УДК 519.21

І. Боднарчук, асп.,
e-mail: robeiko_i@ukr.net

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА М'ЯКОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто м'який розв'язок рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою $d\mu(t)$***,*** $t\in[0,T]$ ***. За певних умов доведено, що розв'язок прямує до нуля м.н. при*** $|x|\to\infty$ ***.***

1. Вступ. Нехай X – довільна множина, $B(X)$ – σ-алгебра підмножин з X; $L_0(\Omega,F,P)$ – множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі (Ω,F,P). Збіжність в $L_0(\Omega,F,P)$ – це збіжність за ймовірністю. Нехай також μ – стохастична міра на $B(X)$, тобто, σ-адитивне відображення $\mu: B(X)\to L_0(\Omega,F,P)$. В [5] таке μ називається загальною стохастичною мірою.

В [5, розділ 7] та [4] для невипадкової вимірної функції $g: X\to R$ визначено та досліджено інтеграл вигляду $\int_X g\,d\mu$. Зокрема, будь-яка вимірна обмежена функція інтегровна за μ. Крім того, для такого інтеграла справедливий аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність [5, твердження 7.1.1] або [4, пункт 1.1.1, наслідок].

У [3] визначено інтеграл за стохастичною мірою для випадкової функції та досліджено його властивості.

У данній статті розглядається стохастичне рівняння теплопровідності вигляду

$$\begin{cases} du(t,x)=a^2\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}dt+f(t,x,u(t,x))dt+\sigma(t,x)d\mu(t),\\ u(0,x)=u_0(x),\end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x)\in[0,T]\times R$, $a\in R$, $a\neq 0$, та μ – стохастична міра, визначена на $B([0,T])$.

В [8] доведено існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (1), визначеного рівністю (2) нижче, та встановлено його неперервність за Гельдером за сукупністю змінних (t,x). Мета даної роботи – показати, що за певних додаткових умов цей розв'язок прямує до нуля при нескінченному збільшенні абсолютної величини просторової координати.

Аналогічна задача розв'язана в [2], де рівняння теплопровідності кероване стохастичною мірою $d\mu(x)$, $x\in R$. Властивості розв'язків хвильового рівняння та рівняння теплопровідності з цією мірою розглянуто в [1] та [9] відповідно. В [6; 7], досліджено м'які розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, керованих різними гауссівськими шумами.

2. Постановка задачі. Розглядаємо м'який розв'язок рівняння (1), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t,x)=u(t,x,\omega)$: $[0,T]\times R\times\Omega\to R$, що

$$u(t,x)=\int_R p(t,x-y)u_0(y)dy+\int_0^t ds\int_R p(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy+\int_{(0,t]}d\mu(s)\int_R p(t-s,x-y)\sigma(s,y)dy \quad м.н. \tag{2}$$

Тут $p(t,x)=\left(4a^2\pi t\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$ – щільність гауссівського розподілу. Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds беруться для кожного фіксованого $\omega\in\Omega$. Такі інтеграли визначено і досліджено в [4, глава 3].

Далі будемо вимагати виконання наступних припущень.

А1. $u_0(y)=u_0(y,\omega): R\times\Omega\to R$ вимірна та обмежена для кожного $\omega\in\Omega$: $|u_0(y,\omega)|\le C(\omega)$.

А2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером: $|u_0(y_1)-u_0(y_2)|\le C(\omega)|y_1-y_2|^{\beta(u_0)},\quad \beta(u_0)>0.$

А3. $f(s,y,v):[0,T]\times R\times R\to R$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)|\le C$.

А4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $y,v\in R$: $|f(s,y_1,v_1)-f(s,y_2,v_2)|\le C(|y_1-y_2|+|v_1-v_2|)$.

А5. $\sigma(s,y):[0,T]\times R\to R$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

А6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером: $|\sigma(s_1,y_1)-\sigma(s_2,y_2)|\le C\left(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)}+|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)}\right),\quad 1/2<\beta(\sigma)<1.$

А7. $|u_0(y)|\to 0,\quad \sup_{s\in[0,T],z\in R}|f(s,y,z)|\to 0,\quad \sup_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y)|\to 0,\quad |y|\to\infty.$

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

Також нам буде потрібний наступний факт. Розглянемо простір Бєсова $B^{\alpha}_{22}([b,c])$, $1/2<\alpha<1$, тобто, простір функцій $g:[b,c]\to R$, для яких скінченною є норма

$$\|g\|_{B^{\alpha}_{22}([b,c])}=\|g\|_{L_2([b,c])}+\left(\int_0^{c-b}(w_2(g,r))^2 r^{-2\alpha-1}dr\right)^{\frac{1}{2}},\quad \text{де}\quad w_2(g,r)=\sup_{0\le h\le r}\left(\int_b^{c-h}|g(s+h)-g(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для довільних $n \geq 1,\ 1 \leq k \leq 2^n$ покладемо $\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t]$.

Нехай функція $g(z,s): Z \times [0,t] \to R$ така, що для деякого $1/2 < \alpha < 1$ та для довільного $z \in Z$: $g(z,\cdot) \in B_{22}^{\alpha}([0,t])$. Тут Z – довільна множина. Тоді за [8, лема 1] випадкова функція

$$\eta(z) = \int_{(0,t]} g(z,s)d\mu(s), \quad z \in Z,$$

має таку модифікацію $\eta(z)$, що для всіх $\omega \in \Omega,\ z \in Z$ справедлива оцінка

$$\left|\eta(z)\right| \leq \left|g(z,0)\mu\left((0,t]\right)\right| + C\left\|g(z,\cdot)\right\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1\leq k\leq 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Зауважимо, що модифікація η є спільною для всіх $z \in Z$, а константа C залежить від α, t та не залежить від $z,\ \omega$.

3. Основний результат. Теорема. *Нехай виконуються припущення А1–А7. Тоді для розв'язку рівняння (2) існує така модифікація* $u(t,x)$*, що для будь-яких фіксованих* $t \in [0,T],\ \omega \in \Omega$ *виконується* $|u(t,x)| \to 0, \quad |x| \to \infty.$

Доведення. Згідно [8, теорема 1], якщо виконуються припущення А1–А6, то рівняння (2) має єдиний (з точністю до м.н.) розв'язок $u(t,x)$ для всіх $t \in (0,T)$, $x \in R$. Для цього розв'язку маємо

$$|u(t,x)| \leq \left|\int_R p(t,x-y)u_0(y)dy\right| + \left|\int_0^t ds\int_R p(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy\right| +$$

$$+\left|\int_{(0,t]} d\mu(s)\int_R p(t-s,x-y)\sigma(s,y)dy\right| = \left|I_1(t,x)\right| + \left|I_2(t,x)\right| + \left|I_3(t,x)\right|.$$

Розглянемо спочатку стохастичний інтеграл $I_3(t,x) = \int_{(0,t]} q(t,x,s)d\mu(s).$

Нехай $t \in [0,T],\ x \in R$ – фіксовані. Тоді випадкова функція $\eta(z) = I_3(t,x),\ z = (t,x),$ має модифікацію, для якої виконується співвідношення (3). Розглянемо окремо складові його правої частини. Для довільного $s \in [0,t]$ оцінимо $|q(t,x,s)|$. Ми маємо, що $\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \forall |y| > \delta_0$:

$$|u_0(y)| < \varepsilon_0; \quad \sup_{s\in[0,T],z\in R} |f(s,y,z)| < \varepsilon_0; \quad \sup_{s\in[0,T]} |\sigma(s,y)| < \varepsilon_0; \quad \int_{\{|y|>\delta_0\}} e^{-|y|^2}dy < \varepsilon_0, \tag{4}$$

де використали припущення А7 і те, що $\int_R e^{-|y|^2}dy = \sqrt{\pi} < +\infty$.

Тоді $\forall\ s \leq t$, $\forall\ |x| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T}$:

$$|q(t,x,s)| = \left|\int_R (4a^2\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} \sigma(s,y)dy\right| = \left|v = \frac{x-y}{2a\sqrt{t-s}}\right| =$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}}\left|\int_R e^{-|v|^2}\sigma(s,x-2av\sqrt{t-s})dv\right| = \pi^{-\frac{1}{2}}\left|\int_{\{|v|\leq\delta_0\}} e^{-|v|^2}\sigma(s,x-2av\sqrt{t-s})dv + \int_{\{|v|>\delta_0\}} e^{-|v|^2}\sigma(s,x-2av\sqrt{t-s})dv\right| <$$

$$< \pi^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_0 \int_{\{|v|\leq\delta_0\}} e^{-|v|^2}dv + \pi^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_0 C_\sigma \leq C\varepsilon_0. \tag{5}$$

Таким чином, ми отримуємо

$$|q(t,x,0)| < C\varepsilon_0, \quad \left\|q(t,x,\cdot)\right\|_{L_2([0,t])} = \left(\int_0^t |q(t,x,\cdot)|^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}} < C\varepsilon_0.$$

Далі оцінимо модуль неперервності. Використовуючи заміну змінних $v = \dfrac{x-y}{2a\sqrt{t-s-h}}, v = \dfrac{x-y}{2a\sqrt{t-s}}$, та А6 маємо

$$|q(t,x,s+h) - q(t,x,s)| = \pi^{-\frac{1}{2}}\left|\int_R e^{-|v|^2}\left(\sigma(s+h,x-2av\sqrt{t-s-h}) - \sigma(s,x-2av\sqrt{t-s})\right)dv\right| \leq$$

$$\leq Ch^{\beta(\sigma)}(1+(t-s)^{-\frac{\beta(\sigma)}{2}}) \leq Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)^{-\frac{\beta(\sigma)}{2}}.$$

Отже,

$$w_2(q(t,x,\cdot),r) = \sup_{0\leq h\leq r}\left(\int_0^t |q(t,x,s+h) - q(t,x,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq Cr^{\beta(\sigma)}. \tag{6}$$

З іншого боку, за (5) для $s+h \le t$ виконується $|q(t,x,s+h)-q(t,x,s)| \le |q(t,x,s+h)|+|q(t,x,s)| < C\varepsilon_0$, і тому

$$w_2(q(t,x,\cdot),r) < C\varepsilon_0\sqrt{t} \le C\varepsilon_0. \tag{7}$$

Перемножимо тепер нерівності (6) та (7), піднесені до степенів θ та $1-\theta$ відповідно, для довільного $\theta \in (0,1)$. Маємо,

$$w_2(q(t,x,\cdot),r) < Cr^{\theta\beta(\sigma)}\varepsilon_0^{1-\theta}.$$

Тоді, $\|q(t,x,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} < C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0^{1-\theta}\left(\int_0^t r^{2\theta\beta(\sigma)-2\alpha-1}dr\right)^{\frac{1}{2}} \le C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$

для відповідного $\alpha < \theta\beta(\sigma)$. Тобто, ми одержали

$$\left|I_3(t,x)\right| < C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta})\left(\left|\mu((0,t])\right| + \left\{\sum_{n\ge1}2^{-n(2\alpha-1)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right) \le C(\omega)(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

де в останній нерівності ми використали [9, лема 3.1].

Крім того, аналогічними міркуваннями, як і при отриманні (5), приходимо до оцінок

$$\left|I_1(t,x)\right| = \pi^{-\frac{1}{2}}\left|\int_{\{|v|\le\delta_0\}} e^{-|v|^2}u_0(x-2av\sqrt{t-s})dv + \int_{\{|v|>\delta_0\}} e^{-|v|^2}u_0(x-2av\sqrt{t-s})dv\right|$$
$$\overset{A1,(6)}{<} \pi^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_0 + \pi^{-\frac{1}{2}}C(\omega)\varepsilon_0 \le C(\omega)\varepsilon_0, \quad \forall\,|x| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T},$$

та

$$\left|I_2(t,x)\right| < C\varepsilon_0, \quad \forall\,|x| > \delta_0 + 2|a|\delta_0\sqrt{T}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо в (4) $\varepsilon_0 = \varepsilon C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon \ge 1$ та $\varepsilon_0 = \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon < 1$.

Таким чином, для довільних фіксованих $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$ маємо, що

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = (1+2|a|\sqrt{T})\delta_0 \quad \forall|x| > \delta: \quad |u(t,x)| < \varepsilon,$$

що й завершує доведення теореми.

4. Висновки. Розглянуто м'який розв'язок стохастичного рівняння теплопровідності, що описує зміну температури деякого середовища, в якому присутні певні випадкові та невипадкові надходження теплової енергії. Доведено, що за вказаних умов щодо джерел теплової енергії температура середовища прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боднарчук І. М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 2010. – Т. 24. – С. 28–33.
2. Боднарчук І. М., Радченко В. М. Асимптотична поведінка розв'язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.
3. Радченко В. М. Інтегральні рівняння із загальною стохастичною мірою // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Т. 91. – С. 154–163.
4. Радченко В. М. Интегралы по общим случайным мерам // Труды Института математики НАН Украины. – К., 1999. – Т. 27.
5. Kwapień S., Woyczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple – Boston, 1992.
6. Nualart E., Quer-Sardanyons L. Gaussian estimates for the density of the non-linear stochastic heat equation in any space dimension // Stochastic Processes and their Applications. – 2012. – Vol. 122. – P. 418–447.
7. Tudor C. A. Analysis of Variations for Self-similar Processes. A Stochastic Calculus Approach // Probability and Its Applications. – Cham Heidelberg, 2013.
8. Radchenko V. Heat equation with general stochastic measure colored in time // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2014. – Vol. 1. – P. 129–138.
9. Radchenko V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.15

Боднарчук И., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МЯГКОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрено мягкое решение уравнения теплопроводности, управляемого общей стохастической мерой $d\mu(t)$, $t \in [0,T]$. При определенных условиях доказано, что решение стремится к нулю п.н. при $|x| \to \infty$.

Bodnarchuk I., PhD student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE MILD SOLUTION OF A STOCHASTIC HEAT EQUATION

The mild solution of the heat equation driven by a general stochastic measure $d\mu(t)$, $t \in [0,T]$ is considered. Under some assumptions, we prove that this solution tends to 0 a.s. as $|x| \to \infty$.