Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 (при $f_j(t,r,\varphi,z)\equiv 0$) розглянута гіперболічна крайова задача є математичною моделлю вільних коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному суцільному циліндрі.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в необмеженому кусково-однорідному суцільному циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука. 1978.
2. Быблив О. Я., Ленюк М. П. Интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода для кусочно-однородных сегментов с применением к задачам математической физики // Вычисл. и прикл. математика. – К., 1988. – Вып. 65. – С. 24–34.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
4. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: ИЛ, 1961.
5. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
6. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
7. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004.
8. Конет І. М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013.
9. Митропольський Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка. 1991.
10. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006.
11. Самойленко А. М., Ткач Б. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1992.
12. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
13. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1962.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат, 1956.
16. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во МГУ, 1991.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.

Стаття надійшла до редколегії 06.11.15

Конет И., д-т физ.-мат, наук, проф., Пилипюк Т., канд, физ,-мат, наук
Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (функций влияния и функций Грина) впервые построено интегральное представление точного аналитического решения гиперболической краевой задачи для неограниченного кусочно-однородного цилиндра.

Konet I., Full Doctor, Prof., Pylypiuk T., PhD
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE UNLIMITED PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence functions and Green's functions) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem for unlimited piecewise homogeneous cylinder is constructed for the first time.

УДК 517.9

М. Яременко, канд. фіз.-мат. наук
Міжнародний математичний центр НАН України
e-mail: math.kiev@gmail.com

КВАЗІЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ СИСТЕМИ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянуто квазілінійні еліптичні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними у всьому евклідовому просторі, встановлено нові більш слабкі умови існування розв'язку таких систем в певному класі функцій та його єдиність (результати нові у випадку лінійних систем та квазілінійного рівняння $N=1$).

Вступ. Стаття присвячена дослідженню умов існування розв'язку квазілінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь з вимірними коефіцієнтами, тобто встановленню обмежень на не лінійність, за яких система буде мати розв'язок і дослідженню єдиності такого розв'язку в певному класі функцій [9].

Методи дослідження подібних систем є подібними до тих, що застосовуються для розгляду одного рівняння (у нашому випадку при $N=1$) але у випадку системи розглядається не скалярний простір, а векторний, тобто всі означення, теореми і леми повинні бути переформульовані в нових термінах з відповідними змінами. При цьому поняття спряженого елементу набуває дещо іншого змісту, навіть поняття узагальненого розв'язку можна формулювати по різному [9].

При дослідженні квазілінійних систем (або рівнянь у випадку $N=1$, який допускається в даній статті, але за умов $l>2$) важливими є результати які стосуються відповідних лінійних систем (або рівнянь).

При дослідженні подібних задач основна увага зосереджується на двох напрямках: по-перше, це – умови росту, по-друге, умови щодо сингулярності.

Найкращими з відомих результатів (з невеликими змінами щодо сингулярностей), які стосуються квазілінійних рівнянь та систем, є результати які сформульовано в [9 с. 465]. Але це зовсім не означає, що умови згаданої вище праці не були покращені для певних класів рівнянь, навпаки, таких робіт досить багато [5–8].

На відміну від квазілінійних рівнянь та систем, в лінійному випадку вдалося значно покращити результати, що згадані вище, і одержати майже необхідні умови щодо коефіцієнтів. Оскільки ці умови важливі для розуміння наших результатів. То коротко опишемо сучасний стан проблеми у випадку одного лінійного рівняння.

Розглядається рівняння загального вигляду:

$$\Lambda u = 0, \text{ де } \Lambda = -\nabla a \nabla + \tilde{b}\nabla - \nabla b + v,$$

$a(x): R^l \mapsto R^l \otimes R^l$ – гладка симетрична еліптична матриця, що задовольняє умову: $\exists \varsigma, \xi: \ 0 < \varsigma \le \xi < \infty$ і виконується нерівність: $\varsigma \mathrm{I} \le a(x) \le \xi \mathrm{I}$, для всіх $x \in R^l$; $\tilde{b}$, $b: R^l \mapsto R^l$, $v: R^l \mapsto R$.

Для дослідження подібних задач визначаються певні класи функцій.

Означення 1. Нехай $\varphi \in L^2_{loc}(R^l, d^l x)$. Функцію $n(\varphi;\lambda) = ess \sup\limits_{x \in R^l} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} (\mathrm{e}^{t\Delta} |\varphi|^2 (x))^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ називають нормою Неша функції φ.

Аналогічно для функції $\varphi \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ визначаються величини $k_l(\varphi;\lambda)$ і $k_{l+1}(\varphi;\lambda)$ за допомогою формул:

$$k_l(\varphi;\lambda) = ess \sup_{x \in R^l} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} |\varphi|(x) dt, \ \ k_{l+1}(\varphi;\lambda) = ess \sup_{x \in R^l} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} |\varphi|(x) \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Функція φ належить класу Неша N_2 тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\lambda \to \infty} n(\varphi;\lambda) = 0$. Аналогічно, функція φ належить класам Като K_l і K_{l+1}, тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\lambda \to \infty} k_l(\varphi;\lambda) = 0$ і $\lim\limits_{\lambda \to \infty} k_{l+1}(\varphi;\lambda) = 0$, відповідно. Функція належить класу Неша N_2 тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\lambda \to \infty} n(\varphi;\lambda) = 0$. Функція належить класу Неша N^α_φ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{\lambda \to \infty} n(\varphi, \alpha;\lambda) = 0.$

Означення 2. Клас форм-обмежених функцій $PK_\beta(A)$ визначається формулою:

$$PK_\beta(A) = \left\{ f \in L^1_{loc}(R^l, d^l x) : \left|\langle h\, f\, h \rangle\right| \le \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \| h \|_2^2 \right\}, \text{де } \beta > 0, \quad c(\beta) \in R^1.$$

Приклади :

1. Справедливі вкладення функціональних просторів: $\{L^p(R^l, d^l x) + L^\infty(R^l, d^l x), \quad p > l, \quad l \ge 2\} \subset N_2 \subset K_{l+1}$.

2. Якщо $\varphi(t) = e^{-1}$ при $t \ge e^{-e}$ і $\varphi(t) = \left(\left(\log \frac{1}{t} \right) \left(\log \log \frac{1}{t} \right)^{1+\varepsilon} \right)^{-1}$ при $t \ge e^{-e}$ і довільному $\varepsilon > 0$. Тоді можна отримати, що $\left\{ L^{q,p}_{loc,u}(R^l, d^l x), \quad \frac{l}{2p} + \frac{1}{q} < 1, \quad l \ge 2 \right\} \subset N^\alpha_\varphi$.

3. Цікавим є випадок параболічного рівняння вигляду: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda \right) u = 0,$ де $\Lambda = -\nabla a \nabla + \tilde{b}\nabla - \nabla b + v,$ $a(\cdot): \Omega \mapsto R^l \otimes R^l$ – симетрична еліптична матриця, яка задовольняє умову: $\exists \varsigma: \ 0 < \varsigma < \infty$ виконується нерівність: $\varsigma \mathrm{I} \le a(\cdot), \quad x \in R^l; \quad a(\cdot) \in \left[L^1_{loc}(\Omega) \right]^{l \times l}$. Квадратична форма $H(u,v) = \langle \nabla u \bullet a \bullet \nabla v \rangle, \ \ u, v \in C^1_0(\Omega)$, може бути замкненою в L^2. Нехай A_D – генератор, породжений замиканням форми $H(u,v)$ в L^2 і нехай оператор A_D знову позначаємо через A, тоді внаслідок теорії Берлінг – Дінні в просторі L^p, $1 \le p < \infty$, існує позитивна стискаюча напівгрупа класу C_0, генератором якої є оператор $-A_p$ і $A = A_2$. Отже, оператор ∇b можна розглядати як мале збурення оператора A, що визначений вище, в просторах L^2 чи L^p відповідно. Нехай $b \bullet a^{-1} \bullet b \in PK_\beta(A)$ при деякому $\beta < 1$, де оператор A – оператор Лапласа, тоді є вірною нерівність: $\left| \langle \nabla \varphi \bullet b \varphi \rangle \right| \le \sqrt{\beta} \, \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{c(\beta)}{2\beta} \|\varphi\|^2$ $\forall \varphi \in D(\Delta)$. Зазначені умови і нерівність $\beta < 1$ дають можливість твердити про існування в просторі L^p, C_0 – напівгрупи стиску $e^{-t\Lambda_p}$, $\frac{2}{2-\beta} \le p < \infty$, де $\Lambda = A + b \bullet \nabla$. Далі для випадку лінійних операторів доводимо таку теорему: якщо $b \bullet a^{-1} \bullet b, \quad \tilde{b} \bullet a^{-1} \bullet \tilde{b} \in PK_1(\beta A + v^+) \quad \forall \beta > 0$, де $v = v^+ - v^-, 0 \le v^\pm \in L^1_{loc}$, то в просторі L^p, $1 < p < \infty$, існує така квазістискаюча напівгрупа $e^{-t\Lambda_p}$ класу C_0 з генератором $-\Lambda_p$, що $\Lambda_2 = A + \tilde{b}\nabla - \nabla b + v$, і справедлива є наступна оцінка: $\left\| e^{-t\Lambda_p} \right\|_{r \to q} \le C_{r,q} e^{t\omega_{r,q}} t^{\frac{-l(r-q)}{2rq}}, \quad 1 < r < q < \infty, \quad t > 0.$

Для порівняння з результатами, які одержано у данні статті для квазілінійних систем, важливим є випадок лінійного рівняння вигляду: $\left(-\nabla a \nabla + \tilde{b}\nabla - \nabla b \right) u = 0$ *для якого доводиться, що достатніми умовами існування* *розв'язку цього рівняння є належність функцій-коефіцієнтів рівняння $\tilde{b}$ класу Неша та b класу Като, або $\tilde{b}$ класу Като, а b класу Неша, тобто один з функціональних коефіцієнтів повинен належати класу Неша, а інший класу Като (в цьому розумінні класи Неша та Като взаємно спряжені).*

Означення 3. *Соболевий простір $W_m^p(R^l, d^l x)$ (або $W_m^p(R^l)$ чи W_m^p) є банаховий простором, який утворюють всі елементи простору $L^p(R^l)$, узагальнені похідні яких існують до m-го порядку включно і є інтегрованими зі степеню p.*

$W_{m,0}^p(R^l, d^l x)$ – множина елементів $W_m^p(R^l, d^l x)$, носій яких є компактним. Лінійні операції визначаються формулою подібною до випадку простору Лебега, норма вводиться за наступною рівністю: $\|f\|_{W_m^p} = \left(\|f\|_{L^p}^p + \sum\limits_{1 \le |s| \le m} \left\| D^s f \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, або p – та степінь норми $\|f\|_{W_m^p}^p = \sum\limits_{|s| \le m} \left\| D^s f \right\|^p$. *Спряженим до простору $W_m^p(R^l, d^l x)$ простір $W_{-m}^q(R^l, d^l x)$, який за означенням можна ввести як простір усіх лінійних функціоналів на лінійному просторі $W_m^p(R^l, d^l x)$. Двоїстий елемент має вигляд $f^{cn} = -\sum\limits_{r=1,..,l} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} \left| \frac{\partial f}{\partial x_r} \right|^{p-2} \right)$.*

Оскільки дана стаття присвячена дослідженню систем квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, то невідомою є вектор-функція, тобто елемент $u = (u_1(x), ..., u_N(x)),\ x \in R^l$, або упорядкована множина з N елементів певного функціонального простору, наприклад $u_i \in W_m^p(R^l, d^l x),\ i = 1, ..., N$.

Будемо використовувати наступні позначення:

$$\|u\|_{L^p(R^l)} = \left\langle \sum_{i=1,...,N} |u_i|^p \right\rangle^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1,...,N} \left\langle |u_i|^p \right\rangle \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1,...,N} \langle u_i, v_i \rangle \ \forall u \in L^p(R^l) \forall v \in L^q(R^l),$$

де під елементом $u \in L^p(R^l)$ мається на увазі упорядкований набір елементів довжини N, кожен з яких належить скалярному простору $L^p(R^l)$, а v за аналогією належить двоїстому простору $L^q(R^l)$.

Має місце рівність: $\|u\|_{L^p(R^l)}^{p-1} = \left\langle \sum\limits_{i=1,...,N} |u_i|^p \right\rangle^{\frac{p-1}{p}} = \left\langle \sum\limits_{i=1,...,N} \left(|u_i|^{\frac{p}{q}} \right)^q \right\rangle^{\frac{1}{q}} = \left\| u^{p-1} \right\|_{L^q(R^l)}$.

Норма в векторному просторі $W_m^p(R^l, d^l x)$: $\|u\|_{W_m^p} = \left(\sum\limits_{i=1,...,N} \left(\|u_i\|_{L^p}^p + \sum\limits_{1 \le |s| \le m} \left\| D^s u_i \right\|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}$, тобто належність вектор-функції до якого-небудь функціонального простору означає, що кожна компонента вектор-функції належить до цього простору.

1. Постановка задачі. Розглянемо в усьому евклідовому просторі R^l систему вигляду:

$$\lambda u^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, \vec{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} u^k \right) + b^k(x, \vec{u}, \nabla \vec{u}) = f^k, \quad k = 1, ..., N, \tag{1}$$

де невідомою є вектор-функція $u^k(x) = (u^1, ..., u^N)$, $\lambda > 0$ – дійсне число і $f(x) = f^k = (f^1, ..., f^N)$ – задана вектор-функція. Тут $b(x, u, \nabla u) = b^k(x, \vec{u}, \nabla \vec{u})$ – вектор-функція розмірності N трьох змінних: вектора розмірності l, вектора розмірності N, матриці розмірності $l \times N$.

Кажуть, що вимірна матриця $a_{ij}(x, u)$ розмірності $l \times l$ задовольняє умову еліптичності, якщо $\exists \nu:\ 0 < \nu < \infty$ і виконується наступна нерівність $\nu \mathrm{I} \le a(x, u)$ для майже всіх $x \in R^l$, тобто

$$\nu \sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 \le \sum_{ij=1,...,l} a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in R^l. \tag{2}$$

Зауваження. Будемо вважати, що система (1) складається з N нелінійних рівнянь з N невідомими функціями причому припускається, що N може дорівнювати одиниці і рівняння можуть бути лінійними, але всі функції визначені на евклідовому просторі R^l, причому завжди $l \ge 3$ іншими словами випадок прямої і площини виключений із дослідження (в цих випадках ми потрапляємо в умови відомих контр прикладів).

Узагальненим (слабким) розв'язком в $W_1^p(R^l, d^l x)$ будемо називати елемент $u(x)$ який задовольняє інтегральну тотожність:

$$\lambda \langle u, v \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,...N} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle + \langle b, v \rangle = \langle f, v \rangle, \tag{3}$$

для будь-якого елементу $v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$.

Виходячи з цього означення за лівими частинами системи (1) побудуємо форму $h_\lambda^p : W_1^p \times W_1^q \to R$:

$$h_\lambda^p(u,\nu) \equiv \lambda\left\langle u,v\right\rangle + \left\langle \nabla v \circ a \circ \nabla u\right\rangle + \left\langle b(x,u,\nabla u),v\right\rangle , \tag{4}$$

яку вважатимемо визначеною для всіх елементів $u \in W_1^p(R^l, d^l x), v \in W_1^q(R^l, d^l x)$. Дана скалярна форма визначена на векторних функціональних просторах $W_1^p(R^l, d^l x)\times W_1^q(R^l, d^l x)$ розмінностей N і приймає дійсні числові значення, тобто

$$h_\lambda^p : \left(\mathop{\times}_1^N W_1^p(R^l, d^l x)\right)\times\left(\mathop{\times}_1^N W_1^q(R^l, d^l x)\right) \to R .$$

Основний об'єкт дослідження – існування розв'язку таких систем, тобто встановлення належності узагальненого розв'язку певному функціональному простору за умов, що коефіцієнти рівняння належать до певних функціональних класів і просторів.

2. Умови на функції, що утворюють систему (1).

1. $b(x,y,z)$ є вимірною векторною функцією своїх аргументів і $b \in L_{loc}^1(R^l)$;

2. Вектор-функція $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє нерівності:

$$\left|b\left(x,u,\nabla u\right)\right| \le \mu_1(x)\left|\nabla u\right| + \mu_2(x)\left|u\right| + \mu_3(x) . \tag{5}$$

В умові (5) функції $\mu_1{}^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_1{}^2 \in L\,{}^1_{loc}(R^l, d^l x)$, $\left|\left\langle h\,\mu_1{}^2\,h\right\rangle\right| \le \beta\left\langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\right\rangle + c\left(\beta\right)\|\,h\,\|_2^2$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_2 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$, $\left|\left\langle h\,\mu_2 h\right\rangle\right| \le \beta\left\langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\right\rangle + c\left(\beta\right)\|\,h\,\|_2^2$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$.

3. Приріст вектор-функції $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє умову:

$$\left|b\left(x,u,\nabla u\right) - b\left(x,v,\nabla v\right)\right| \le \mu_4(x)\left|\nabla\left(u-v\right)\right| + \mu_5(x)\left|u-v\right| , \tag{5a}$$

де $\mu_4{}^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_4{}^2 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$ і $\left|\left\langle h\,\mu_4{}^2\,h\right\rangle\right| \le \beta\left\langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\right\rangle + c\left(\beta\right)\|\,h\,\|_2^2$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_5 \in L_{loc}^1(R^l, d^l x)$ і $\left|\left\langle h\,\mu_5 h\right\rangle\right| \le \beta\left\langle \nabla h \circ a \circ \nabla h\right\rangle + c\left(\beta\right)\|\,h\,\|_2^2$.

3. Побудова оператора, що породжений формою, яка складена за лівими частинами системи (1). Дослідження будемо проводити за допомогою наступної схеми: за рівнянням будуємо форму і вивчаємо її властивості, показуємо, що з цією формою можна асоціювати певний нелінійний оператор властивості якого вивчаються за допомогою форми, що породжує його. Використовуючи метод монотонних операторів показуємо, що вихідна система має розв'язок в певному Соболевському просторі.

Реалізувати цю схему можна лише у випадку існування певних апріорних оцінок. Подібні оцінки є теоремами про властивості розв'язків за певних умов на функції, що утворюють дану систему, тобто припускаємо певну гладкість коефіцієнтів і отримуємо гладкість розв'язків системи. Оцінки розв'язків є ключовим моментом доведення теорем існування і за наявності таких оцінок можна використати різні методи доведення розв'язності системи.

Перевага методу аналізу нелінійних операторів полягає в загальності підходу до розгляду задачі і можливості застосування більш слабких умов на коефіцієнти, а недолік – в неможливості врахувати специфіку функцій, з яких складається задана система.

Оцінимо форму (4), яка складена за системою (1) на спряженому елементі $u\left|u\right|^{p-2} = \left(u_1\left|u_1\right|^{p-2},\dots,u_N\left|u_N\right|^{p-2}\right)$:

$$\left|h_\lambda^p(u,u\left|u\right|^{p-2})\right| \equiv \left|\lambda\left\langle u,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left(u\left|u\right|^{p-2}\right)\circ a \circ \nabla u\right\rangle + \left\langle b(x,u,\nabla u),u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle\right| \le$$

$$\le \lambda\left\|w\right\|^2 + \frac{4\left(p-1\right)}{p^2}\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + \left\langle \mu_1(x)\left|\nabla u\right| + \mu_2(x)\left|u\right| + \mu_3(x),\left|u\right|^{p-1}\right\rangle \le$$

$$\le \lambda\left\|w\right\|^2 + \frac{4\left(p-1\right)}{p^2}\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + \frac{2}{p}\left\langle \mu_1\left|\nabla w\right|,\left|w\right|\right\rangle + \beta\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2 + \left\|\mu_3\right\|\left\|u\right\|^{p-1} ,$$

де використано позначення вектор-функції $w = u\left|u\right|^{\frac{p-2}{2}}$, відповідно матриця $\nabla w = \frac{p}{2}\left|u\right|^{\frac{p-2}{2}}\nabla u$ і оцінки:

$$\left\langle \mu_1\left|\nabla u\right|,\left|u\right|^{p-1}\right\rangle = \left\langle \mu_1\left|u\right|^{\frac{p-2}{2}}\left|\nabla u\right|,\left|u\right|^{\frac{p}{2}}\right\rangle \le \frac{2}{p}\left\langle \mu_1\left|\nabla w\right|,\left|w\right|\right\rangle ,\ \left\langle \mu_2(x),w^2\right\rangle \le \beta\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2 ,$$

$$\left\langle \mu_3(x),\left|u\right|^{p-1}\right\rangle \le \left\|\mu_3\right\|\left\|\,\left|u\right|^{p-1}\right\| = \left\|\mu_3\right\|\left\|u\right\|^{p-1} ,$$

тут $\left|u\right|^{p-1} = \left(\sum_{i=1,..,N}\left|u_i\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$. Далі використаємо нерівності Гельдера та Юнга

$$\frac{2}{p}\left\langle \mu_1\left|\nabla w\right|,\left|w\right|\right\rangle \le \frac{2}{p}\left\|\mu_1 w\right\|\left\|\nabla w\right\| ,\ \left\|\mu_1 w\right\| = \left\langle \left(\mu_1 w\right)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \le \left(\beta\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle + c\left(\beta\right)\left\|w\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

отже $$\frac{2}{p}\left\langle \mu_1|\nabla w|,|w|\right\rangle \le \frac{2}{p}\|\mu_1 w\|\|\nabla w\| = \frac{2}{p}\|\nabla w\|\left\langle (\mu_1 w)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \le \frac{2}{p}\|\nabla w\|\left(\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2\right)\right).$$

Тоді одержимо
$$\left|h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2})\right| \le \lambda\|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2\right)\right) +$$
$$+\beta\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2 + \frac{\sigma^p}{p}\|\mu_3\|^p + \frac{1}{\sigma^q q}\|u\|^p,$$
маємо $$\left|h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2})\right| \le \left(\lambda + \left(\frac{\varepsilon^2}{p}+1\right)c(\beta) + \frac{1}{\sigma^q q}\right)\|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} + \frac{\beta\varepsilon^2}{p} + \beta\right)\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + \frac{1}{p}\frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla w\|^2 + \frac{\sigma^p}{p}\|\mu_3\|^p.$$

Зауваження. Тут $\|w\|^2_{L^2(R^l)} = \|u\|^p_{L^p(R^l)}$, бо $\|w\|^2_{L^2(R^l)} = \left\langle \sum_{i=1,..,N} u_i|u_i|^{\frac{p-2}{2}}, u_i|u_i|^{\frac{p-2}{2}}\right\rangle = \|u\|^p_{L^p(R^l)}$.

Проаналізуємо сенс числових коефіцієнтів, які входять в оцінку форми: коефіцієнт β – форм-грань, залежить лише від даних задачі (гладкості коефіцієнтів системи (μ_i)); коефіцієнт $c(\beta)$ залежить від β; коефіцієнти ε і σ – довільні додатні сталі; коефіцієнт ε вибирається в залежності від матриці a сталих еліптичності, при чому коефіцієнт σ впливає на здвиг спектру його значення менш суттєве.

Отже, для кожного фіксованого вектора $u\in W_1^p$ форма $h_\lambda^p(u,v)$ є неперервним лінійним (по $v\in W_1^q$) функціоналом над W_1^q. Отже кожному $u\in W_1^p$ ставиться у відповідність елемент спряженого до W_1^q простору W_{-1}^p, тобто існує відображення $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$.

4. Дослідження відображення $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$. Оператор $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$ діє таким чином: $h_\lambda^p(u,v) = \left\langle A^p(u), v\right\rangle$.

Означення 4. *Оператор $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$ називається коерцитивний, якщо форма $h_\lambda^p(u,v) = \left\langle A^p(u), v\right\rangle$ задовольняє умову:*
$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}\to\infty} \frac{h_\lambda^p\left(u,u|u|^{p-2}\right)}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}} = \infty. \quad (6)$$

Лема 1. Оператор $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$ є коерцитивним.

Доведення. Для доведення потрібно оцінити форму, що породжує оператор знизу, це можна зробити за допомогою оцінок, які аналогічні тим, що записані вище, а саме:
$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2}) = \lambda\left\langle u,u|u|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left(u|u|^{p-2}\right)\circ a\circ\nabla u\right\rangle + \left\langle b(x,u,\nabla u), u|u|^{p-2}\right\rangle \ge$$
$$\ge \lambda\|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle - \left\langle \mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x), |u|^{p-1}\right\rangle \ge$$
$$\ge \left(\lambda - \left(\left(\frac{\varepsilon^2}{p}+1\right)c(\beta) + \frac{1}{\sigma^q q}\right)\right)\|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \left(\frac{\beta\varepsilon^2}{p} + \beta + \frac{1}{\nu p}\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right)\left\langle \nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle - \frac{\sigma^p}{p}\|\mu_3\|^p,$$
позначення ті самі, що і в попередньому пункті, але у даному випадку доданком $\frac{\sigma^p}{p}\|\mu_3\|^p$ можна знехтувати, бо це – постійне число. Важливе значення має число β, бо це – міра сингулярності коефіцієнтів, саме форм-грань вирішує, який знак має другий доданок в оцінці форми, оскільки ε пов'язує здвиг спектру і сингулярність.

Означення 5. *Оператор $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$ є акретивний в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, якщо виконується нерівність:*
$$\left\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle \ge 0, \forall u,v\in W_1^p\left(R^l, d^l x\right). \quad (7)$$

Пояснення. Різниця розуміється як різниці елементів N мірного лінійного (евклідового) простору, тобто по елементна, а $(u-v)|u-v|^{p-2} = \left((u_1-v_1)|u_1-v_1|^{p-2}, ..., (u_N-v_N)|u_N-v_N|^{p-2}\right)$.

Зауваження. *Оператор $A^p: W_1^p \to W_{-1}^p$ називається строго акретивний в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, якщо виконується нерівність: $\left\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle \ge 0, \forall u,v\in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ і $\left\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle = 0$, $\forall u,v\in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ можливо лише тоді і тільки тоді коли $u=v$.*

Лема 2. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ визначає строго акретивне відображення в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$

Доведення. Дана властивість є однією з ключових при використанні методу монотонності, а тому її детальне доведення.

$$\left\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\langle u, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left((u-v)|u-v|^{p-2}\right)\circ a\circ\nabla u\right\rangle + \left\langle b(x,u,\nabla u), (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle -$$

$$-\lambda\left\langle v, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left((u-v)|u-v|^{p-2}\right)\circ a\circ\nabla v\right\rangle + \left\langle b(x,v,\nabla v), (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\langle u-v, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left((u-v)|u-v|^{p-2}\right)\circ a\circ\nabla(u-v)\right\rangle + \left\langle b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v), (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\left\langle u-v, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \nabla\left((u-v)|u-v|^{p-2}\right)\circ a\circ\nabla(u-v)\right\rangle - \left\langle \mu_4(x)\left|\nabla(u-v)\right| + \mu_5(x)|u-v|, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda\|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle - \left\langle \mu_4(x)\left|\nabla(u-v)\right| + \mu_5(x)|u-v|, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle,$$

де введено позначення

$$w = (u-v)|u-v|^{\frac{p-2}{2}}, \quad \nabla w = \frac{p}{2}|u-v|^{\frac{p-2}{2}}\nabla(u-v).$$

Далі оцінимо

$$\frac{2}{p}\left\langle\mu_4(x)|\nabla w|, |w|\right\rangle \le \frac{2}{p}\|\mu_4 w\|\,\|\nabla w\| = \frac{2}{p}\|\nabla w\|\left\langle(\mu_4 w)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{2}{p}\|\nabla w\|\left(\beta\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2\right)\right),$$

і

$$\left\langle\mu_5(x)|u-v|, (u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle = \left\langle\mu_5, w^2\right\rangle \le \beta\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2.$$

Отже маємо

$$\left\langle A^p(u) - A^p(v), (u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle \ge \lambda\|w\|^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2\left(\beta\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2\right)\right) + \beta\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle + c(\beta)\|w\|^2 \ge$$

$$\ge \left(\lambda - \frac{\varepsilon^2 c(\beta)}{p} - c(\beta)\right)\|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \beta\frac{\varepsilon^2}{p} - \frac{1}{p\varepsilon^2\nu} - \beta\right)\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\right\rangle \ge 0.$$

Лему доведено.

Означення 6. *Оператор* $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ *визначає хемінеперервне відображення, якщо справджується властивість:* $\omega - \lim\limits_{t\to 0} \mathrm{A}^p(u+tv) = A^p(u)$, $\forall u, v \in W_{1,0}^p\left(R^l, d^l x\right)$ *в нормі* $W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Лема 3. Оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ визначає хемінеперервне відображення.

Доведення. Доведення базується на міркуваннях, які подібні попереднім. Маємо: $\forall u, v \in W_{1,0}^p\left(R^l, d^l x\right)$ і $\forall w \in W_1^q\left(R^l, d^l x\right)$:

$$\left|\left\langle A^p(u+tv) - A^p(u), w\right\rangle\right| = \left|\lambda\left\langle u+tv, w\right\rangle + \left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla(u+tv)\right\rangle +\right.$$

$$\left.+\left\langle b(x, u+tv, \nabla(u+tv)), w\right\rangle - \lambda\left\langle u, w\right\rangle - \left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla u\right\rangle - \left\langle b(x,u,\nabla u), w\right\rangle\right| =$$

$$\le \left|\lambda t\left\langle v, w\right\rangle + t\left\langle\nabla w\circ a\circ\nabla v\right\rangle + t\left\langle\mu_4(x)|\nabla v| + \mu_5(x)|v|, w\right\rangle\right| \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

Для знаходження граничного переходу використано задані умови, тобто обмеженість останнього доданку. Лему 3 доведено.

Отже, за системою (1) складено форму (4) яка породжує нелінійний оператор $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$, який задовольняє умови коерціативності, акретивності та хемінеперервності.

Теорема 1. *Квазілінійна еліптична система (1) за умов (2), (5) має єдиний розв'язок в* W_1^p.

5. Метод Гальоркіна. Доведемо існування розв'язку системи (1) та його єдиність методом Гальоркіна з використанням спеціального базису. Єдиність розв'язку буде наслідком строгої акретивності оператора, що породжений формою, яка складена за системою рівнянь, і доводиться від супротивного.

Нехай $\{v_i\}$ і $\{v_i^*\}$ – гладкі базиси просторів $W_1^p(R^l,d^lx), W_1^q(R^l,d^lx)$, відповідно, і нехай $[v_1,...v_k]$ – лінійна оболонка базисних елементів $\langle u_k,u_k^*\rangle=\|u_k\|_p^p$. Покладемо за визначенням $u_k=\sum_{i=1}^k c_iv_i$, $u_k^*=\sum_{i=1}^k c_i^*v_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь: $\langle A^p(u_k)-f,v_i^*\rangle=0$, $i=1,...,k$. Далі покажемо, що ця система має розв'язок в лінійній оболонці перших n елементів базису $\{v_i\}$. Дійсно ця система визначає неперервне відображення сфери в евклідовому просторі, а отже має місце аналог леми про гострий кут. Це відображення $\vec{B}(\vec{C}):B_i(\vec{C})=\langle A^p(u_k)-f,v_i^*\rangle$, внаслідок коерцитивності оператора $A^p:W_1^p(R^l,d^lx)\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут, тобто

$$\left\langle \vec{B}(\vec{C}),\vec{C}^*\right\rangle=\left\langle A^p\left(\sum_{i=1}^k c_iv_i\right)-f,\sum_{i=1}^k c_i^*v_i^*\right\rangle=\left\langle A^p(u_k)-f,u_k|u_k|^{p-2}\right\rangle\geq$$
$$\left(\frac{h_\lambda^p\left(u_k,u_k|u_k|^{p-2}\right)}{\|u_k|u_k|^{p-2}\|_{W_1^q}}-\|f\|_{W_{-1}^p}\right)\|u_k|u_k|^{p-2}\|_{W_1^q}\geq 0.$$

Оскільки $A^p:W_1^p\to W_{-1}^p$ – неперервне відображення на скінченно-вимірних підпросторах простору $W_1^p(R^l,d^lx)$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R>0$ існує такий елемент $\vec{C}$, $|\vec{C}|=R$, що $\vec{B}(\vec{C})=0$. Вище вказано спосіб побудови послідовності $\{u_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками системи рівнянь $\langle A^p(u_k)-f,v_i^*\rangle=0.$ Покажемо, що ця послідовність збігається до розв'язку системи.

Використавши коерцитивність оператора $A^p:W_1^p\to W_{-1}^p$, одержимо нерівність $\|A^p(u_k)\|_{W_{-1}^p}\leq\|f\|_{L^p}$.

Лема 4. *Узагальнені розв'язки системи рівнянь (1) за умов (5) рівномірно обмежені в* W_1^p.

Доведення. Складемо інтегральну тотожність: $\lambda\langle u_k,\xi\rangle+\langle d\xi\circ a\circ du_k\rangle+\langle b(x,u_k,\nabla u_k),\xi\rangle\equiv\langle f,\xi\rangle$, покладемо $\xi=u_k|u_k|^{p-2}$, тоді маємо

$$\lambda\langle u_k,u_k|u_k|^{p-2}\rangle+\frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d\left(u_k|u_k|^{\frac{p-2}{2}}\right)\circ a\circ d\left(u_k|u_k|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle+\left\langle b,u_k|u_k|^{p-2}\right\rangle\equiv\left\langle f,u_k|u_k|^{p-2}\right\rangle.$$

З умов (15), використовуючи нерівності Юнга і Гельдера, знаходимо:

$$|\langle b,u_k|u_k|^{p-2}\rangle|\leq\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|\nabla w\|^2+\varepsilon^2\left(\beta\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\rangle+c(\beta)\|w\|^2\right)\right)+\beta\langle\nabla w\circ a\circ\nabla w\rangle+c(\beta)\|w\|^2+\frac{\sigma^p}{p}\|\mu_3\|^p+\frac{1}{\sigma^q q}\|u_k\|^p.$$

Далі, одержимо:

$$|\langle f,u_k|u_k|^{p-2}\rangle|\leq\|f\|_p\|u_k|u_k|^{p-2}\|_q\leq\|f\|_p\|u_k\|^{p-1}.$$

Знаходимо

$$\|u_k\|+\|\nabla u_k\|\leq c(\lambda,p,l,\lambda_0,N)\|f\|.$$

Отже, оскільки $\|u_k\|_{W_1^p}<C$, де стала C залежить лише коефіцієнтів системи рівнянь, внаслідок слабкої компактності простору $W_1^p(R^l,d^lx)$ отримуємо, що існує така підпослідовність $(u_{k'}(x))$, для якої виконується властивість: $u_{k'}\xrightarrow[W_1^p]{}u_0$ слабко і $A^p(u_{n'})\xrightarrow[W_1^p]{}y$ слабко.

Покажемо, що $y=A^p(u_0)=f$. Звідси випливатиме, що відображення $A^p:W_1^p\to W_{-1}^p$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням "на". Складемо інтегральні тотожності: $\langle A^p(u_{k'}),v_i^*\rangle=\langle f,v_i^*\rangle$, $i=1,...,k'$, і перейдемо до границі при $k'\to+\infty$. Тоді одержимо: $\lim_{n\to\infty}A^p(u_{k'})=y=f$, де границя береться за нормою простору $W_{-1}^p(R^l,d^lx)$. Використовуючи акретивність оператора $A^p(\cdot):W_1^p(R^1,d^lx)\to W_{-1}^p(R^1,d^lx)$ в просторі $L^p(R^l,d^lx)$, маємо: $\lim_{k'\to\infty}\left\langle A^p(u_{k'})-A^p(v),(u_{k'}-v)|u_{k'}-v|^{p-2}\right\rangle=\left\langle y-A^p(v),(u_0-v)|u_0-v|^{p-2}\right\rangle\geq 0.$ Поклавши $v=u_0-tz,t>0,$ $z\in W_1^p(R^l,d^lx)$ і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, отримаємо $\left\langle y-A^p(u_0-tz),z|z|^{p-2}\right\rangle\geq 0.$

З хемінеперервності оператора $A^p : W_1^p \to W_{-1}^p$, враховуючи довільність елемента $z \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, одержимо $y = A^p\left(u_0\right) = f$. Таким чином для заданих початкових даних побудовано послідовність $\{u_{k'}\}$ і доведено її збіжність до елементу $u_0 \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$. Отже елемент $u_0 \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$ є розв'язком системи за заданих умов.

Єдиність цього розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A^p(\cdot)$. Дійсно, нехай u_0, u_0' – два таких розв'язки. Тоді, справедливі рівності: $\left\langle A^p(u_0), w\right\rangle = f$, $\left\langle A^p(u_0'), w\right\rangle = f \quad \forall w \in W_1^q(R^l, d^l x)$, а отже $\left\langle A^p(u_0) - A^p(u_0'), w\right\rangle = 0$. Поклавши $w = (u_0 - u_0') \mid u_0 - u_0' \mid^{p-2}$, отримаємо:

$$0 = \left\langle A^p(u_0) - A^p(u_0'), (u_0 - u_0') \mid u_0 - u_0' \mid^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda \| u_0 - u_0' \|_p^p + (p-1)\left\langle \nabla\left(u_0 - u_0'\right) \circ a \circ \nabla\left(u_0 - u_0'\right), \mid u_0 - u_0' \mid^{p-2}\right\rangle - \left\langle \mu_4(x)\left|\nabla\left(u_0 - u_0'\right)\right| + \mu_5(x)\left|u_0 - u_0'\right|, \left(u_0 - u_0'\right)\left|u_0 - u_0'\right|^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda \| u_0 - u_0' \|_p^p + (p-1)\left\langle \nabla\left(u_0 - u_0'\right) \circ a \circ \nabla\left(u_0 - u_0'\right), \mid u_0 - u_0' \mid^{p-2}\right\rangle -$$

$$\left\langle \mu_4(x)\left|\nabla\left(u_0 - u_0'\right)\right| + \mu_5(x)\left|u_0 - u_0'\right|, \left(u_0 - u_0'\right)\left|u_0 - u_0'\right|^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \left(\lambda - \frac{\varepsilon^2 c(\beta)}{p} - c(\beta)\right)\|w\|^2 + \left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \beta\frac{\varepsilon^2}{p} - \frac{1}{p\varepsilon^2 \nu} - \beta\right)\left\langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\right\rangle \geq 0,$$

що, внаслідок строгої акретивності оператора A^p еквівалентно рівності $u_0 = u_0'$.

Висновки. Доведено існування розв'язку квазілінійної еліптичної системи рівнянь (1) в усьому евклідовому просторі R^l за досить загальних умов щодо коефіцієнтів (2), (5), а саме: за умов форм-обмеженості модуля вектор-функцій, що входять в рівняння.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вишик М. Й. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.Й. Вишик // Матем. сб. – 1951. – Т. 29(71), №3. – С. 615–676.
2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.:Мир, 1978. – 336 с.
3. Гильберг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гильберг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
4. Дубинский Ю. А., Похожаев С. И. Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений / Ю. А. Дубинский, С. И. Похожаев // Матем. сб. – 1967. – Т. 72(114), №2. – С. 226–236.
5. Коваленко В. Ф., Кухарчук Н. М., Семенов Ю. А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором $\frac{1}{2}\Delta + d\nabla$ /В. Ф. Коваленко, Н. М. Кухарчук, Ю. А. Семенов. – Деп. в УкрНИИНТИ. – Киев, 1985. – №2380-Ук 85.
6. Кухарчук М. М. Про розв'язність квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в R^l / М.М.Кухарчук // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 2. – С. 145–158.
7. Кухарчук Н. М. Гладкость обобщений решений квазилинейных уравнений с непрерывными коэффициентами / Н. М. Кухарчук // Труды 5-й Респ. конференции по нелинейным задачам математической физики. – Деп. в УкрНИИНТИ. – Донецк: Донецкий гос. ун-т. – 1985.
8. Кухарчук Н. М. Априорные оценки обобщенных производных решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка / Н. М. Кухарчук. – Киев, 1987. – 60 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87.36).
9. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 579 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.15

Яременко Н., канд. физ.-мат. наук
Международный математический центр НАН Украины

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЕФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрены квазилинейных эллиптические системы дифференциальных уравнений в частных производных во всем евклидовом пространстве, установлены новые более слабые условия существования решения таких систем в определенном классе функций и их единственность (результаты новые в случае линейных систем и квазилинейного уравнения $N = 1$).

Yaremenko M., Ph.D
International Mathematical Centre of National Academy of Science of Ukraine

QUASI-LINEAR ELLIPTIC SYSTEM WITH SINGULAR COEFFICIENTS

We consider quasi-linear elliptic system of differential equations in whole Euclidean space, we obtained new conditions of existence of a weak solution in a certain class of functions and its uniqueness (the results is new in the case of linear and quasi-linear equations $N = 1$).