УДК 629.7.076.6

І. Васильєв, канд. фіз.-мат. наук, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Б. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ
e-mail: igor_v@univ.kiev.ua, e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net

ОПТИМАЛЬНИЙ ПЕРЕЛІТ З МАЛОЮ КУТОВОЮ ДАЛЬНІСТЮ МІЖ ВІДДАЛЕНИМИ КОМПЛАНАРНИМИ ОРБІТАМИ

Проведено сумісну оптимізацію керувань рухом, енергозабезпечення електрореактивної рушійної системи та параметрів рушійної системи сталої потужності з акумулятором енергії космічного апарату при виконанні перельоту з малою кутовою дальністю в центральному гравітаційному полі між компланарними віддаленими орбітами. Отримано оцінку ефективності використання акумулятора енергії в складі рушійної системи космічного апарату для перельоту з орбіти Землі на орбіту Марсу.

ВСТУП. Сучасний стан та тенденції розвитку космічної техніки дозволяють припустити зростання кількості польотів космічних апаратів (КА) до різноманітних тіл сонячної системи (планет, астероїдів, комет) в недалекому майбутньому. Для здійснення таких перельотів доцільно використовувати рушійні системи з комбінацією великої та малої тяги [3, 5], бо використання рушійних систем тільки малої тяги на порядки збільшить час перельоту, а у випадку застосування рушійних систем тільки великої тяги зменшиться маса корисного навантаження. Двигуни великої тяги (традиційні хімічні, або ядерні) забезпечують розгін та гальмування в околах точок старту і прибуття. На геліоцентричній дузі траєкторії (дуга траєкторії, що знаходиться поза межами сфер впливу об'єктів старту та прибуття) маршовими двигунами є електрореактивні двигуни (ЕРД) малої тяги.

Проблема максимізації маси корисного навантаження КА була, є і залишиться актуальною для космонавтики через високу вартість виведення одиниці маси на монтажну орбіту. У [7] показано, що включення акумулятора енергії до складу електрореактивної рушійної системи може привести до збільшення маси корисного навантаження КА. Ідея такого підходу полягає в наступному. Так як секундна витрата робочої речовини ЕРД прямо пропорційна квадрату реактивного прискорення і обернено пропорційна підведеній потужності [2], то на дугах траєкторії з малим рівнем реактивного прискорення енергію джерела потужності накопичують в акумуляторі, зменшивши при цьому енергоживлення рушія, а на дугах траєкторії з великим рівнем реактивного прискорення накопичену енергію в акумуляторі спрямовують в рушій разом з енергією джерела. Якщо зекономлена за рахунок такого підходу маса робочої речовини виявиться більше від збільшення маси рушійної системи, то доцільно застосовувати рушійну систему з акумулятором енергії. Проведені подальші дослідження для ряду маневрів в навколопланетному просторі підтвердили ефективність такого підходу [5, 6, 8].

У даній статтії розглянуто задачу про оптимальний переліт КА з рушійною системою сталої тяги з акумулятором енергії між компланарними кеплеровими орбітами за заданий час, що відповідає малій кутовій дальності перельоту. Рух КА моделюється рухом матеріальної точки змінної маси в першому наближенні методу транспортуючої траєкторії [1, 2]. Задача оптимізації керувань та траєкторії розв'язана з застосуванням принципу максимума Понтрягіна. Для перельоту між орбітами Землі та Марсу оптимізація параметрів рушійної системи проведена за допомогою чисельних методів. Проаналізовано ефективність використання акумулятора енергії в складі рушійної системи КА для ряду тривалостей перельоту.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. КА вважаємо матеріальною точкою змінної маси. Початкова маса КА складається з маси корисного навантаження M_π, маси рушія M_γ, маси джерела потужності M_ν, маси акумулятора енергії M_β та маси робочої речовини M_f, необхідної для виконання заданого динамічного маневру. Як і в [6, 8], вважаємо $M_\nu = \alpha N_0$, $M_\gamma = \gamma N_\gamma N_0$, $M_\beta = \beta E_{a_0}$, де N_0 – максимальне значення потужності джерела, E_{a_0} – енергоємність акумулятора, $N_\gamma N_0$ – значення потужності рушія, α, β, γ – питомі маси джерела потужності, акумулятора енергії та рушія.

Мета місії КА – здійснити міжорбітальний переліт з максимальною масою корисного навантаження в центральному гравітаційному полі між віддаленими компланарними орбітами за заданий час T. Причому, час T вважаємо таким, що забезпечує кутову дальність перельоту менше π. Ця умова дає змогу використати рівняння руху в першому наближенні методу транспортуючої траєкторії.

Введемо систему координат Ox_1x_2 наступним чином: центр O розташуємо в гравітаційному центрі, вісь Ox_1 в початкове положення КА, а вісь Ox_2 напрямлена так, щоб система координат була правою. На рис. 1 штриховою лінією зображено транспортуючу траєкторію – дугу деякої кеплерової орбіти, що з'єднує початкову та кінцеву орбіти в точках O_1 та O_2 за час T. Початок транспортуючої системи координат $O_tx_{1t}x_{2t}$ рухається по вказаній дузі кеплерової орбіти, її осі паралельні осям нерухомої системи координат Ox_1x_2. В початковий момент часу точки O_1 та O_t співпадають, а в кінцевий момент часу O_t співпадає з точкою O_2. На цьому рисунку $\mathbf{r}(t)$ – радіус-вектор КА в абсолютному базисі Ox_1x_2, $\mathbf{r}_t(t)$ – радіус-вектор початку транспортуючої системи координат $O_tx_{1t}x_{2t}$, $\boldsymbol{\rho}(t)$ – радіус-вектор КА в транспортуючому базисі, $\mathbf{V}_{1t}, \mathbf{V}_{2t}$ – швидкості транспортуючого базису в початковій та кінцевій точках перельоту, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ – орбітальні швидкості початкової та кінцевої орбіт в в початковій та кінцевій точках.

У подальшому всі співвідношення записано в безрозмірній формі: лінійний розмір віднесено до деякої величини r^*, час t віднесено до T^* – періоду обертання по круговій орбіті радіусом r^*, поділеному на 2π, прискорення – до прискорення вільного падіння на відстані r^* від гравітаційного центру, поточний запас енергії в акумуляторі E_a – до його енергоємності, потужності джерела та рушія – до максимальної потужності джерела N_0, маси – до початкової маси КА. Відповідні безрозмірні величини позначено маленькими літерами.

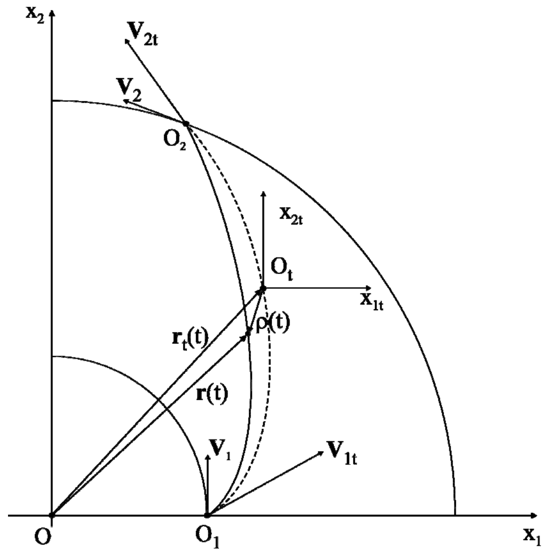

Рис.1. Схема перельоту

Електрореактивну рушійну систему КА вважаємо ідеально керованою системою сталої потужності. У цьому випадку рівняння зміни маси та поточного запасу енергії акумулятора мають вигляд [1, 5]

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\zeta}{m_\nu}\frac{m^2 \mathbf{a}_e^2 \delta}{2N_\gamma},$$
$$\frac{de_a}{dt} = -\frac{\eta}{\xi_B}\left(N_\gamma \delta - 1\right), \ e_a \in [0,1], \tag{1}$$

де $\zeta = \alpha r^{*2} / T^{*3}$, $\eta = \beta T^* / \alpha$, $\xi_B = m_e / m_\nu$, $\mathbf{a}_e$ – вектор реактивного прискорення, δ – керуюча функція, яка приймає значення 0 (пасивна дуга траєкторії – рушій вимкнено, енергія джерела спрямована на зарядку акумулятора), або 1 (активна дуга траєкторії – накопичена енергія в акумуляторі разом з енергією джерела живлять рушій). Обмеження на величину e_a зумовлені тим, що запас енергії акумулятора не може бути від'ємним та не може перевищувати енергоємність. При використанні першого наближення метода транспортуючої траєкторії вектор реактивного прискорення $\mathbf{a}_e$, що забезпечує перехід КА з точки O_1 в точку O_2, повинен задовольняти крайову задачу

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{a}_e, \quad \boldsymbol{\rho}(0) = 0, \ \dot{\boldsymbol{\rho}}(0) = \mathbf{V}_{1t} - \mathbf{V}_1, \ \boldsymbol{\rho}(T) = 0, \ \dot{\boldsymbol{\rho}}(T) = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}. \tag{2}$$

Використовуючи співвідношення (1) та проектуючи (2) на осі транспортуючої системи координат знаходимо

$$\dot{m} = -\frac{\zeta}{m_\nu}\frac{m^2\left(a_{1e}^2 + a_{2e}^2\right)\delta}{2N_\gamma}, \quad m(0) = 1, \ m_\pi = m(T) - m_\gamma - m_\nu \to \max,$$
$$\dot{e}_a = -\frac{\eta}{\xi_B}\left(N_\gamma \delta - 1\right), \quad e_a(0) = 1, \ e_a(T) = 0, \tag{3}$$
$$\dot{y}_1 = y_3, \quad y_1(0) = 0, \ y_1(T) = 0,$$
$$\dot{y}_2 = y_4, \quad y_2(0) = 0, \ y_2(T) = 0,$$
$$\dot{y}_3 = a_{1e}\delta, \quad y_3(0) = \Phi_1, \ y_3(T) = \Theta_1,$$
$$\dot{y}_4 = a_{2e}\delta, \quad y \ (0) = \Phi_2, \ y_4(T) = \Theta_2,$$

де $y_1 = x_{1t}, y_2 = x_{2t}$, Φ_1, Φ_2 и Θ_1, Θ_2 – проекції векторів $\mathbf{V}_{1t} - \mathbf{V}_1$ та $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2t}$.

Як видно з (2) напрямки та величини векторів $\dot{\boldsymbol{\rho}}(0)$ та $\dot{\boldsymbol{\rho}}(T)$ залежать від вибору транспортуючої траєкторії, яка може бути дугою еліпса, гіперболи або параболи (випадок кола малоймовірний, а тому його не розглядаємо). Згідно з [4] та вибраних характерних величин для визначення дуги еліпса, що з'єднує точки O_1 та O_2 маємо систему рівнянь

$$r_1 = a(1 - e\cos E_1),$$
$$r_2 = a(1 - e\cos E_2), \tag{4}$$
$$T = a^{3/2}\left(E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)\right).$$

Для дуги гіперболи маємо

$$r_1 = a(e\,\mathrm{ch}\,H_1 - 1),$$
$$r_2 = a(e\,\mathrm{ch}\,H_2 - 1), \tag{5}$$
$$T = a^{3/2}\left(e(\mathrm{sh}\,H_2 - \mathrm{sh}\,H_1) - H_2 + H_1\right).$$

Для параболічної транспортуючої траєкторії

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{p}{1+\cos\nu_1}, \\
r_2 &= \frac{p}{1+\cos\nu_2}, \\
T &= \frac{1}{2}p^{3/2}\left(\operatorname{tg}\frac{\nu_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{\nu_1}{2}+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3\frac{\nu_2}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{\nu_1}{2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Як бачимо системи (4) та (5) є системами трьох рівнянь з чотирма невідомими. Тому задаючи, наприклад E_1 для системи (4) та H_1 для системи (5), знаходимо невідомі a, e та E_2 і H_2 відповідно. А E_1 та H_1 будуть знайдені з умови максимуму маси корисного навантаження. Система ж (6) у випадку існування має єдиний розв'язок. Через те, що наперед тип транспортуючої траєкторії невідомий задачу оптимального керування (3) треба розв'язувати для випадків (4)–(6) та вибирати тип траєкторії, що дозволяє максимально збільшити масу корисного навантаження.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ. Застосуємо до задачі (3) принцип максимума Понтрягіна. Складемо функцію H

$$
H = -\psi_m \frac{\zeta}{m_\nu}\frac{m^2\left(a_{1e}^2+a_{2e}^2\right)\delta}{2N_\gamma}+\psi_1 y_1+\psi_2 y_2+\psi_3 a_{1e}\delta+\psi_4 a_{2e}\delta-\psi_e\frac{\eta}{\xi_B}\left(N_\gamma\delta-1\right).
$$

З умови максимуму функції H по керуванням a_{1e} та a_{2e}, отримаємо

$$
a_{1e} = \frac{\psi_3}{\frac{\zeta}{m_\nu}\psi_m m^2}, \quad a_{2e} = \frac{\psi_4}{\frac{\zeta}{m_\nu}\psi_m m^2} \tag{7}
$$

Розв'язавши систему рівнянь для приєднаних функцій $\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$, отримаємо

$$
\psi_1 = A_{13},\ \psi_2 = A_{23},\ \psi_3 = -A_{13}t + A_{12},\ \psi_4 = -A_{23}t + A_{22},\ \psi_m m^2 = c_m,\ \psi_e = const\ , \tag{8}
$$

де $A_{13}, A_{23}, A_{23}, A_{22}, c_m$ – сталі в часі коефіцієнти. З (7) та (8) випливає, що сталу c_m можемо покласти рівною 1. Тоді проекції вектора реактивного прискорення приймають вигляд

$$
a_{1e} = \frac{-A_{13}t + A_{12}}{\frac{\zeta}{m_\nu}}, \quad a_{2e} = \frac{A_{23}t + A_{22}}{\frac{\zeta}{m_\nu}} \tag{9}
$$

Визначення керуючої функції δ проводиться для кожної конкретної задачі за схемою, що запропонована в [6, 8]. Спочатку розв'язується задача для КА з рушійною системою без акумулятора енергії [5]. Будується графік модуля реактивного прискорення. Визначається кількість максимумів. В околі кожного максимуму буде активна дуга траєкторії тривалістю τ_i. Після чого керування (9) підставляємо в (3), і інтегруючи у відповідності до вибраного розподілу активних та пасивних дуг траєкторії знаходимо сталі A_{13}, A_{23}, A_{12}, A_{22} у вигляді функцій від τ_i та $\Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2$. Задаючись значенням питомої маси акумулятора β, після інтегрування першого рівняння в (3), отримаємо значення маси корисного навантаження як функцію $m_\pi = m_\pi(\tau_i, m_\nu, N_\gamma, \Phi_1, \Phi_2, \Theta_1, \Theta_2)$, яку досліджуємо на максимум за допомогою чисельних методів.

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ВКЛЮЧЕННЯ АКУМУЛЯТОРА ЕНЕРГІЇ ДО СКЛАДУ РУШІЙНОЇ СИСТЕМИ КОСМІЧНОГО АПАРАТУ ДЛЯ ПЕРЕЛЬОТУ З ОРБІТИ ЗЕМЛІ НА ОРБІТУ МАРСУ. Орбіти Землі та Марсу вважатимемо компланарними круговими орбітами. За характерний лінійний розмір приймаємо середню відстань від Землі до Сонця. Питомі маси рушія та джерела потужності приймаємо $\gamma = 1.5$ кг/КВт, $\alpha = 10$ кг/КВт.

Таблиця

Маси корисного навантаження

T / $1/\beta$	90 діб		100 діб		110 діб		120 діб		130 діб	
	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π	m_π^e	m_π
3 Гдж/кг	0.1846	0.0182	0.2607	0.0752	0.3403	0.1466	0.4064	0.2200	0.4647	0.2902
2 Гдж/кг	0.1655		0.2452		0.3189		0.3851		0.4439	
1 Гдж/кг	0.1226		0.1977		0.2697		0.3365		0.3972	
0.5 Гдж/кг	0.0748		0.1420		0.2103		0.2751		0.3347	
0.3 Гдж/кг	0.0356		0.0744		0.1454		0.2184		0.2883	

В таблиці приведено маси корисного навантаження для різного часу перельоту, який вибирався так, щоб кутова дальність перельоту не перевищувала $\pi/2$ (для справедливості першого наближення методу транспортуючої траєкторії), у випадках класичної електрореактивної рушійної системи m_π та рушійної системи з акумулятором енергії m_π^e. Серед наявних на сьогоднішній день акумуляторів енергії найвищу питому енергоємність мають маховикові акумулятори, яка досягає величини β^{-1}=15 МДж/кг, однак такої енергоємності недостатньо для доцільності включення акумулятора до складу рушійної системи. Очікується, що перспективні маховикові акумулятори матимуть здатність накопичувати до 3 ГДж/кг. Як видно з таблиці для ефективного використання акумуляторів енергії в рушійних системах їх енергоємність має бути не менш ніж 0.5 ГДж/кг. Чисельні розрахунки показали, що для перельоту, що розглядається, оптимальною транспортуючою траєкторією є дуга еліпса.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1977. – 430 с.
2. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. – М.: Наука, 1966. – 679 с.
3. Кифоренко Б. Н., Харитонов А. М. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двухрежимными двигателями // Прикладная механика. – 2010. – 46,№10.– С. 78–89.
4. Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
5. Ткаченко Я. В. Оптимизация перелетов космических аппаратов с электроракетными двигателями // Збірник праць інституту математики НАН України . – 2014 – 11, №4.– С. 318–329.
6. Ткаченко Я. В. Оптимизация работы электрических ракетных двигателей с постоянной и регулируемой тягами // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 3. – С. 114–123.
7. Camac M. Use of energy storage in low thrust spaceflight // ARS Journal. –1960. – 30, № 1. – P. 32–41.
8. Tkachenko Ya. V Using energy storage in low thrust constant power thruster for optimal interorbital transfers // Stability and control. Theory and application. International Journal. – 2003. – 5, No.1.– P. 22–40.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.16

Васильев И., канд. физ.-мат. наук,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев
Кифоренко Б., д-р физ.-мат. наук, проф., Ткаченко Я., канд. физ.-мат. наук,
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЕРЕЛЕТ С МАЛОЙ УГЛОВОЙ ДАЛЬНОСТЬЮ МЕЖДУ ОТДАЛЕННЫМИ КОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ

Проведена совместная оптимизация управлений движением, энергообеспечения электрореактивной двигательной системы и параметров двигательной системы постоянной мощности с аккумулятором энергии космического аппарата при выполнении перелета с малой угловой дальностью в центральном гравитационном поле между компланарными удаленными орбитами. Получена оценка эффективности использования аккумулятора энергии в составе двигательной системы космического аппарата для перелета с орбиты Земли на орбиту Марса.

Vasil'ev I., PhD, Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv
Kiforenko B., Dr. of science, Prof., Tkachenko Ya. PhD
S. P. Timoshenko institute of mechanics of NASU, Kyiv

OPTIMAL TRANSFER WITH LOW ANGLE DISTANCE BETWEEN FAR COPLANAR ORBITS

Joint optimization of motion control, electric propulsion power supply and parameters of constant power propulsion with energy storage of spacecraft at fly with low angel distance between far coplanar orbits is provided. Estimation if energy storage using in propulsion system of spacecraft for fly from Earth orbit to Mars orbit is obtained.

УДК 539.3

О. Жук, д-р фіз.-мат. наук
Інститут механіки ім. С. П.Тимошенка НАН України, Київ
Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: y.zhuk@i.ua

ВИЗНАЧЕННЯ РАДІАЦІЙНОЇ СИЛИ, ЩО ДІЄ В РІДИНІ НА ТВЕРДУ РУХОМУ КУЛЮ

Розроблено підхід для обчислення сили радіаційного тиску, що діє в звуковому полі на абсолютно тверду кулю, яка знаходиться в рідині і рухається із сталою швидкістю. У рамках підходу передбачається, що потенціал звукового поля знаходиться як розв'язок рівняння гідродинаміки в акустичному наближенні. Далі обчислюється гідродинамічна сила, що діє на кулю. При цьому тиск в рідині знаходиться з точністю до величин другого порядку малості у порівнянні з числом Маха. Сама радіаційна сила обчислюється як стала складова гідродинамічної сили, яка знаходиться її осередненням за період первинної хвилі.

Вступ. Опубліковані в науковій літературі результати досліджень дії радіаційного тиску (тиску звукового випромінювання) на тверді тіла в рідині, а також питання, пов'язані з ним, стосуються випадків нерухомих в рідині тіл [4, 5 та ін.]. Нижче пропонується підхід до розв'язання задачі визначення радіаційного тиску на тверду кулю, яка рухається в рідині зі сталою швидкістю. Підхід узагальнює метод, викладений у 10] для нерухомої кулі. Схема дослідження в [10] передбачає знаходження потенціалу Φ звукового поля як розв'язку рівняння гідродинаміки в акустичному наближенні

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \Phi = 0 , \qquad (1)$$

з наступним обчисленням сили, що діє в звуковому полі на кулю. При визначенні сили тиск в рідині обчислюється з точністю до величин другого порядку порівняно з числом Маха за формулою

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0 \left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{a_0^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 , \qquad (2)$$

де потенціал Φ є сумою потенціалів первинної акустичної хвилі і хвилі, розсіяній на кулі, а ρ_0 і a_0 – відповідно густина рідини і швидкість звуку в ній. Радіаційна сила, що діє на кулю в акустичному полі, є стала складова гідродинамічної сили