

УДК 539.3

Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Н. Оліярник, канд. фіз.-мат. наук,
Л. Піскозуб, ст. викл., Українська академія друкарства,
Я. Пастернак, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Луцький національний технічний університет
e-mail: sulym@franko.lviv.ua, nazaroliyarnyk13@gmail.com,
piskozub@pancha.lviv.ua, pasternak@ukrpost.ua

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ФРИКЦІЙНОГО ПРОКОВЗУВАННЯ

Методом функцій стрибка побудовано гранично-елементний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною, навантаженого розподіленою зосередженою силою у поздовжньому напрямку та нормальним стиском. Береги тріщини можуть взаємно проковзувати з урахуванням сухого тертя. Досліджено вплив параметрів навантаження та відношення пружних характеристик матеріалів півпросторів на виникнення і розмір ділянки проковзування у тріщині, а також розподіл стрибків переміщень на ній, величину розсіяної енергії.

ВСТУП. Задачі теорії пружності та руйнування для тіл з тріщинами викликають велике зацікавлення дослідників (див. огляди [2, 11, 15]). У деяких випадках простої геометрії та специфічних крайових умов різними методами отримано аналітичні розв'язки таких задач [5, 10]. Значно ускладнює розв'язування урахування на поверхні контакту сил фрикційної взаємодії, довільність типу і способу навантажування, а також обмеженість розмірів досліджуваних тіл. Помітний внесок у початок вивчення впливу фрикційного проковзування на напружено-деформований стан контактуючих тіл належить Каттанео, Міндліну та ін. [14, 16, 19]. Значні здобутки у цьому напрямі належать теорії вивчення тріщин на межі поділу двох середовищ, яка для усунення фізично некоректної осцилюючої особливості широко застосовує модель локального контакту берегів безпосередньо біля вістря [12, 15, 17]. Вплив сил тертя на контактні напруження між півплощинами із неглибокими гладкими виїмками на поверхні досліджено в [18]. Широкий клас задач, які стосуються цієї проблематики, розглянуто також у працях [1, 3, 4].

Метою даної публікації є узагальнення на випадок довільного навантаження результатів робіт авторів [8, 9], де методом функцій стрибка та сингулярних інтегральних рівнянь [10, 24] отримані аналітичні розв'язки антиплоскої задачі для біматеріалу із міжфазним фрикційним проковзуванням за симетричного навантаження. Для розв'язування інтегральних рівнянь сформульованих задач пропонується застосувати гранично-елементний метод функцій стрибка [6, 7, 13, 20–23, 26].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо безмежний ізотропний масив, що складається з двох півпросторів з пружними сталими E_k, ν_k , взаємно притиснутих до межі поділу нормальним рівномірним стиском на нескінченності $\sigma_{yy}^\infty = P < 0$. Тут введено в розгляд систему координат $Oxyz$ з початком у площині контакту півпросторів xOz . Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі z та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозумінь.

Вивчатимемо напружено-деформований стан перерізу тіла площиною xOy , перпендикулярною до напрямку z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k ($k=1,2$), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис. 1). На ній уздовж проміжку $L' = [-b; b]$ лежить серединна лінія перерізу тунельної тріщини, береги якої перебувають у контакті.

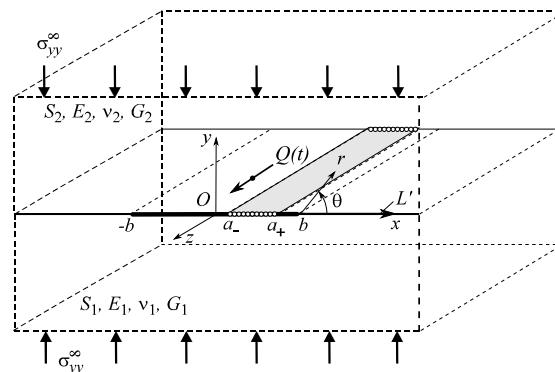


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

Зовнішнє навантаження у поздовжньому напрямі визначається монотонно квазістатично зростаючою від нуля до деякого максимального значення зосередженою силою інтенсивності $Q(t)$ в точці $z_* \in S_2$. Відзначимо, що додатний напрям вектора сили обрано уздовж осі z (так, щоб з осями x, y утворювалася права система).

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ вважаємо механічно ідеальним. Уздовж L' береги тріщини контактують механічно ідеально до моменту, коли може початися взаємне проковзування контактуючих поверхонь тіл [8, 9]. Згадані умови контакту у налягаючій тріщині передбачають, що при досягненні дотичними напруженнями $\sigma_{yz}(x, 0)$ певного критичного значення τ_{yz}^{\max} на ділянці $\gamma = [a_-, a_+] \subset L'$ починається проковзування, причому цей

поріг дотичні напруження перевищити не можуть. Обмежуючись при цьому класичним законом тертя Амонтона [2], розглянемо варіант контактної задачі за умови що $\sigma_{yz}(x, 0)$ (зусилля тертя) у всіх точках ділянки $\gamma \subset L'$ дорівнюють

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x, 0) = -\text{sgn}([w])\tau_{yz}^{\max}, \quad \tau_{yz}^{\max} = -\alpha\sigma_{yy}^{\infty}, \quad (1)$$

де α - коефіцієнт тертя ковзання; $[w] = w^-(x, 0) - w^+(x, 0)$ - стрибок переміщень. Поза ділянкою $\gamma \subset L'$ величина дотичних напружень у місці відсутності проковзування не перевищує максимально допустимого рівня і взаємного переміщення берегів немає: $|\sigma_{yz}(x, 0)| \leq \tau_{yz}^{\max}, [w] = 0$.

Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо у залежності від знаку різниці переміщень $[w]$ на L' у розглядуваній точці. Тут і далі використовуються позначення $[\varphi]_L = \varphi(x, -0) - \varphi(x, +0)$; індекси "+" та "-" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L .

Застосування закону тертя у класичному вигляді (1) дає можливість, звичайно, спростити крайові умови для основної задачі, однак вибір складніших моделей тертя [2, 12], у тому числі з урахуванням спрацювання, при застосуванні граничноелементного методу функцій стрибка принципово не ускладнить процесу розв'язування.

Наявність зони проковзування можна моделювати стрибком компонент вектора переміщень на L' [10, 24], що з урахуванням закону Гука дає:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{L'} \equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = f_6(x, t), \quad x \in L'; \quad f_6(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L'.$$

Тут $f_6(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F_6(x, t)$, де $F_6(x, t) = -\int f_6(x, t) dx = w^+(x, t) - w^-(x, t)$; t - момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю сили.

Таким чином, необхідно розв'язати задачу поздовжнього зсуву від квазістатичної дії зосередженої сили $Q(t)$ з додатковим впливом однорідного розподілу стискувальних нормальних напружень, а також сил тертя на межі поділу матеріалів, які на тих поверхнях, де відбувається проковзування, можуть спричинити тепловиділення, розсіяння енергії, спрацювання тощо. Аналітичний розв'язок такої задачі було отримано у працях авторів [8, 9] для часткового випадку симетричного щодо вертикальної осі навантаження. Випадок несиметричного навантаження вимагає більш універсального підходу до розв'язування.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ. Розв'язування задачі здійснюємо на основі відомого для антиплоскої задачі теорії пружності гранично-елементного методу функцій стрибка [6, 13, 20, 22–24, 26]. Його суть полягає у використанні методу функцій стрибка, формули Сомільяни для визначення переміщень у тілі з розрізом та теорем теорії комплексної змінної про граничні значення голоморфних функцій для побудови системи сингулярних інтегральних рівнянь тіла з тонкою пружною неоднорідністю. При цьому ядра відповідних інтегральних рівнянь записуються із використанням деяких комплексних сталих, які визначаються формалізмом Стро [20, 25] і залежать від механічних властивостей матеріалу тіла. Далі записані інтегральні рівняння розв'язуються з використанням модифікованої схеми методу граничних елементів [21, 22]. Таким чином, сформульована задача поздовжнього зсуву зосередженою силою біматеріалу з тріщиною зведеться до такого сингулярного інтегрального рівняння:

$$\text{HPV} \int_{\Gamma_C} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) F_6(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\Gamma(\mathbf{x}) = Q(t) D(\mathbf{z}_*, \mathbf{y}). \quad (2)$$

Тут HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтегралу за Адамаром (Hadamard Principal Value); $\mathbf{z}_* = x_* + iy_*$ – точка прикладання сили $Q(t)$. Рівняння (2) та ядра $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ і $D(\mathbf{z}_*, \mathbf{y})$ записані у загальному випадку для тріщини описаної математичним розрізом Γ_C . У нашому випадку, коли тріщина розміщена на відрізку $L' = [-b; b]$ з вектором нормалі $\mathbf{n} = (n_x; n_y) = (0; -1)$ інтегральне рівняння (2) для $\mathbf{x}(x_1, x_2), \mathbf{y}(y_1, y_2) \in S_2$ матиме простіший вигляд:

$$\text{HPV} \int_{-b}^b S(x_1, y_1) F_6(x_1, t) dx = Q(t) D(\mathbf{z}_*, y_1);$$

$$\text{де } D(\mathbf{z}_*, y_1) = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[\frac{\sqrt{G_2/G_1}}{x_* - y_1 + iy_*} + \frac{iR}{x_* - y_1 - iy_*} \right]; \quad S(x_1, y_1) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{G_2(i+R)}{2(x_1 - y_1)^2} \right];$$

$$G_1 \text{ та } G_2 - \text{модулі зсуву матеріалів, } R = -i \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ. Для ілюстрації ефективності застосування розробленого підходу розглянемо приклад, коли масив перебуває в умовах поздовжнього зсуву зосередженою силою Q , прикладеною в точці $(0; d)$. Введемо в розгляд знерозмірені величини: $x/b, d/b$ – нормовані координата x та віддаль точки прикладання зосередженої сили відповідно; $Q(t)/\pi b P, [w]C/bP$ та $W_1^d C/\pi b^2 P^2$ – нормовані інтенсивність діючої сили, стрибок переміщень та дисипація енергії відповідно.

На рис. 2 зображена залежність форми нормованих значень стрибків переміщень $C[w]/bQ$ вздовж зони проковзування від віддалі d/b точки прикладання при нормованій зосередженій силі $Q(t)/\pi b P = 2$. Відзначено практичне співпадіння результатів, отриманих за допомогою методу граничних елементів (суцільна лінія) та

аналітичного розв'язку (штрихова лінія) [6, 7, 15, 16]. Тут $C = G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$ – параметр, що характеризує відношення модулів зсуву матеріалів півпросторів. Як видно, зі зближенням точки прикладання сили до осі тріщини стрибки переміщень $[w]$ зростають. При цьому спостерігається формування виразного піку стрибків переміщень при достатньо малих значеннях d/b (наприклад $d/b = 0,2$). Натомість, у разі віддалення сили, наприклад, на подвоєну ширину тріщини, зона проковзування $|\gamma|/b$ вже не буде охоплювати всю ширину тріщини, а виникатиме лише на деякій її ділянці ($|\gamma|/b < 1$).

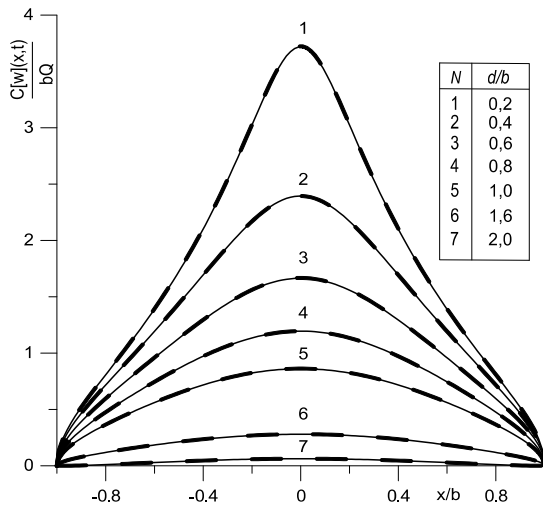


Рис. 2. Нормовані значення стрибків переміщень

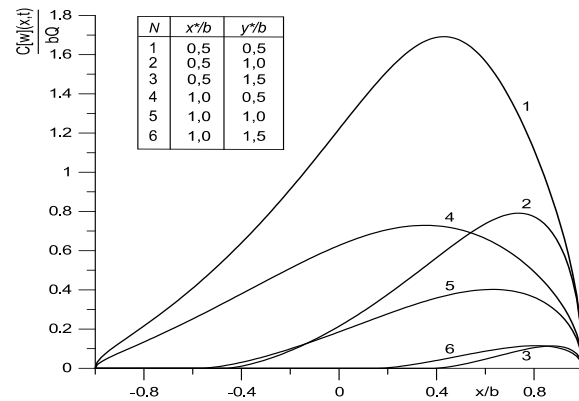


Рис. 3. Залежність нормованих значень стрибків переміщень від розміщення зосередженої сили

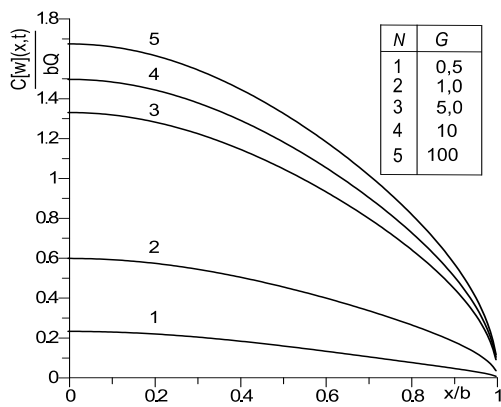


Рис. 4. Залежність нормованих значень стрибків переміщень від значення параметра G

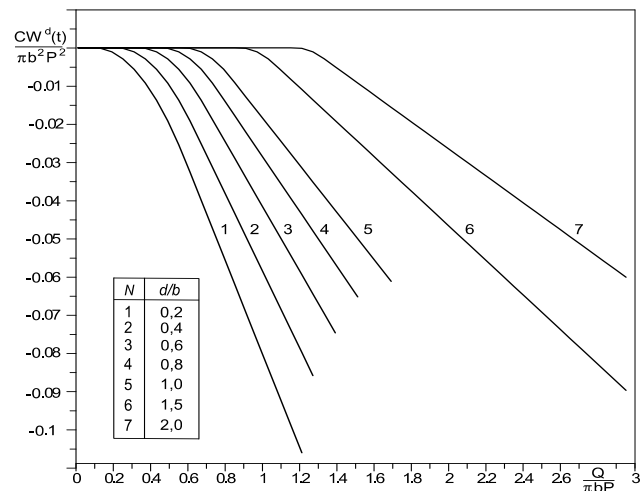


Рис. 5. Вплив інтенсивності та розміщення сили Q на розсіювання енергії W_1^d

На рис. 3 відображено результати розрахунків стрибка переміщень у разі несиметричного відносно вертикальної осі навантаження: сили, точка прикладання якої зміщена у напрямі осі Ox . Досліджено вплив зміни координат точки прикладання сили ($x^*/b, y^*/b$) на розташування та величину зони проковзування і величину відповідних стрибків переміщень. Графіки свідчать про появу несиметричності зони проковзування стосовно тріщини та зміщення зони проковзування і максимуму стрибків переміщень у сторону зміщення точки прикладання сили. При цьому, як у попередніх прикладах, наближення сили до осі тріщини породжуватиме більші $[w]$. Виявлено, що при $x^*/b > 2$ при збереженні значень решти параметрів проковзування практично зникає.

Досліджено вплив відношення модулів зсуву матеріалів півпросторів $G = G_1/G_2$ на стрибки переміщень (рис. 4). Спостерігається їх зростання при збільшенні значення G відносної жорсткості півплощини, у якій прикладається сила. Помітно, що більшим проковзування буде у випадку, коли зсувне навантаження зосередженою силою прикладене у більш жорсткому півпросторі. Обчислено величину розсіяної енергії $W_1^d C/P^2 \pi b^2$ при зміні інтенсивності зосередженої сили і точки її прикладання (рис. 5). Помітною є тенденція до зростання розсіювання енергії із наближенням точки прикладання сили до осі тріщини. У всіх розрахунках вважалося, що коефіцієнт тертя α дорівнює 0,5.

ВИСНОВКИ. Запропонована ефективна методика розрахунку напружено-деформованого стану при антиплоскому зсувному навантажуванні рівномірно розподіленою уздовж довільно розташованої осі силою двох притиснутих півпросторів, коли у контактній зоні міжфазної тріщини може відбуватися проковзування з тертям.

Шляхом порівняння числових результатів з відомими аналітичними розв'язками у окремих часткових випадках навантаження обґрунтовано коректність отриманого розв'язку. Розглянуто залежність розміру зони контакту на різних стадіях навантаження від його параметрів. Чисельно проаналізовано вплив тертя та різних варіантів навантажування на зміну розміру зони проковзування та стрибка взаємного зміщення берегів тріщини. Виявлено, що наближення точки прикладання зсувної сили до тріщини сприяє збільшенню стрибка переміщень при одночасній локалізації зони проковзування в околі прикладання сили. Несиметричність точки прикладання сили стосовно вертикальної осі тріщини приводить до появи несиметричності у тріщині зони проковзування та її зміщення у сторону зміщення точки прикладання сили. Виявлено, що при зміщенні убік точки прикладання сили більше, ніж на дві довжини тріщини, проковзування практично зникає. Помітно, що більшим проковзування є у випадку, коли зсувне навантаження зосередженою силою прикладене у більш жорсткому півпросторі. Обчислено дисипацію енергії для всіх розглянутих випадків навантажування. Досліджено, що дисипація енергії стає інтенсивнішою з наближенням точки прикладання сили до межі розділу матеріалів

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архипенко К. М., Кривий О. Ф. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною // *Машинознавство*, 2008, №3 (129), С.16–21.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М: Наука, 2001. – 478 с
3. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженні / *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів, 2003. С. 322–324.
4. Острык В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев, Наукова думка. - 1976. – 444 с.
6. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Оліярник Н. Р. Метод граничних елементів у задачах антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями // *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех-мат.* – 2012. – Вип. 76. – С. 119–134.
7. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г. Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом // *Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010* (Минск, 25 окт. – 1 нояб. 2010 г.) В 2 ч. Ч. 2.– Минск: БГУ, 2010. – С. 399–404.
8. Пискозуб Л. Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, 2014. – вип.20. – С.160–172.
9. Пискозуб Л. Г., Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Вплив тертя на гістерезис при циклічному навантаженні поздовжнім зсувом масиву з міжфазною тріщиною // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2014. – Вип.12. – С. 184–191
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. 716 с.
11. Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г. Умови контактної взаємодії (огляд) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 2004, 47, №3. С. 110–125
12. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах // *Прикладная математика и механика*, 1966, 30, № 1. С. 82–93
13. Bozhdyarnyk V., Pasternak I., Sulym H., Oliyarnyk N. BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities // *Acta mechanica et automatica*. – 2011. – № 4 (5). – P. 11–16.
14. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei*. – 1938. – 27. –P.342–348.
15. Comninou M, Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // *Journal of Elasticity*. – 1980. – 10(2). – P. 203–212.
16. Jager J. Half-planes without coupling under contact loading // *Arch.Appl.Mech.* – 1997. – 67. – P. 247–259.
17. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // *Archive of App. Mech.* – 1999. – 69. – P. 317–335.
18. Martynyak R., Kryshafovych A. Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary // *J. Friction and Wear*. – 2000. – 21, No 4. – P. 6–15.
19. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces // *ASME J. Appl.Mech.* – 1953. – 75. – P.327–344. Special Issue Thermomechanics, 2008. – 61. P. 315–337 p.
20. Pasternak Iа. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity// *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2012. – 36 – P. 1931–1941.
21. Pasternak Iа. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2011. – 35, №. 4. – P. 678–690.
22. Pasternak Iа., Pasternak R., Sulym H. Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2014. – 48 – P. 87–101.
23. Pasternak Iа., Sulym H. Dual boundary element method for the problems of thin inclusions theory // *Journal of Mathematical Science*. – 2010. – 53. – No 2. – P. 46–57.
24. Pisko Zub J. Z., Sulim G. T. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // *Journal of Engineering Mathematics*.
25. Ting T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
26. Wu W.-L. Dual Boundary Element Method Applied to Antiplane Crack Problems // *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*. -Volume 2009, Article ID 132980, 10 pages. -doi:10.1155/2009/132980.

Стаття надійшла до редколегії 11.03.15

Сулим Г., д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Н. Оліярник, канд. фіз.-мат. наук, Пискозуб Л., ст. преп.,
Українська академія печати,
Я. Пастернак, канд. фіз.-мат. наук, Луцький національний технічний університет

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ БИМАТЕРИАЛА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ФРИКЦИОННОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Методом функций скачка построено гранично-элементное решение антиплоской задачи для биматериала с закрытой межфазной трещиной, нагруженного распределенной сосредоточенной силой в продольном направлении и нормальным сжатием. Берега трещины могут взаимно проскальзывать с учетом сухого трения. Исследовано влияние параметров нагружения и соотношения упругих характеристик материалов полупространств на возникновение и размер зоны проскальзывания в трещине, а также распределение скачков перемещений в ней, величину диссипации энергии.

Sulym H.T., Full Doctor, Ivan Franko National University of Lviv,
Oliyarnyk N.R., PhD, Pisko Zub L.G., Teacher, Ukrainian Academy of Printing,
Pasternak Iа.M., PhD, Lutsk National Technical University

LONGITUDINAL SHEAR OF THE BIMATERIAL WITH INTERFACIAL CRACK WITH TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTIONAL SLIPPAGE

Using jump function method the boundary-element solution of the anti-plane problem for a bi-material with the closed interfacial crack is constructed. Solid is exposed to the loading by a concentrated force in the longitudinal direction and normal load. The faces of the crack can move relatively to each other with dry friction. We analyze the dependence size of this zone, shape of the displacement jump and energy dissipation on the loading parameters and shear modulus of the materials ratio.