УДК: 517.9

О. Лопотко, канд. фіз.-мат. наук
Національний лісотехнічний університет України, Львів

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРИ МІШАНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Одержано інтегральне зображення пари мішаних функцій двох змінних, для яких ядро $\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]$, $x_i, y_i \in R^1$, $i=1,2$ ***, додатно визначено.***

ВСТУП. У [3] М. Г. Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер $K(x,y),\ x,y\in R^1$. Згодом Ю. М. Березанський в [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y),\ x,y\in R^1$, за допомогою власних функцій диференціальних операторів, який полягає у введенні за ядром $K(x,y),\ x,y\in R^1$ гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, що розглядаються у цьому просторі. При цьому рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У монографії [2], застосовуючи цю методику, доведено теорему про інтегральне зображення парних додатно визначених (п.д.в.) функцій скінченної кількості змінних. У [4, 5] побудовано інтегральні зображення для пари парних додатно визначених (п.п.д.в.) функцій однієї та двох змінних. У даній статті доведено теорему для пари парних мішаних додатно визначених у сукупності (п.п.м.д.в.с.) функцій двох змінних, пов'язаних з оператором $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\ (j=1,2)$.

ОЗНАЧЕННЯ Пару мішаних парних, дійсних, неперервних функцій $k_1(x), k_2(x), (x\in R^2)$, чому для яких $k_1(x_1,0)=k_2(x_1,0)$, називатимемо додатно визначеними в сукупності (п.м.п.д.в.с.), якщо для довільної фінітної функції виконується нерівність

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2}\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]u(y)u(x)dxdy\ge 0 \tag{1}$$

Іншими словами, неперервне ядро $K(x,y)=\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]$ має бути додатно визначеним.

Теорема. Кожні (п.м.п.д.в.с.) функції $k_1(x), k_2(x)$, які задовольняють оцінку $\left|k_1(x)\right|\le Ce^{N|x|^2}$; $\left|k_2(x)\right|\le Ce^{N|x|^2}$, $N>0, x\in R^2$ допускають зображення

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[k_1(x_1;0)+k_2(x_1;x_2)\right]&=\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)+\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)+\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1\lambda_2),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[k_1(x_1;x_2)+k_2(x_1;0)\right]&=\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)-\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)-\int\limits_{R^1_-\times R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1\lambda_2),\end{aligned} \tag{3}$$

де $d\rho_1(\lambda_1\lambda_2), d\rho_2(\lambda_1\lambda_2), d\rho_3(\lambda_1\lambda_2), d\rho_4(\lambda_1\lambda_2)$, $d\rho_1(\lambda_1\lambda_2), d\rho_2(\lambda_1\lambda_2), d\rho_3(\lambda_1\lambda_2), d\rho_4(\lambda_1\lambda_2)$ – борелівські невід'ємні міри.

Навпаки, функції вигляду (2), (3) є (п.м.п.д.в.с.) функціями.

Доведення. За функціями $\mathrm{k}_1(\mathrm{x}),\mathrm{k}_2(\mathrm{x})$ введемо квазіскалярний добуток у просторі $\mathrm{L}_2(\mathrm{R}^2,d\mathrm{x})$

$$(u,v)_{H_k}=\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2}K(x,y)u(y)v(x)dxdy\,. \tag{4}$$

Після проведення факторизації й поповнення, відносно (4), одержимо гільбертовий простір $\mathrm{H_k}$.

Позначимо $A_j,\ j=1,2$, – мінімальний оператор у просторі $H_0=L_2(R^2;dx)$, який відповідає виразу $L_1^{(j)}=-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2};\ j=1,2$. Кожний із операторів $A_j,\ j=1,2$, допускає продовження оснащення з $D=C_0^\infty(R^2)$. Звуження $A_j^*,\ j=1,2$, на *D* збігається з відображенням $u\to L^{(j)+}u$, де $u\in C_0^\infty(R^2)$, у просторі H_k. За оператори $B_j,\ j=1,2$, (див. [2; гл. VIII, с. 702–703]) можна взяти оператори $u \to L^{(j)+}u$, де $u \in C_0^{\infty}(R^2)$, які діють у просторі $H_+^{(j)} = L_2(R^j; p^j(x_j)dx_j)$, де $p(x)$ вибираємо так, щоб $\int\limits_{R^2} K(x;x)/p(x)dx < \infty$. Функцію операторів C_j в H_+ виконуватимуть оператори вигляду $u \to L^{(j)+}u$, де $u \in D(C_1) = H_+^{(1)} \otimes C_0^{\infty}(R^1)$ і $D(C_1) = C_0^{\infty}(R^1) \otimes H_+^{(1)}$. Оскільки комутативність $K(x,y)$ і A_j еквівалентна ермітовості C_j в H_k, то можна обмежитися перевіркою ермітовості C_j в H_k, тобто рівності

$$\left\langle L^{(j)+}u; v \right\rangle = \left\langle u, L^{(j)+}v \right\rangle (u, v \in C_0^{\infty}(R^2)),\ j = 1,2. \tag{5}$$

Для гладкого додатно визначеного ядра $K(x,y)$ рівність (5) виконується.

Перевіримо (5) для довільного додатно визначеного ядра $K(x,y)$. Цю перевірку достатньо здійснити на функціях вигляду $u(x_1)u(x_2)$, оскільки вони щільні у $L_2(R^2; dx)$. Нехай $j = 2$. Введемо допоміжні парні функції

$$f_1(t) = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} k_1(x_1 + y_1, t)u(y_1)v(x_1)dx_1dy_1 \text{ і } f_2(t) = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} k_2(x_1 + y_1, t)u(y_1)v(x_1)dx_1dy_1.$$

Тоді

$$\left\langle L^{(2)+}u, v \right\rangle = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_1(x_2 + y_2)\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}u(y_2)u(x_2)dx_2dy_2 + \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_2(x_2 - y_2)\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}u(y_2)u(x_2)dx_2dy_2 =$$

$$= \int\limits_{R^1} f_1(y_2)\left(\int\limits_{R^1}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}u(y_2 - x_2)u(x_2)dx_2\right)dy_2 + \int\limits_{R^1} f_2(y_2)\left(\int\limits_{R^1}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}u(y_2 + x_2)u(x_2)dx_2\right)dy_2 =$$

$$= \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_1(x_2 + y_2)u(y_2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(x_2)dx_2dy_2 + \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_2(x_2 - y_2)u(y_2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(x_2)dx_2dy_2 = \left\langle u, L^{(2)+}v \right\rangle.$$

Отже $K(x,y)$ комутує з $-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $j = 1,2$, причому $C_1 < 0$. Дійсно, якщо розглянути допоміжну функцію

$$f(t) = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}\left[k_1(t, x_2 - y_2) + k_2(t, x_2 + y_2)\right]u(y_2)u(x_2)dx_2dy_2,$$

то

$$\left\langle C_1u, u \right\rangle = -\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f(x_1 + y_1)u''(y_1)u(x_1)dx_1dy_1 = -\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1} f(t_1)u''_{t_1}(t_1 - x_1)dt_1\right)\overline{u}(x_1)dx_1 =$$

$$= -\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1} f(t_1)u''_{t_1}(t_1 - x_1)dt_1\right)\overline{u}(x_1)dx_1 = -\int\limits_{R^1} f(t_1)\left(\int\limits_{R^1} u''_{x_1}(t_1 - x_1)u(x_1)dx_1\right)dt_1 =$$

$$= \int\limits_{R^1} u''_{x_1}(t_1 - x_1)\overline{u}(x_1)dx_1 = \left[u(x_1)u'_{x_1}(t_1 - x_1)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{R^1} u'_{x_1}(t_1 - x_1)u'(x_1)dx_1 = -\int\limits_{R^1} f(t_1)\left(\int\limits_{R^1} u'_{x_1}(t_1 - x_1)u'(x_1)dx_1\right)dt_1 =$$

$$= -\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f(x_1 + z_1)u'(z_1)u'(x_1)dx_1dz_1 \le 0,$$

Отже $C_1 < 0$.

Тепер для ядра $K(x,y)$ можна застосувати теорему 4.3 [2; с. 708–709] і одержати таке зображення

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)\right] = \int\limits_{R^2}\Omega_\lambda(x,y)d\rho(\lambda) = \int\limits_{R^1 \times R^1}\sum_{\alpha,\beta \in A} X_\alpha(x,\lambda)\overline{X_\beta(y,\lambda)}d\sigma_{\alpha\beta},\ (x, y \in R^2), \tag{6}$$

де

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Omega_\lambda = \lambda_j\Omega_\lambda, \quad -\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Omega_\lambda = \lambda_j\Omega_\lambda, \quad d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2}\Omega_\lambda}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{y_1}^{\beta_1}\partial_{y_2}^{\beta_1}}(0;0)d\rho(\lambda),$$

$$X_\alpha(x,\lambda) = X_{\alpha_1}^{(1)}(x_1,\lambda_1)X_{\alpha_2}^{(2)}(x_2,\lambda_2),\ X_0^{(j)}(x_j,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda_j}x_j,\ X_1^{(j)}(x_j,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_j}x_j}{\lambda_j},\ j = 1,2,$$

А – паралелепіпед з цілечисленними вершинами $\alpha_1 = 0,1,\ \alpha_2 = 0,1.$

Якщо тепер зробимо (6) заміну $x_1 = -x_1, y_1 = -y_1$ і додамо отриману рівність до (6), а потім в одержаній рівності зробимо заміну $x_2 = -x_2, y_2 = -y_2$ і додамо отриману рівність до попередньої, то отримаємо таке зображення

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1 + y_1; x_2 - y_2) + k_2(x_1 + y_1; x_2 + y_2)\right] = \int\limits_{R_-^1 \times R^1}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\sigma_{0000}(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+\int\limits_{R_-^1 \times R^1}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2}{\lambda_2}\cdot\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\sigma_{0101}(\lambda_1;\lambda_2) + \int\limits_{R_-^1 \times R^1}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\lambda_1}\cdot\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\times$$

$$\times\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\sigma_{1010}(\lambda_1;\lambda_2)+\int\limits_{R_-^1\times R^1}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2}{\lambda_2}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\sigma_{1111}(\lambda_1;\lambda_2). \quad (7)$$

Якщо у (7) покласти $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2$, то одержимо (2), а якщо у (7) покласти $x_1 = y_1,\ y_2 = -x_2$ то одержимо (3).

Однозначність мір у (2) і (3), за умови, що $k_1(x),\ k_2(x)$ задовольняють оцінку, випливає з того, що замикання в H_k операторів $C_j,\ j = 1,2$, самоспряжене і комутуюче.

Останнє твердження теореми доводимо наступним чином. Спочатку доведемо, що із (2) і (3), якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \geq 0$ випливає нерівність (1). Дійсно, у цьому випадку елементарне ядро має вигляд

$$\Omega_\lambda(x,y) = ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 + ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_2}y_2 +$$
$$+sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 + sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 \sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0) = 1,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0) = |\lambda_1|,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0) = \lambda_2,\ \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0) = |\lambda_1|\lambda_2,$$

а міри у (2) і (3) – такий вигляд:

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2) = \Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda) = d\rho(\lambda),\quad d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda) = \lambda_2 d\rho(\lambda),$$

$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda) = |\lambda_1|d\rho(\lambda),\quad d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda) = |\lambda_1|\lambda_2 d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у вигляді

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1;0)+k_2(x_1;x_2)\right] = \int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 d\rho(\lambda), \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1;x_2)+k_2(x_1;0)\right] = \int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda). \quad (9)$$

Із (8) і (9) знаходимо

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;0)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]+\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;0)\right] =$$
$$= \int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)d\rho(\lambda) + \int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda).$$

Враховуючи рівність

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;0)+k_2(x_1+y_1;0)\right] = \int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)d\rho(\lambda)$$

і переходячи до мір $d\rho_1(\lambda), d\rho_2(\lambda), d\rho_3(\lambda), d\rho_4(\lambda)$, знаходимо

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right] = \int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_1(\lambda) +$$
$$+\int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_2(\lambda) + \int\limits_{R_-^1\times R_+^1}\frac{sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_3(\lambda) + \quad (10)$$
$$+\int\limits_{R_-^1\times R_+^1}\frac{sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_4(\lambda).$$

За допомогою (10) перевіряємо (1).

Доведемо тепер нерівність (1), якщо в (2) і (3) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. У цьому випадку елементарне ядро має такий вигляд

$$\Omega_\lambda(x,y) = ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 ch\sqrt{-\lambda_2}y_2 + ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 sh\sqrt{-\lambda_2}x_2 sh\sqrt{-\lambda_2}y_2 +$$
$$+sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 ch\sqrt{-\lambda_2}y_2 + sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1 sh\sqrt{-\lambda_2}x_2 sh\sqrt{-\lambda_2}y_2,$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0) = 1,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0) = |\lambda_1|,\quad \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0) = \lambda_2,\quad \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0) = |\lambda_1||\lambda_2|,$$

а міри (2) і (3) – відповідно

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2) = \Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda) = d\rho(\lambda),$$

$$d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda) = \lambda_2 d\rho(\lambda),$$

$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)\,d\rho(\lambda)=|\lambda_1|d\rho(\lambda)\,,\quad d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_1|\lambda_2 d\rho(\lambda);$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у вигляді:

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1;0)+k_2(x_1;x_2)\right]=\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda)\,, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1;x_2)+k_2(x_1;0)\right]=\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 d\rho(\lambda)\,. \tag{12}$$

Із (11) і (12) знаходимо

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;0)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]+\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;0)\right]=$$
$$=\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)ch\sqrt{-\lambda_2}(x_2+y_2)d\rho(\lambda)+\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)d\rho(\lambda)$$

Враховуючи рівність $\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;0)+k_2(x_1+y_1;0)\right]=\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)d\rho(\lambda)$ і переходячи до мір $d\rho_1(\lambda)$, $d\rho_2(\lambda)$, $d\rho_3(\lambda)$, $d\rho_4(\lambda)$ знаходимо

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]=\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 ch\sqrt{-\lambda_2}y_2 d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_1}y_1\frac{sh\sqrt{-\lambda_2}x_2 sh\sqrt{-\lambda_2}y_2}{|\lambda_2|}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)+\int\limits_{R_-^1\times R_-^1}\frac{sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 ch\sqrt{-\lambda_2}y_2 d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R_-^1\times R_-^1}\frac{sh\sqrt{-\lambda_1}x_1 sh\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\frac{sh\sqrt{-\lambda_2}x_2 sh\sqrt{-\lambda_2}y_2}{|\lambda_2|}d\rho_4(\lambda_1\lambda_2). \tag{13}$$

За допомогою (13) перевіряємо (1).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $k_2(x_1,x_2)=0$, то оператори $C_1<0,\ \ C_2\ge 0$ і одержимо зображення для звичайних мішаних парних функцій $k_2(x_1;x_2)=\int\limits_{R_-^1\times R_+^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda_1\lambda_2)$.

Зауваження 2. Якщо $k_1(x_1,x_2)=0$, то оператори $C_1<0, C_2<0$ і одержимо зображення [2, с. 711] для парних функцій. $k_2(x_1;x_2)=\int\limits_{R_-^1\times R_-^1} ch\sqrt{-\lambda_1}x_1 ch\sqrt{-\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda_1\lambda_2)$

ВИСНОВКИ. Доведено теорему, яка є узагальненням теореми 4.5 [2, с. 711] і приклада 5 [2, с. 712] для парних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березанский Ю. М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1956. – 108. №3. – С.893–896.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. Думка, 1965. – 798 с.
3. Крейн М. Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. // Докл. АН СССР. – 1946. – 53, №1. – с. 3–6.
4. Лопотко О. В. Інтегральне зображення парних додатно визначених функцій однієї змінної // Укр. мат. Журнал. – 2010. – 62, т. № 2. – С. 281–284.
5. Лопотко О. В. Інтегральне зображення парних додатно визначених функцій двох змінних // Укр. мат журнал. – 2011. – 63, т. № 6. – С. 844–853.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.16

Лопотко О., канд. физ.-мат. наук
Национальный лесотехнический университет Украины, г. Львов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРЫ СМЕШАННЫХ ЧЁТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Получено интегральное представление для пары смеганных четно-положительно определенных функций двух переменных, для которых ядро $\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]$, $x_i,y_i\in R^1$, $i=1,2$, *положительно определено.*

Lopotko O., PhD
Ukrainian University Forest of Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATION FOR PAIR MIX EVEN POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

The integral representation is obtained for mix even positively definite functions of two variables. Kernel $\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2+y_2)\right]$, $x_i,y_i\in R^1$, $i=1,2$ *is positively definite.*