих розкладів. Чималу увагу було приділено вивченню арифметичних операцій на таких розкладах, їх операторів зсуву, властивостей множин спеціального виду, на s – чи $(-s)$ -розклади елементів яких накладалися певні умови, і т. д.

З метою побудови нових об'єктів теорій неперервних ніде недиференційовних функцій, сингулярних функцій, теорії ймовірностей та фрактального аналізу змоделюємо представлення, яке є узагальненням нега- s -го представлення

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{(-s)^n}\equiv\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}=x\in\left[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}\right],\ \alpha_n\in A,$$

і представлення дійсних чисел знакопочережним рядом Кантора (нега-D-представлення) [3, 11]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{d_1d_2...d_n}\equiv\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}=x\in\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{2k-1}-1}{d_1d_2...d_{2k-1}};\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{2k}-1}{d_1d_2...d_{2k}}\right],\ \varepsilon_n\in A_{d_n},$$

та дослідимо основні властивості як системи числення побудованого представлення.

У даній статті досліджуються слідуючі розклади дійсних чисел

$$-a_{i_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n a_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{i_j,j}\right] \quad (3)$$

та

$$\sum_{i=0}^{i_1-1}q_{i,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\tilde{\delta}_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right), \quad (4)$$

де

$$\tilde{q}_{i_n,n}=\begin{cases}q_{i_n,n},\ якщо\ n-непарне;\\ q_{m_n-i_n,n},\ \text{якщо}\ n-парне,\end{cases}\qquad \tilde{\delta}_{i_n,n}=\begin{cases}0,\ якщо\ i_n=0\ та\ n-непарне;\\ \sum_{i=0}^{i_n-1}q_{i,n},\ якщо\ i_n\neq 0\ та\ n-непарне;\\ \sum_{i=m_n-i_n}^{m_n}q_{i,n},\ якщо\ n-парне.\end{cases}$$

2. Дослідження ряду (3) як представлення дійсних чисел. Ряд (3) можна побудувати, використовуючи аналітичний підхід до побудови системи числення. Суть аналітичного підходу до побудови знакопочережного $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел полягає в тому, що якщо основою нега-s-го представлення є фіксоване число $(-s)$, де $1<s\in N$, та за основу представлення чисел знакопочережним рядом Кантора приймається фіксована послідовність $(-d_n)$, де $1<d_n\in N$, то знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення можна побудувати, прийнявши за основу системи числення (представлення дійсних чисел) фіксовану матрицю $(-1)\cdot\tilde{Q}=(-1)\cdot\|q_{i,j}\|$, $i=\overline{0,m_j}$, $m_j\in N\cup\{0,\infty\}$, $j=1,2,...,$ для елементів $|q_{i_j,j}|$ якої справедливою є система умов (1). Отже, розглянемо суму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=0}^{i_n-1}(-q_{i,n})\right)\prod_{j=1}^{n-1}\left(-q_{i_j,j}\right)\right]=-a_{i_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n a_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{i_j,j}\right].$$

Очевидно, що останній знакопочережний ряд є абсолютно збіжним, причому його сума належить відрізку $\left[t_0';t_0''\right]$, де

$$t_0'=-a_{m_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n\tilde{a}_{m_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{m_j,j}\right),$$

$$t_0''=\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n\tilde{a}_{0,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{0,j}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{0,j}\right),\qquad \tilde{a}_{i_n,n}=\begin{cases}a_{i_n,n},\ якщо\ n-непарне;\\ a_{m_n-i_n,n},\ якщо\ n-парне.\end{cases}$$

$$t_0''-t_0'=a_{m_1,1}+a_{m_2,2}q_{0,1}+a_{m_3,3}q_{m_1,1}q_{0,2}+a_{m_4,4}q_{0,1}q_{m_2,2}q_{0,3}+a_{m_5,5}q_{m_1,1}q_{0,2}q_{m_3,3}q_{0,4}+....$$

Факт представлення числа x у вигляді розкладу (3) позначатимемо $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{i_1i_2...i_n...}$.

Очевидно, при $q_{i,j}=\dfrac{1}{s}$ для всіх $j\in N$, $i=\overline{0,s-1}$, ряд (3) набуває виду нега-s-го представлення, а для випадку $q_{i,j}=\dfrac{1}{d_j}$ для будь-якого $j\in N, i=\overline{0,d_j-1},$ – знакопочережного ряду Кантора (нега-D-представлення).

Введемо допоміжне для подальшого дослідження поняття циліндричної множини.

Означення 2. *Циліндричною множиною* (або *циліндром*) $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$ *рангу* n *з основою* $c_1c_2...c_n$ називається множина виду

$$\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n} \equiv \left\{x : x = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n i_{n+1} i_{n+2}... i_{n+k}...},\ x \in \left[t_0^{'}; t_0^{"}\right]\right\},$$

де $c_1, c_2, ..., c_n$ – фіксовані числа, $i_{n+k} \in N^0_{m_{n+k}} \equiv \{0,1,...,m_{n+k}\}$, $k = 1,2,...$.

Дослідимо, чи можна вважати ряд (3) системою числення та проведемо короткий порівняльний аналіз даного розкладу дійсних чисел і згаданих вище знакопочережних представлень.

2.1. Основне метричне відношення. В нега-s-му, нега-D-представленнях для відповідних циліндрів $\Delta^{-s}_{c_1c_2...c_n}$, $\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_n}$ рангу n з основою $c_1c_2...c_n$ для довільного $n \in N$ справедливими є наступні співвідношення:

$$\left|\Delta^{-s}_{c_1c_2...c_n}\right| = \frac{1}{s^n}\hat{\varphi}^n\left(\Delta^s_{(s-1)}\right) = \frac{1}{s^n}\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} - \inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right)\right| = \frac{1}{s^n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-s}_{(0[s-1])}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-s}_{([s-1]0)}\right)\right|,$$

де $\hat{\varphi}$ – оператор зсуву цифр. Отже,

$$\left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right)\right| = \hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} - \inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right) = const = \sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} - \inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}.$$

Подібним чином

$$\left|\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_n}\right| = \frac{1}{d_1d_2...d_n}\hat{\varphi}^n\left(\Delta^D_{[d_1-1][d_2-1]...[d_n-1]...}\right) =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2...d_n}\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...} - \inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\right) =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2...d_n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2...d_n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-D}_{0[d_2-1]0[d_4-1]...0[d_{2k}-1]...}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-D}_{[d_1-1]0[d_3-1]0...[d_{2k-1}-1]0...}\right)\right|,$$

де $k = 1,2,...$, $\hat{\varphi}$ - оператор зсуву цифр відповідного представлення. Таким чином,

$$\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...} - \inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\right) = \left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}\right)\right| = \mathrm{const} = \sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...} - \inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}.$$

Розглянемо розклад (3). Позначатимемо символом $d(\cdot)$ діаметр множини. Розглянемо випадок, коли $n = 1$. В такому разі

$$d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1}\right) = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1 m_2 0 m_4 ... 0 m_{2k}...} - \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1 0 m_3 0 m_5 ... 0 m_{2k-1}...} = q_{c_1,1}\left(a_{m_2,2} + \sum_{k=3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=2}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right] + \sum_{k=3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=2}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right) =$$

$$= q_{c_1,1}\left(\frac{t_0^{"}}{q_{0,1}} - \frac{t_0^{'} + a_{m_1,1}}{q_{m_1,1}}\right) = \frac{q_{m_1,1}t_0^{"} - q_{0,1}t_0^{'} - a_{m_1,1}q_{0,1}}{q_{0,1}q_{m_1,1}}q_{c_1,1} = q_{c_1,1}\left(t_0^{"} - t_0^{'}\right),$$

якщо справедливою є умова

$$t_0^{"} = \frac{q_{0,1}\left(1 - q_{m_1,1}\right)}{q_{m_1,1}\left(1 - q_{0,1}\right)}\left(1 + t_0^{'}\right).$$

Очевидно, остання умова справджується не у всіх випадках залежно від матриці $\tilde{Q}$. Наприклад, розглянемо випадок, коли для всіх натуральних значень n справедливо $m_n < \infty$ та для всіх $n > 1$ $q_{0,n} = const = q_0$, $q_{m_n,n} = const = q_m$, $q_0 \neq q_m$, $q_{0,1} = q_1$, $q_{m_1,1} = q_2$, $q_1 \neq q_2$. Тоді

$$t_0^{'} = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{m_1 0 m_3 0 m_5...} \equiv -\left(1 - q_2 + q_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1 - q_m\right)q_0^k q_m^{k-1}\right)\right) = q_2\left(1 - \frac{\left(1 - q_m\right)q_0}{1 - q_0 q_m}\right) - 1,$$

$$t_0^{"} = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{0 m_2 0 m_4 0 m_6...} \equiv q_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - q_m\right)q_0^{k-1}q_m^{k-1}\right) = \frac{1 - q_m}{1 - q_0 q_m}q_1.$$

Отож, $\dfrac{q_{0,1}\left(1 - q_{m_1,1}\right)}{q_{m_1,1}\left(1 - q_{0,1}\right)}\left(1 + t_0^{'}\right) = \dfrac{q_1\left(1 - q_2\right)}{q_2\left(1 - q_1\right)}q_2\left(1 - \dfrac{\left(1 - q_m\right)q_0}{1 - q_0 q_m}\right) = \dfrac{q_1\left(1 - q_2\right)\left(1 - q_0\right)}{\left(1 - q_1\right)\left(1 - q_0 q_m\right)} = t_0^{"}$, якщо $\dfrac{1 - q_m}{1 - q_0} = \dfrac{1 - q_2}{1 - q_1}$.

Цілком очевидно, що останнє співвідношення справедливе не завжди. Тобто, метричне відношення

$$\frac{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_kc}\right)}{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_k}\right)},$$

де $k=0,1,2,3,...$, при $k=0$ циліндричною множиною вважатимемо відрізок $\left[t_0^{'};t_0^{"}\right]$, залежно від матриці $\tilde{Q}$ не завжди дорівнює $q_{c,k+1}$. В загальному випадку

$$\frac{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_kc}\right)}{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_k}\right)}=q_{c,k+1}\frac{a_{m_{k+2},k+2}+\sum\limits_{t=k+3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod\limits_{r=k+2}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]+\sum\limits_{t=k+3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod\limits_{r=k+2}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]}{a_{m_{k+1},k+1}+\sum\limits_{t=k+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod\limits_{r=k+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]+\sum\limits_{t=k+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod\limits_{r=k+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]}.$$

2.2. Представлення чисел, що мають два різних зображення. Лише числа із зліченної множини можуть мати два різних нега-D-зображення. Аналогічна властивість справедлива і для нега-s-го зображення. Зокрема,

$$\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n([s-1]0)}=\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](0[s-1])},\ \alpha_n\neq 0,$$

$$\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]0[d_{n+5}-1]...}=\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]...},\ \varepsilon_n\neq 0.$$

Для ряду (3) справедливим є наступне твердження.

Лема 2. *Якщо* $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c_nm_{n+1}0m_{n+3}...}=\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c_n-1]0m_{n+2}0m_{n+4}...}$, $c_n\neq 0$, *тоді при парному* n *справедливою є наступна рівність*

$$\frac{t_0^{"}-\sum\limits_{k=2}^{n-2}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]-\prod\limits_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{0,j}}{t_0^{'}+a_{m_1,1}+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]}=\frac{q_{c_n,n}\prod\limits_{j=1}^{n}\tilde{q}_{0,j}}{q_{c_n-1,n}\prod\limits_{j=1}^{n}\tilde{q}_{m_j,j}}$$

та

$$\frac{t_0^{"}-\sum\limits_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]}{t_0^{'}+a_{m_1,1}+\sum\limits_{k=2}^{n-2}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]+\prod\limits_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{m_j,j}}=\frac{q_{c_n-1,n}\prod\limits_{j=1}^{n}\tilde{q}_{0,j}}{q_{c_n,n}\prod\limits_{j=1}^{n}\tilde{q}_{m_j,j}}$$

при непарному n.

Доведення. Нехай $x_1=\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c_nm_{n+1}0m_{n+3}...}$, $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c_n-1]0m_{n+2}0m_{n+4}...}=x_2$, $c_n\neq 0$. Якщо n - парне число, тоді

$$x_1=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+(-1)^n\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times\left(a_{c_n,n}-q_{c_n,n}\left(a_{m_{n+1},n+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{m_{n+2k-1},n+2k-1}\prod_{j=n+1}^{n+2k-2}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right)\right)=$$

$$=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times\left(a_{c_n,n}+q_{c_n,n}\left(t_0^{'}+a_{m_1,1}+\sum_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=n+1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\tilde{q}_{m_j,j}\right)^{-1}\right).$$

$$x_2=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+(-1)^n\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times\left(a_{c_n-1,n}+q_{c_n-1,n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{m_{n+2k},n+2k}\prod_{j=n+1}^{n+2k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]\right)=$$

$$=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times\left(a_{c_n-1,n}+q_{c_n-1,n}\left(t_0^{"}-\sum_{k=2}^{n}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=n+1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\tilde{q}_{0,j}\right)^{-1}\right).$$

З умови $x_1=x_2$ й слідує перша рівність в умові леми.

Нехай n – непарне число. Тоді при умові, що $x_1=x_2$ отримаємо

$$-q_{c_n-1,n}+q_{c_n,n}\left(t_0^{"}-\sum_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\tilde{q}_{0,j}\right)^{-1}=q_{c_n-1,n}\left(t_0^{'}+a_{m_1,1}+\sum_{k=2}^{n}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\tilde{q}_{m_j,j}\right)^{-1},$$

звідки й слідує друга рівність в умові леми.

Додатково розглянемо ще деякі властивості циліндрів $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$ рангу n з основою $c_1c_2...c_n$.

Лема 3. *Циліндр* $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$ *є відрізком.*

Доведення. Доведення проведемо для парного n. Нехай $x\in\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$. Тобто,

$$x=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{n}q_{c_j,j}\right)\left(-a_{i_{n+1},n+1}+\sum_{l=n+2}^{\infty}\left[(-1)^l a_{i_l,l}\prod_{r=n+1}^{l-1}q_{i_r,r}\right]\right).$$

Звідси,

$$x'=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]-\left(\prod_{j=1}^{n}q_{c_j,j}\right)\left(a_{m_{n+1},n+1}+\sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{n+t},n+t}\prod_{r=n+1}^{n+t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right)\le$$

$$\le x\le -a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{n}q_{c_j,j}\right)\sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,n+t}\prod_{r=n+1}^{n+t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]=x''.$$

Отже, $x\in[x';x'']\supseteq\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$. Оскільки

$$x'=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{n}q_{c_j,j}\right)\inf\left\{-a_{i_{n+1},n+1}+\sum_{l=n+2}^{\infty}\left[(-1)^l a_{i_l,l}\prod_{r=n+1}^{l-1}q_{i_r,r}\right]\right\},$$

$$x''=-a_{c_1,1}+\sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{n}q_{c_j,j}\right)\sup\left\{-a_{i_{n+1},n+1}+\sum_{l=n+2}^{\infty}\left[(-1)^l a_{i_l,l}\prod_{r=n+1}^{l-1}q_{i_r,r}\right]\right\},$$

то x', x'', x належать $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$. Лему доведено.

2.3. Розташування циліндрів однакового рангу. Оскільки у згаданих вище нега-s-му та нега-D-представленнях циліндричні множини є відрізками, що розташовані "зліва направо" при парному n та "справа наліво", якщо n - непарне, то "щось подібне" мало б справджуватися і для рядів (3).

Розглянемо необхідні для подальшого дослідження розташування циліндрів $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_n}$ співвідношення.

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Якщо циліндри $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}$, $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}$ перекриваються і розташовані:

- "зліва направо", тоді $\kappa_1=\sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}-\inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}>0;$
- "справа наліво", тоді $\kappa_2=\sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}-\inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}>0.$

Причому, у першому випадку $\kappa_1<\kappa_2=\left|\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}\right|+\left|\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}\right|-\left|\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}\cap\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}\right|=W.$

У другому ж випадку $\kappa_2<\kappa_1=W$.

Якщо ж циліндри $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}$, $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}$ не перекриваються і розташовані:

- "зліва направо", тоді $\upsilon_1=\inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}-\sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}=-\kappa_1>0;$
- "справа наліво", тоді $\upsilon_2=\inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}-\sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}=-\kappa_2>0.$

Проте, в такому разі у першому випадку $\upsilon_1>\upsilon_2=V=-\left|\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}\right|-\left|\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}\right|-\varpi$, де ϖ – міра Лебега спільного суміжного з циліндрами $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}$, $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}$ інтервала. У другому випадку $V=\upsilon_1<\upsilon_2$.

Перевіримо, які ж із наведених вище співвідношень є справедливими. Нехай n - парне. Розглянемо різницю

$$\kappa_1\equiv\sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}c}-\inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}=$$

$$=a_{c_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}+q_{c,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\left(a_{0,n+1}+\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right)-$$

$$-a_{c+1,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}+q_{c+1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\left(a_{m_{n+1},n+1}+\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right)=$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\left(q_{c+1,n}\left(a_{m_{n+1},n+1}+\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right)+q_{c,n}\left(-1+\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right)\right).$$

Позначивши $\omega_1=a_{m_{n+1},n+1}+\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]$, $\omega_2=\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]$, отримаємо

$$\kappa_1=\left(q_{c+1,n}\omega_1-q_{c,n}+q_{c,n}\omega_2\right)q_{c_1,1}q_{c_2,2}...q_{c_{n-1},n-1}.$$

Таким чином, справедливими є подвійна нерівність $-q_{c,n} < \frac{\kappa_1}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} \le -q_{c,n} + \max\left\{q_{c,n}, q_{c+1,n}\right\}$

та умови

$$\kappa_1 < 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 < (1-\omega_2)q_{c,n},$$
$$\kappa_1 = 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 = (1-\omega_2)q_{c,n},$$
$$\kappa_1 > 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 > (1-\omega_2)q_{c,n}.$$

Крім того $\kappa_2 \equiv \sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} - \inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} = \left(q_{c,n} + q_{c+1,n}\omega_2 + q_{c,n}\omega_1\right)\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} > 0,$

$$\frac{\kappa_2-\kappa_1}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} = \left(2-\omega_2\right)q_{c,n} + \left(q_{c,n} - q_{c+1,n}\right)\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2 = \left(2-\omega_2\right)q_{c,n} - \left(\omega_1-\omega_2\right)q_{c+1,n} + q_{c,n}\omega_1 > 0,$$

де $\omega_1 > \omega_2$.

Отже, у випадку парного n циліндри розташовані "зліва направо", але залежно від матриці $\tilde{Q}$ суміжні циліндри $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$ можуть або перекриватися, або не перетинатися, або перетинатися в одній точці.

Аналогічно, якщо n – непарне число, тоді

$$\kappa_2 \equiv \sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} - \inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} = -q_{c,n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} + q_{c+1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right)\left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right) +$$
$$+q_{c,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right)\left(\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right).$$

Позначивши $\omega_1 = a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right],\ \omega_2 = \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right],$

отримаємо $\kappa_2 = \left(-q_{c,n} + q_{c+1,n}\omega_1 + q_{c,n}\omega_2\right)q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}.$

Отже, $-q_{c,n} < \frac{\kappa_2}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} \le -q_{c,n} + \max\left\{q_{c,n}, q_{c+1,n}\right\},$

причому $\kappa_2 < 0,$ якщо $q_{c+1,n}\omega_1 < (1-\omega_2)q_{c,n}$, $\kappa_2 = 0,$ якщо $q_{c+1,n}\omega_1 = (1-\omega_2)q_{c,n}$, $\kappa_2 > 0,$ якщо $q_{c+1,n}\omega_1 > (1-\omega_2)q_{c,n}$.

Оскільки $\kappa_1 \equiv \sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} - \inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} = \left(q_{c,n} + q_{c,n}\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right) > 0$

та $\frac{\kappa_1-\kappa_2}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} = \left(2-\omega_2\right)q_{c,n} + \left(q_{c,n} - q_{c+1,n}\right)\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2 > 0,$

то у випадку непарного n циліндри розташовані "справа наліво", але залежно від матриці $\tilde{Q}$ суміжні циліндри можуть або перекриватися, або не перетинатися, або перетинатися в одній точці.

Із наведених вище міркувань слідує наступне твердження.

Теорема 1. *Для довільного числа* $x \in \left[t_0^{'}; t_0^{''}\right]$ *існує послідовність* (i_k), $i_k \in N^0_{m_k} \equiv \{0,1,\ldots,m_k\}$, *така, що*

$$x = -a_{i_1,1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(-1)^k a_{i_k,k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j,j}\right],$$

якщо для всіх $k \in N$ *справедливою є наступна система умов*

$$\begin{cases} q_{c+1,2k}\left(a_{m_{2k+1},2k+1} + \sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{2k+t},2k+t}\prod_{r=2k+1}^{2k+t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right) \ge q_{c,2k}\left(1 - \sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,2k+t}\prod_{r=2k+1}^{2k+t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right); \\ q_{c+1,2k-1}\left(a_{m_{2k},2k} + \sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,2k+t-1}\prod_{r=2k}^{2k+t-2}\tilde{q}_{0,r}\right]\right) \ge q_{c,2k-1}\left(1 - \sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{2k+t-1},2k+t-1}\prod_{r=2k}^{2k+t-2}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right). \end{cases}$$

3. Побудова та дослідження ряду (4). Нехай маємо деяку матрицю $Q' = \left\|\tilde{q}_{i,n}\right\|$ (де $i = \overline{0, m_n}$, $m_n \in N \cup \{0,\infty\}$, $n = 1,2,\ldots$), яка має ті ж самі властивості та розмірність, що й матриця $\tilde{Q}$.

Розіб'ємо відрізок $[0;1]$ точками $\tilde{a}_{0,1}, \tilde{a}_{1,1}, \ldots, \tilde{a}_{m_1,1}$ на відрізки (які назвемо відрізками першого рангу), слідуючи "зліва направо", і, які позначимо відповідно $\Delta_0^{-\tilde{Q}}, \Delta_1^{-\tilde{Q}}, \ldots, \Delta_{m_1}^{-\tilde{Q}}$. Для довільного $i_1 \in N^0_{m_1}$ очевидним є той факт, що $\left|\Delta_{i_1}^{-\tilde{Q}}\right| = \tilde{q}_{i_1,1}$. Кожен з відрізків $\Delta_{i_1}^{-\tilde{Q}}$ першого рангу розіб'ємо, слідуючи "справа наліво", точками $\tilde{a}_{i_1+1,1}, \tilde{a}_{0,2}, \tilde{a}_{1,2}, \ldots,$ на відрізки $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i}$, $i=\overline{0,m_2}$, другого рангу, де $\left|\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i}\right| = \tilde{q}_{i_1,1}\tilde{q}_{i,2}$ і т. д.. Кожен відрізок $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}}$ $(2k-1)$-го рангу розіб'ємо на відрізки $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1} i}$, $i=\overline{0,m_{2k}}$, $2k$-го рангу, слідуючи "справа наліво", причому таким чином, щоб $\left|\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1} i}\right| = \tilde{q}_{i,2k}\prod_{j=1}^{2k-1}\tilde{q}_{i_j,j}$, а кожний відрізок $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1} i_{2k}}$ $2k$-го рангу, слідуючи "зліва направо", розіб'ємо на відрізки $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k} i}$, $i=\overline{0,m_{2k+1}}$, $(2k+1)$-го рангу таким чином, що $\left|\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k} i}\right| = \tilde{q}_{i,2k+1}\prod_{j=1}^{2k}\tilde{q}_{i_j,j}$, і т. д. Цілком очевидно, що $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k i} \subset \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ для всіх $i \in N^0_{m_{k+1}}$ та $\lim_{k\to\infty}\left|\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right| = 0$. Як наслідок, $x = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x)\ldots i_k(x)} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}$.

Накладемо умови, щоб $Q' = \tilde{Q}$. Тобто, $\tilde{q}_{i_n,n} = \begin{cases} q_{i_n,n}, \text{ якщо } n - \text{непарне}; \\ q_{m_n - i_n, n}, \text{ якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$

Рівність $x = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x)\ldots i_n(x)\ldots}$ називатимемо *нега-$\tilde{Q}$-зображенням числа x*.

Нехай $x = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x)\ldots i_n(x)\ldots}$. Тоді лівіше точки x міститься i_1 відрізків першого рангу; $m_2 - i_2$ відрізків другого рангу, які належать $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x)}$; i_{2k-1} відрізків $(2k-1)$-го рангу, які належать $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x)\ldots i_{2k-2}(x)}$ і мають сумарну довжину $a_{i_{2k-1},2k-1}\prod_{j=1}^{2k-2}\tilde{q}_{i_j,j}$; $m_{2k} - i_{2k}$ відрізків $2k$-го рангу, які належать $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x) i_2(x)\ldots i_{2k-1}(x)}$ і мають сумарну довжину $a_{m_{2k}-i_{2k},2k}\prod_{j=1}^{2k-1}\tilde{q}_{i_j,j}$, і т. д. Таким чином, для довільного $x \in [0;1)$ існує послідовність $(i_n(x))$, $i_n(x) \in N^0_{m_n}$, така, що

$$x = a_{i_1(x),1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{i_n(x),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j(x),j}\right]. \tag{5}$$

Слід відмітити, що $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots} \equiv \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2n-1}[m_{2n}-i_{2n}]\ldots}$, і навпаки $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots} \equiv \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2n-1}[m_{2n}-i_{2n}]\ldots}$.

Оскільки $a_{m_{2n}-i_{2n},2n} = q_{0,2n} + q_{1,2n} + \ldots + q_{m_{2n}-i_{2n}-1,2n} = 1 - q_{m_{2n}-i_{2n},2n} - q_{m_{2n}-i_{2n}+1,2n} - \ldots - q_{m_{2n},2n}$, то

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \equiv \sum_{i=0}^{i_1-1} q_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\tilde{\delta}_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right).$$

4. Висновки. У роботі проведено порівняльний аналіз представлення чисел у вигляді розкладу в ряд (3) та нега-s-им представленням і розкладом в знакопочережний ряд Кантора, які є частинними випадками досліджуваного ряду. Зокрема, із наведених вище міркувань слідує, що на відміну від s- та $(-s)$-розкладів, $\tilde{Q}$- та нега-$\tilde{Q}$-розклади (розклади в ряди (2) і (3) відповідно) володіють суттєво відмінними властивостями в залежності від нескінченнопараметричної матриці $\tilde{Q}$: задають числа з різних інтервалів, володіють абсолютно неподібними метричними та геометричними властивостями, закономірності у властивостях операторів зсуву для розкладів, що є їх частинними випадками, не зберігаються для $\tilde{Q}$- та нега-$\tilde{Q}$-розкладів. Встановлено умови приналежності розкладу (3) до систем числення.

Описано геометрію представлення чисел у вигляді розкладу в ряд (4), взаємозв'язок даного розкладу із знакододатним поліосновним $\tilde{Q}$-представленням.

В проведеному дослідженні використано аналітичний та геометричний підходи до побудови систем числення, для доведення основних результатів використано допоміжні поняття оператора зсуву цифр представлення та циліндричної множини (циліндра) рангу n з основою $c_1 c_2 \ldots c_n$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / Працьовитий М. В.. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. Сербенюк С. О. Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел / Сербенюк С. О. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013, №14. – С. 253–267. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/283909906
3. Сербенюк С. О. Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень / Сербенюк С. О. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2013, №15. – С. 168–187. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/292970280
4. Ambrož P. Arithmetics on number systems with irrational bases / Ambrož P., Frougny Ch., Masáková Z., Pelantová E. // Bull. Belg. Math. Soc. – 2003. – 10. – P. 641–659.
5. Cantor G. Ueber die einfachen Zahlensysteme / Cantor G. // Z. Math. Phys. – 1869. – Bd. 14. – S. 121–128.
6. Frougny Ch. Negative bases and automata / Frougny Ch., Lai A. Ch. // arXiv: 1012.3721v1.
7. Frougny Ch. Finite beta-expansions / Frougny Ch., Solomyak B. // *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* – 1992. – 12. – P. 713–723.
8. Grünwald V. Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale) / Grünwald V. // Giornale di Matematiche di Battaglini. – 1885. – 367. – 203–221.
9. Ito S. Beta-expansions with negative bases / Ito S., Sadahiro T. // INTEGERS. – 2009. – 9. – P. 239–259.

10. Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties / Rényi A. // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. – 1957. – 8. – P. 477–493.
11. Serbenyuk S. Representation of real numbers by the alternating Cantor series / Serbenyuk S. // arXiv:1602.00743v1.
Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1602.00743v1.pdf

Стаття надійшла до редколегії 22.11.15

Сербенюк С., мл. научн.сотр
Институт математики НАН Украины

НЕГА-$\tilde{Q}$-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАК ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В статье построено нега-$\tilde{Q}$ -представление действительных чисел, которое является обобщением представления чисел знакочередующимися рядами Кантора. Для моделирования нега -$\tilde{Q}$-представления используется аналитический и геометрический подходы. Недостатки и преимущества каждого из способов исследованы, искомое представление смоделировано.

Serbenyuk S., junior researcher
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

NEGA-$\tilde{Q}$-REPRESENTATION AS A GENERALIZATION OF CERTAIN ALTERNATING REPRESENTATIONS OF REAL NUMBERS

The article is devoted to modeling of the nega-$\tilde{Q}$ -representation of real numbers. The representation is a generalization of representation by alternating Cantor series. Analytic and geometric approaches are used for modeling of nega-$\tilde{Q}$ -representation. Advantages and disadvantages of these approaches are investigated, the representation is modeled.

УДК 629.195

Б. Кіфоренко, д-р. фіз.-мат. наук, проф., І. Васильєв, канд. фіз.-мат. наук,
О. Куценко, канд. фіз.-мат. наук, О. Харитонов, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *kifor@univ.kiev.ua*

ЕФЕКТИВНІСТЬ ДВОРЕЖИМНИХ РАКЕТНИХ ДВИГУНІВ ПРИ ВИКОНАННІ НАВКОЛОЗЕМНИХ ОРБІТАЛЬНИХ МАНЕВРІВ

В рамках вирішення основної задачі механіки космічного польоту отримано і початкові оцінки ефективності комбінованих ракетних двигунів великої і малої тяги порівняно з традиційними двигунами при виконанні практично цікавих навколоземних орбітальних маневрів космічних апаратів.

ВСТУП. Як вказується у публікаціях, в яких аналізуються перспективи та тенденції розвитку космічної техніки [1, 3], для успішного виконання сучасних задач навколоземної космонавтики необхідне використання енергорушійних установок (ЕРУ) космічних апаратів (КА), що мають підвищену електричну потужність та забезпечують в режимі двигуна великої тяги величини питомого імпульсу порядку 900–1000 сек. Такі характеристики мають ядерні енергорушійні установки (ЯЕРУ), що забезпечують за рахунок одного джерела потужності як виконання заданих динамічних маневрів КА, так і енергоспоживання його цільових систем. Найперспективнішою уявляється можливість побудови багаторежимної ядерної енергетичної рушійної установки, що припускає роботу як у режимі ядерного ракетного двигуна великої тяги (ЯРД) так і в режимі ядерного електричного ракетного двигуна малої тяги (ЯЕРД). Відомою перевагою двигунів великої тяги є порівняно мала тривалість динамічних маневрів при їх використанні, зокрема, скорочення тривалості навколоземних та міжпланетних перельотів, що досить суттєво для пілотованих експедицій. З іншого боку, використання двигунів малої тяги, що мають на порядок більшу швидкість витікання реактивного струменя призводить до зменшення масових витрат на виконання заданого динамічного маневру і, отже, до збільшення маси корисного навантаження КА, що є найважливішим показником ефективності обраної схеми перельоту. Можливість оптимального сполучення ракетних двигунів великої та малої тяги, що дозволяє використовувати переваги двигунів обох типів, диктує інтерес до розробки багаторежимної ЯЕРУ. Зауважимо, що розробка багаторежимних ЕРУ, які оптимізують схему міжорбітальних перельотів, можлива на базі реалізованих робочих процесів та розроблених технологій перспективних рушійних та енергетичних установок космічних апаратів [1].

Таким чином значний практичний інтерес являє собою задача визначення діапазонів параметрів, режимів роботи космічних ракетних двигунів та траєкторних схем міжорбітальних перельотів, що забезпечують виграш для багаторежимних РУ порівняно із традиційним використанням двигунів лише одного типу. Математично ця варіаційна проблема може бути сформульована у вигляді основної задачі механіки космічного польоту про виконаня заданого динамічного маневру заданої тривалості з максимальною масою корисного навантаження при фіксованій стартовій масі КА [2]. В термінах теорії оптимальних динамічних систем основна задача механіки космічного польоту є задачею Майєра оптимального керування, розв'язання якої включає визначення оптимальних функцій керування РУ, оптимальної траєкторії та оптимального розподілу масових компонент КА, а також визначення оптимальних значень конструктивних параметрів РУ та КА, що забезпечують виконання заданого динамічного маневру з найліпшим значенням критерію якості. Варто зауважити, що через істотні ускладнення, що зазвичай виникають під час розв'язання практично цікавих задач механіки космічного польоту, які обумовлені, наприклад, нелінійністю та/або нестійкістю відповідних динамічних систем, для ефективного їх розв'язання часто доводиться вводити додаткові припущення, що спрощують постановку вихідної задачі при максимально можливому збереженні її адекватності.