УДК 517. 51

С. Безкрила, асист.
НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Київ
e-mail: sveti1988@gmail.com

ПРО ОЦІНКИ ТИПУ ДЖЕКСОНА – СТЄЧКІНА ДЛЯ КУСКОВО q-ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Посилено контрприклад, який показує, що для кускового q-опуклого $(q \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стєчкіна є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують.

1. Вступ. Основні означення та формулювання. Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функцій f з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

$C^r[a,b]$ позначає простір r разів неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Нехай $Y_s[a,b]$, $s \in \mathbb{N}$, – набір з $(s+2)$-ох точок $y_i \in [a,b]$, $a = y_{s+1} < ... < y_1 < y_0 = b$.

Якщо $q \in \mathbb{N}$, то $\Delta^q(Y_s[a,b])$ – це множина функцій $f \in C[a,b]$, таких, що $f^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для парних i та $f^{(q)}(x) \leq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для непарних i. Функції $f \in \Delta^q(Y_s[a,b])$ називаються кусково q-опуклими.

Нехай $W^r[a,b]$ – соболевський клас функцій $f \in AC^{r-1}[a,b]$, таких що $\left\|f^{(r)}\right\|_{[a,b]} \leq 1$, де $r \in \mathbb{N}$ і $\|g\|_{[a,b]} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a,b]} |g(x)|$. Якщо $g \in C[a,b]$, то $\|g\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$. Коли $[a,b] = [-1,1]$, позначаємо $Y_s := Y_s[-1,1]$ (також $\Delta^q(Y_s) = \Delta^q(Y_s[-1,1])$), $W^r := W^r[-1,1]$ і $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{[-1,1]}$. Нехай $Y_1^* = \{-1, 0, 1\}$.

Нехай $\mathbf{P}_n$ – простір алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$. Для $f \in \Delta^q(Y_s[a,b])$ позначимо

$$E_n^q(f, Y_s, [a,b]) := \inf_{P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^q(Y_s[a,b])} \|f - P_n\|_{[a,b]}$$

величину найкращого кусково q-опуклого наближення многочленами.

У роботі [1] побудовано контрприклад, який показує, що для кусково q-опуклого $(q \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стєчкіна з похідною $r \geq q$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають.

Теорема 1 ([1] Ющенко). Для будь–яких $q \geq 4$, $r \geq q$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \geq 0$, такої, що $\overline{\lim_{n \to \infty}} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^q(Y_s[a,b]) \cap C^r[a,b]$ така, що

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s, [a,b]) n^{r-q+3} = +\infty.$$

У роботі побудовано новий контрприклад, який посилює результат роботи [1] та узагальнює на випадок $q \geq 4$ теорему 1.6 роботи [2]. Основним результатом роботи є

Теорема 2. Для будь-яких $q \geq 3$, $r \geq q$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \geq 0$, такої, що $\overline{\lim_{n \to \infty}} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^q(Y_s) \cap W^r$ така, що

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \alpha_n E_n^{(q)}(f, Y_s) n^{r-q+2} = +\infty. \quad (1)$$

Контрприклади для інших пар (q, r), $q \geq 3$, побудовані в роботі [2].

2. Доведення теореми 2. Нехай надалі $r, q \in \mathbb{N}$, $r \geq q \geq 3$. Зауважимо, що сталі $c_*, c_i, \widetilde{c_i}$ залежать лише від q, r і s.

Лема 1 [2]. Для функції $F_{q+1}(x) = \dfrac{|x| x^{q-2}}{(q-1)!}$ існує стала $c_3 \in (0,1)$ така, що

$$n E_n^{(q)}\left(F_{q+1}, Y_1^*\right) \geq c_3, \; n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через S функцію, яка має властивості: a) $S \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, b) $S - \dfrac{1}{2}$ – монотонна непарна функція, c) $S(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 0, & \text{якщо } x \leq -1. \end{cases}$

Покладемо $s_0 := 1$, $s_j := \left\|S^{(j)}\right\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|S^{(j)}(x)\right|$, $j \in \mathbb{N}$. Помітимо, що з $b)$ випливає, що $\int\limits_{-1}^{1} S(x)\,dx = 1$, а для функції $S_\lambda(x) := S\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\lambda > 0$, маємо

$$\left\|S_\lambda^{(j)}\right\|_{[-\lambda,\lambda]} = \lambda^{-j} s_j, \ j \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$f_n^{(q-1)}(x) := S_{\lambda_n}(x - 2\lambda_n), \lambda_n := \frac{c_3}{8n},$$

тоді

$$f_n(x) = \frac{1}{(q-2)!}\int\limits_0^x (x-t)^{q-2} f_n^{(q-2)}(t)\,dt.$$

Лема 2. Справедливі співвідношення для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \in \Delta^{(q)}\left(Y_1^*\right),$$

$$nE_n^{(q)}\left(f_n, Y_1^*\right) \ge c_5, \tag{2}$$

$$\left\|f_n^{(j)}\right\| = \left(\frac{8n}{c_3}\right)^{j-q+1} s_{j-q+1} =: (c_6 n)^{j-q+1} s_{j-q+1}, \ j \ge q-1,$$

$$\left\|f_n^{(q-2)}\right\| < 1,$$

$$\left\|f_n\right\| < 1.$$

Доведення. Всі співвідношення легко встановлюються безпосередньою перевіркою, крім (2). Доведемо(2). Для цього позначимо

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases} \text{ і } G(x) := \frac{1}{(q-2)!}\int\limits_0^x (x-t)^{q-2} g(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{x^{q-1}}{(q-1)!}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Тоді

$$0 \le G(x) - f_n(x) = \frac{1}{(q-2)!}\int\limits_0^x (x-t)^{q-2}\left(1 - f_n^{(q-1)}(t)\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{(q-2)!}\int\limits_0^x \left(1 - f_n^{(q-1)}(t)\right)dt = \frac{1}{(q-2)!}\int\limits_0^{3\lambda_n}\left(1 - f_n^{(q-1)}(t)\right)dt = \frac{2\lambda_n}{(q-2)!}, \ x \in [0,1].$$

Звідки $\left\|f_n - G\right\| \le \frac{2\lambda_n}{(q-2)!}$. Оскільки $2G(x) = \frac{x^{q-2}|x|}{(q-1)!} + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} = F_{q+1}(x) + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}$, то, за лемою 1,

$$nE_n^{(q)}\left(f_n, Y_1^*\right) \ge nE_n^{(q)}\left(G, Y_1^*\right) - n\left\|f_n - G\right\| \ge \frac{c_3}{2} - \frac{2\lambda_n n}{(q-2)!} = \frac{c_3}{2} - \frac{2c_3}{8(q-2)!} \ge \frac{c_3}{2} - \frac{c_3}{4} = \frac{c_3}{4} =: \widetilde{c_5}, \ n \ge q-1.$$

З властивостей функцій S випливає, що f_n не є алгебраїчним многочленом, тому можна взяти $c_5 := \min\{\widetilde{c_5}, nE_n^{(q)}\left(f_n, Y_1^*\right) | 1 \le n \le q-2\}$. Нерівність (2) доведена.

Наслідок. Для будь–яких $r \ge q \ge 3$ і $n \in \mathbb{N}$ існує функція $f = f_n \in \Delta^q\left(Y_1^*\right) \cap W^r$ така, що

$$n^{r-1}E_n^{(q)}\left(f, Y_1^*\right) \ge c(r).$$

З властивостей функції f_n і леми 2 випливає наступна лема.

Лема 3. Нехай $r \ge q$, і для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $b \in (0,1]$ позначимо $\lambda_{n,b} := b\lambda_n$, та $f_{n,b}(x) := Af_n\left(\frac{x}{b}\right)$, де

$$A = b^r\left\|f_n^{(r)}\right\|^{-1} = \frac{c_6^{q-r-1} b^r}{s_{r-q+1} n^{r-q+1}}.$$

Для функції $f_{n,b}$ справедливі співвідношення

$$f_{n,b}(x) = 0, \ x \le \lambda_{n,b}, \tag{3}$$

$$f_{n,b}^{(q)}(x) = 0, \ x \ge 3\lambda_{n,b}, \quad f_{n,b} \in \Delta^{(q)}\left(Y_1^*\right),$$

для кожного многочлена $P_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^{(q)}\left(Y_1^*\right)$ має місце оцінка

$$\left\|f_{n,b}-P_n\right\|_{[-b,b]} \geq \frac{Ac_5}{n} =: \frac{c_7 b^r}{n^{r-q+2}},$$

$$\left\|f_{n,b}^{(j)}\right\| = \frac{(c_6 n)^{j-q+1}}{b^j} A s_{j-q+1} = \left(\frac{b}{c_6 n}\right)^{r-j} \frac{s_{j-q+1}}{s_{r-q+1}}, \; j \geq q-1, \tag{4}$$

зокрема,

$$\left\|f_{n,b}^{(r)}\right\| = 1, \tag{5}$$

і для довільного $\lambda > 0$

$$\left\|f_{n,b}^{(j)}\right\|_{[-\lambda,\lambda]} \leq \lambda^{q-1-j}\left\|f_{n,b}^{(q-1)}\right\| = \frac{c_6^{q-1-r} b^{r-q+1}}{s_{r-q+1} n^{r-q+1}} \lambda^{q-1-j} =: \frac{c_8 b^{r-q+1}}{n^{r-q+1}} \lambda^{q-1-j}, \; j = 0,...,q-2. \tag{6}$$

Лема 4. Нехай $r \geq q \geq 3$. Для кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \geq 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\alpha_n = +\infty$, існує функція $f_* \in \Delta^q\left(Y_1^*\right) \cap W^r$ для якої

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n n^{r-q+2} E_n^{(q)}\left(f_*, Y_1^*\right) = +\infty. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку визначимо за індукцією послідовність $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ додатних чисел. Нехай $n_1 = 2$, $b_1 = 1$ і припустимо, що n_{k-1} вже вибрано. Тоді покладемо $b_k := \lambda_{n_{k-1},b_{k-1}}$ і візьмемо $n_k > k^2 n_{k-1}$ таким великим, що має місце нерівність $\alpha_{n_k} b_k^r > k$.

Тепер доведемо, що шукану функцію можна визначити у вигляді збіжного ряду

$$f_*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k,b_k}(x), \; x \in [-1,1].$$

Дійсно, згідно (4) і (6) для $0 \leq j \leq r-1$ справедлива оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|f_{n_k,b_k}^{(j)}\right\| \leq c_* \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k} \leq c_* \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < 2c_* < \infty. \tag{8}$$

Отже,

$$f_*^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k,b_k}^{(j)}(x), \; x \in [-1,1], \; 1 \leq j \leq r-1, \tag{9}$$

та $f \in C^{r-1}[-1,1]$.

Зауважимо, що $3\lambda_{n_k,b_k} < \lambda_{n_{k-1},b_{k-1}}$ для всіх натуральних k .Тому якщо $r > q$, то для будь-якого $x_0 > 0$ існує такий окіл O_{x_0} точки x_0, що для всіх $x \in O_{x_0}$ усі члени ряду (9) рівні нулю, крім, можливо, одного, наприклад, $f_{n_k,b_k}^{(r-1)}(x)$. Отже, можемо продиференціювати почленно цей ряд, тоді отримаємо, що $f_*^{(r)}$ неперервна на $[-1,1]\setminus\{0\}$ і з (5) маємо, що $\left\|f_*^{(r)}\right\| = 1$. Таким чином, приходимо до висновку, що $f_* \in W^r$.

Аналогічно, якщо $r = q$, то для будь-якого $x_0 > 0$ існує такий окіл O_{x_0} точки x_0, що для всіх $x \in O_{x_0}$ усі члени ряду (9), крім, можливо, одного, наприклад, $f_{n_k,b_k}^{(r-1)}(x)$, або рівні нулю або є сталими, причому ряд з цих сталих, згідно (8), є збіжним. Отже, сума ряду (9) рівна сумі $f_{n_k,b_k}^{(r-1)}(x)$ і сталої. Тому $f_* \in W^r$.

І нарешті, для всіх $r \geq q$ зі зазначеного вище випливає, що $f_*^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in (0,1]$, отже, $f_* \in \Delta^{(q)}\left(Y_1^*\right)$.

Покажемо, що для цієї функції виконується співвідношення (7). З цією метою зафіксуємо $k \geq 1$ і розглянемо многочлен $P_{n_k} \in \mathbf{P}_{n_k} \cap \Delta^{(q)}\left(Y_1^*\right)$. Тоді

$$\left\|f_* - P_{n_k}\right\| \geq \left\|f_* - P_{n_k}\right\|_{[-b_k,b_k]} = \left\|\sum_{m=k}^{\infty} f_{n_m,b_m} - P_{n_k}\right\|_{[-b_k,b_k]} = \left\|\left(f_{n_k,b_k} - P_{n_k}\right) + \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m,b_m}\right\|_{[-b_k,b_k]} \geq$$

$$\geq \left\|\left(f_{n_k,b_k} - P_{n_k}\right)\right\|_{[-b_k,b_k]} - \left\|\sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m,b_m}\right\|_{[-b_k,b_k]} \geq c_7 \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}} - \left\|\sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m,b_m}\right\|_{[-b_k,b_k]}.$$

Тепер

$$b_m = b_{m-1}\lambda_{n_{m-1}} = \frac{c_3}{8}\frac{b_{m-1}}{n_{m-1}} =: c_9 \frac{b_{m-1}}{n_{m-1}},$$

так, що

$$\left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m,b_m} \right\|_{[-b_k,b_k]} = \sum_{m=k+1}^{\infty} \left\| f_{n_m,b_m} \right\|_{[-b_k,b_k]} \le c_8 b_k^{q-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_m}^{r-q+1}}{n_{n_m}^{r-q+1}} = c_8 c_9^{r-q+1} b_k^{q-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_{m-1}}^{r-q+1}}{\left(n_{m-1} n_m\right)^{r-q+1}} \le$$

$$\le c_8 c_9^{r-q+1} b_k^{q-1} \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n_m^{r-q}} \le \frac{c_8 c_9^{r-q+1}}{k} \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}} \le \frac{c_7}{2} \frac{b_k^r}{n_k^{r-q+2}},$$

для всіх $k \ge k_0 := 2c_8 c_9^{r-q+1} / c_7$. Отже, для всіх $k \ge k_0$ справедливо виконується нерівність

$$\alpha_{n_k} n_k^{r-q+2} E_{n_k}^{(q)} \left(f_*, Y_1^* \right) \ge \frac{c_7}{2} k \to \infty \text{ при } k \to \infty .$$

Таким чином, нерівність (7) доведено.

Зауваження. Для всіх $j \ge q$, $f_*^{(j)}(x) \equiv 0$, $x \notin [0,1/2]$. Звідси випливає, що f_* є многочленом степеня не вище $q-1$ на проміжку $(\frac{1}{2},1]$, а отже, функцію f_* можна продовжити цим многочленом на проміжок $(1,+\infty)$. Крім того, із співвідношення (3) випливає, що ряд, за допомогою якого визначено функцію f_*, збігається при всіх $x \le 0$, причому його сума рівна нулю. Тому можна вважати, що $f_*(x) = 0$, $x \le 0$.

Тепер доведемо теорему 2. Візьмемо довільний набір точок Y_s і визначимо b так:

$$b := \begin{cases} \min\{1-y_1, y_1 - y_2\}, & \text{якщо } s > 1, \\ 1 - |y_1|, & \text{якщо } s = 1. \end{cases}$$

Покладемо

$$f(x) := b^r f_*\left(\frac{x - y_1}{b} \right), \ x \in [-1,1].$$

Тоді $f \in \Delta^{(q)}(Y_s) \cap W^r$ і ми доведемо, що ця функція задовольняє співвідношення (1). Дійсно, помітимо, що

$$f_*(u) = b^{-r} f(bu + y_1).$$

Візьмемо будь-який $P_{n_k} \in \mathbf{P}_{n_k} \cap \Delta^{(q)}\left(Y_s^*\right)$ і визначимо $Q_n(u) := b^{-r} P_n(bu + y_1)$.

Тоді $Q_n \in \Delta^{(q)}\left(Y_1^*\right)$. Отже, $\|f - P_n\| \ge \|f - P_n\|_{[y_1 - b, y_1 + b]} = b^r \|f_* - Q_n\| \ge b^r E_n^{(q)}\left(f_*, Y_1^*\right)$, так ми отримуємо, що

$$E_n^{(q)}(f, Y_s) \ge b^r E_n^{(q)}\left(f_*, Y_1^*\right).$$

З леми 4 випливає співвідношення (1) і завершує доведення.

Висновки. Посилено контрприклад, який показує, що для кускового q-опуклого $(q \ge 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона – Стєчкіна є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ющенко Л. П. Негативні результати у кусково-опуклому наближенні вищих порядків // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2009. – № 22. – с. 8–10.
2. Leviatan D., Shevchuk I. A. Jackson type estimates for piecewise q-monotone approximation, $q \ge 3$, are not valid // Pure and Applied Functional Analysis. – 2016. – Vol. 1, № 1. – P. 85–96.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.16

Бескрылая С., ассист.
НПУ имени М. П. Драгоманова, Киев

ОБ ОЦЕНКАХ ТИПА ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА ДЛЯ КУСОЧНО q-ВЫПУКЛОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Усилено контрпример, показывающий, что для кусочно q-выпуклого $(q \ge 4)$ приближения алгебраическими многочленами неравенство типа Джексона – Стечкина является неверным даже с константой, зависимой от приближаемой функции.

Bezkryla S., assist.
Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv

ON JACKSON – STECHKIN TYPE ESTIMATES FOR PIECEWICE q-CONVEX APPROXIMATION OF FUNCTIONS

The contrexample wish proves that for the q-coconvex $(q \ge 4)$ approximation by the algebraic polynomials, the Jackson –Stechkin estimates are invalid even with a constant which depends on the function is strengthen.