УДК 517.912:512.816

М. Сєров, д-р фіз.-мат. наук, проф., Н. Ічанська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ПолтНТУ ім. Юрія Кондратюка, Полтава
e-mail: m.serov@ukr.net, natasha.ichanska@mail.ru

ПРО КОНФОРМНУ ІНВАРІАНТНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто багатовимірні нелінійні еволюційні рівняння. Серед широкого класу рівнянь відібрано ті, що є інваріантними відносно конформної алгебри, для деяких з них знайдено максимальні алгебри інваріантності.

ВСТУП. Задача інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними тісно пов'язана з їх груповими властивостями. Основи групового аналізу диференціальних рівнянь було закладено ще С. Лі [22, 23]. Продовження розвитку ідей С. Лі в сучасному формулюванні було запропоноване Л. В. Овсянніковим [12, 13, 14], який першим використав симетрію як критерій відбору диференціального рівняння в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. Пряма та обернена задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними є одними з найважливіших та, безумовно, актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики. (див., наприклад, праці Олвера-Р. Хередеро [20], Р. Вілтшіра–А. Г. Нікітіна [24], Р. М. Черніги [18], Р. З. Жданова–В. І. Лагна [17, 29, 7] та ін.).

Розглянемо клас нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку вигляду

$$\Delta u = F(u, u_0) , \tag{1}$$

де $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$, $u_0 = \partial u / \partial x_0$, Δ – оператор Лапласа, $u = u(x)$, F – гладкі функції.

Важливість цього класу еволюційних рівнянь і необхідність його дослідження обумовлена кількома причинами. Перш за все тим, що він містить як частинні випадки відомі рівняння математичної фізики. Крім того, до рівнянь з класу (1) приводять різні фізичні задачі, наприклад, задачі опису процесів тепло- і масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря в глибину, тощо. Крім того, ці рівняння в частинному випадку є потенціальними багатовимірними рівняннями дифузії з розв'язаною задачею групової класифікації [13, 5, 6, 16].

Дослідженням симетрійних властивостей узагальнень нелінійного рівняння теплопровідності присвячено багато праць, в яких вивчено симетрійні властивості рівнянь теплопровідності з джерелом (стоком) [5], дифузії-конвекції [21], з конвективним та реактивним членами [15, 19], повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних [17, 10, 11, 1] та нелінійних [28, 3] одновимірних еволюційних рівнянь. У даній статі описано всі можливі зображення конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантними нелінійні багатовимірні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку (1) і розв'язано задачу про знаходження функцій F, при яких рівняння (1) є інваріантними відносно конформної алгебри. Зазначимо, що у [8, 2] обернена задача симетрійної класифікації розглянута повністю для загальних одновимірних рівнянь і систем довільного порядку та для виділеного підкласу конформно інваріантих рівнянь проведено повну групову класифікацію, а у [9, 26] розглянуто задачу про повну групову класифікацію нелінійних одновимірних рівнянь довільного порядку і для конформно інваріантних рівнянь, що володіють найширшими симетрійними властивостями, проведено редукцію.

СИСТЕМА ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ОСНОВНА АЛГЕБРА ІНВАРІАНТНОСТІ. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду (1). Використовуючи класичні результати Лі щодо диференціальних інваріантів груп перетворень, доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Основною алгеброю класу рівнянь (1) є алгебра:*

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b \rangle. \tag{2}$$

Тут і далі $a = \overline{1,n}$, $b = \overline{1,n}$, де n – кількість просторових змінних.

Доведення. Нехай $S = \Delta u - F(u, u_0)$, де $\Delta u = \delta_{ab} u_{ab}$, $a = 1, 2, ..n$, $b = 1, 2, ..n$. Подіємо інфінітезимальним оператором на S: $XS = \delta_{ab} {}^{ab}\eta - F_u \eta - F_{u_0} {}^{0}\eta$. Підставивши в $\tilde{X}S$ відповідні перші та другі продовження, після переходу на многовид та розщеплення відносно старших похідних, отримаємо рівняння:

$$\xi^0_a = 0, \xi^0_u = 0, \xi^a_u = 0,\ \xi^a_b + \xi^b_a = 0, a \neq b,\ \xi^1_1 = \xi^2_2 = \ldots = \xi^n_n \tag{3}$$

Розщеплення $\tilde{X}S$ відносно степенів перших похідних за просторовими змінними задає:

$$\eta_{uu} = 0,\ 2\eta_{au} - \Delta\xi^a + \xi^a_0 F_{u_0} = 0,\ \eta F_u + [\eta_0 + u_0(\eta_u - \xi^0_0)] F_{u_0} = (\eta_u - 2\xi^1_1) F + \Delta\eta. \tag{4}$$

Випадок $F_{u_0} = const$ ми не розглядаємо, бо він вже вивчений (див. [12, 13, 15]). Тому тут і далі вважаємо $F_{u_0} \neq const$. Остаточно, визначальна система рівнянь має вигляд:

$$\xi^0 = \xi^0(x_0),\ \xi^a = \xi^a(\vec{x}),\ \xi^a_b + \xi^b_a = 2\delta_{ab}\,\xi^1_1,\ 2a_a = \Delta\xi^a, \tag{5}$$

$$\eta = a(x_0, \vec{x}) u + b(x_0, \vec{x}),\ \eta F_u + [\eta_0 + u_0(\eta_u - \xi^0_0)] F_{u_0} = (\eta_u - 2\xi^1_1) F + \Delta\eta. \tag{6}$$

Основна алгебра інваріантності класу рівнянь (1) описується операторами, координати яких завольняють наступні рівняння:

$$\xi^0_0 = 0,\ \xi^1_1 = 0,\ \xi^a_b + \xi^b_a = 0,\ \Delta\xi^a = 0,\ \eta = 0. \tag{7}$$

Розв'язком (7) є функції $\xi^0 = d_0, \xi^a = C_{ab} x_b + d_a$, де $C_{ab} = -C_{ba}, d_0, d_a$ – довільні сталі, що доводить твердження теореми 1.

Зауваження. *1. Визначальна система (5)–(6) однозначно задає вигляд оператора інваріантності заданого класу рівнянь, а саме: якщо рівняння з класу (1) є інваріантним відносно оператора X, то цей оператор повинен мати вигляд:*

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^a(\vec{x})\partial_a + [a(x_0,\vec{x})u + b(x_0,\vec{x})]\partial_u. \tag{8}$$

2. Розв'язки системи (5)–(6) дають повну групову класифікацію рівняння (1) відносно вигляду функції F.

3. Алгебра (2) є прямою сумою оператора зсуву по часу ∂_0 та алгебри Евкліда $AE(n)$.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ. Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії [12, 14]. Тому знайдемо локальні перетворення еквівалентності класу рівнянь (1).

Теорема 2. *Максимальною локальною групою $G^{\sim}$ точкових перетворень еквівалентності класу еволюційних рівнянь $\Delta u = F(u,u_0)$ є група, яка породжується оператором $E = (C_0x_0 + d_0)\partial_0 + (C_{ab}x_b + \varkappa x_a + d_a)\partial_a + +(C_1u + C_2)\partial_u + (C_1 - 2\varkappa)F\partial_F$, де $C_0, d_0, C_{ab} = -C_{ba}, \varkappa, d_a, C_1, C_2$ – довільні сталі.*

Доведення. З умови інваріантності рівняння (1) при додаткових умовах $F_{u_0} = 0$, $F_\mu = 0$ відносно оператора $E = \xi^0\partial_0 + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u + \zeta\partial_F$, одержуємо систему визначальних рівнянь відносно невідомих функцій $\xi^0, \xi^a, \eta, \zeta$:

$$\begin{gathered}\xi^0_a = \xi^0_u = 0, \xi^a_0 = \xi^a_u = 0, \xi^a_b + \xi^b_a = 0,\\ \eta_\mu = 0, \eta_{uu} = 0, \zeta_\mu = 0, \zeta = (\eta_u - 2\xi^1_1)F.\end{gathered} \tag{9}$$

Загальним розв'язком системи (9) є функції, що однозначно визначають координати інфінітезимального оператора E. Теорему доведено.

Зауваження. *1. Група перетворень еквівалентності даного класу рівнянь складається із зсуву по x_μ, зсуву по u, поворотів по просторовим змінним, розтягів по x_μ, розтягу по u та розтягу по F. Це означає, що зв'язна компонента одиниці в $G^{\sim}$ задається перетвореннями еквівалентності*

$$\begin{aligned}&x_0 \to e^{\theta_5}x_0 + \theta_0,\\ &x_a \to e^{\theta_6}(x_a\cos\theta_8 - x_b\sin\theta_8) + \theta_a,\\ &x_b \to e^{\theta_6}(x_b\sin\theta_8 + x_a\cos\theta_8) + \theta_b,\\ &u \to e^{\theta_7}u + \theta_4, F \to e^{\theta_7 - 2\theta_6}F.\end{aligned} \tag{10}$$

2. Крім неперервних перетворень еквівалентності (10), клас рівнянь (1) також допускає наступні дискретні перетворення еквівалентності:

$$\begin{gathered}x_0 \to x_0, \quad x_a \to -x_a, \quad u \to u, \quad F \to -F;\\ x_0 \to x_0, \quad x_a \to x_a, \quad u \to -u, \quad F \to -F.\end{gathered}$$

3. Для окремих рівнянь вигляду (1) ефективними є додаткові перетворення еквівалентності:

$$u \to e^{\lambda_0 x_0}u, \quad x_0 \to \frac{1}{\lambda_0 k}e^{\lambda_0 k x_0} \quad \text{та} \quad u \to u - \lambda_0 x_0, \quad x_0 \to -\frac{1}{\lambda_0}e^{-\lambda_0 x_0}.$$

4. Всі подальші міркування будемо викладати з точністю до вказаних вище неперервних, дискретних та додаткових перетворень еквівалентності.

ЗОБРАЖЕННЯ КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ. Знайдемо зображення конформної алгебри відносно якої може бути інваріантне рівняння (1).

Означення: [27] Алгебру вигляду $AC(n) = \langle X_a, Y_{ab}, D, Z_a\rangle$ назвемо конформною алгеброю $AC(n)$, якщо її диференціальні оператори задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$\begin{gathered}[X_a, X_b] = 0, [X_a, Y_{bc}] = \delta_{ac}\partial_b - \delta_{ab}\partial_c, [X_a, D] = X_a, [X_a, Z_b] = 2\delta_{ab}D + 2Y_{ab},\\ [Y_{ab}, Y_{cd}] = \delta_{ad}Y_{cb} + \delta_{ac}Y_{bd} + \delta_{bd}Y_{ac} + \delta_{bc}Y_{da}, [Y_{ab}, D] = 0, [Y_{ab}, Z_c] = \delta_{ac}Z_b - \delta_{bc}Z_a,\\ [D, Z_a] = Z_a, [Z_a, Z_b] = 0.\end{gathered}$$

Теорема 3. *Рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри тоді і тільки тоді, коли дана алгебра має наступне зображення:*

$$AC(n) = \langle\partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, D = x_a\partial_a + (k_1u + k_2)\partial_u, K_a = 2x_aD - \vec{x}^2\partial_a\rangle, \tag{11}$$

де k_1, k_2 – сталі.

Доведення. Як доведено в теоремі 1, основна алгебра інваріантності рівняння (1) є прямою сумою оператора зсуву по часу ∂_0 та алгебри Евкліда $AE(n) = \langle\partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b\rangle$. Тому $X_a = \partial_a, Y_{ab} = J_{ab}$. Розширимо основну алгебру інваріантності рівняння (1) операторами D та Z_a. Згідно зауваження 1 до теореми 1, дані оператори шукаємо у вигляді:

$$\begin{gathered}D = P(x_0)\partial_0 + M^a(\vec{x})\partial_a + [\alpha(x_0,\vec{x})u + \beta(x_0,\vec{x})]\partial_u.\\ Z_a = G^a(x_0)\partial_0 + N^{ab}(\vec{x})\partial_b + [\gamma^a(x_0,\vec{x})u + \chi^a(x_0,\vec{x})]\partial_u.\end{gathered} \tag{12}$$

Для операторів (12), задовольнивши комутаційні співвідношення, які наведено в означенні конформної алгебри, та використавши, що $X_a = \partial_a, Y_{ab} = J_{ab}$, отримуємо остаточний вигляд операторів $D = x_a\partial_a + (k_1 u + k_2)\partial_u$ та $Z_a = 2x_a D - \vec{x}^2\partial_a$. А це означає, що зображення конформної алгебри, відносно якої рівняння (1) є конформно інваріантним, має вигляд (11), що і потрібно було довести.

Зауваження. *Оскільки до класу (1) належать еволюційні рівняння, то очевидно, що оператором інваріантності даного класу є оператор зсуву по часу ∂_0, що підтверджує твердження теореми 1. Тому далі ми розглядатимемо пряму суму оператора зсуву по часу та конформної алгебри $AC(n)$. Перевіривши справедливість комутаційних співвідношень: $[\partial_0, \partial_a] = 0$, $[\partial_0, J_{ab}] = 0$, $[\partial_0, D] = 0$, $[\partial_0, K_a] = 0$, можемо стверджувати, що розглядувана пряма сума є алгеброю.*

КЛАСИФІКАЦІЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІНВАРІАНТНИХ ВІДНОСНО КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ. Поставимо і розв'яжемо задачу: знайти такі рівняння з класу (1), які є інваріантними відносно алгебри $\langle \partial_0 \oplus AC(n)\rangle$.

Теорема 4. *З точністю до неперервних, дискретних та додаткових перетворень еквівалентності рівняння (1) є інваріантним відносно конформної алгебри тоді і тільки тоді, коли:*

$F = e^u f(u_0)$, $n = 2$, та $\partial_0 \oplus AC(n)$ задається наступними базисними генераторами:

$$\langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, D = x_a\partial_a - 2\partial_u, K_a = 2x_a D - \vec{x}^2\partial_a\rangle \tag{13}$$

$F = u_0^{\frac{n+2}{n-2}} f(\frac{u_0}{u})$, $n \neq 2$ та $\partial_0 \oplus AC(n)$ задається наступними базисними генераторами:

$$\langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, D = 2x_a\partial_a + (2-n)u\partial_u, K_a = 2x_a D - \vec{x}^2\partial_a\rangle, \tag{14}$$

Тут і далі f – довільна гладка функція своїх аргументів.

Доведення. Після використання алгоритму Лі, отримали систему визначальних рівнянь (5)–(6). Розглянемо оператор:

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + C_{ab}J_{ab} + \varkappa D + \lambda_a K_a, \tag{15}$$

де d_0, d_a, $C_{ab} = -C_{ba}$, $\varkappa$, λ_a – довільні сталі, $a \neq b$. Підставивши ∂_0, оператори з алгебри (11) в формулу (15) та у визначальну систему (5)-(6), отримаємо рівняння:

$$\begin{gathered}\eta_0 = 0, \eta_u = k_1(\varkappa + 2\lambda_b x_b), \Delta\eta = 0, a_a = 2\lambda_a k_1,\\ \xi^a_b = \varkappa\delta_{ab} + 2\lambda_b x_a - 2\lambda_a x_b + 2\vec{\lambda}\vec{x}\delta_{ab}, \xi^a_{bc} = 2\lambda_b\delta_{ac} - 2\lambda_a\delta_{bc} + 2\lambda_c\delta_{ab},\\ \Delta\xi^a = 2\lambda_a(2-n), \xi^0_0 = 0, k_1 = \frac{2-n}{2}, (k_1u + k_2)F_u + k_1 u_0 F_{u_0} = (k_1 - 2)F.\end{gathered} \tag{16}$$

Розв'язок останнього рівняння системи (16) залежить від значення параметра k_1. При $k_1 = 0$, $n = 2$ отримуємо оператори алгебри (13). При $k_1 \neq 0$, $n \neq 2$ розв'язки рівнянь (16) задають оператори алгебри (14). Теорему 4 доведено.

Зауваження. *З доведеної теореми випливає, що в класі рівнянь (1) з точністю до перетворень еквівалентності конформно інваріантними є наступні рівняння:*

$$\Delta u = e^u f(u_0), n = 2 \qquad \text{та} \qquad \Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f(\frac{u_0}{u}), n \neq 2. \tag{17}$$

МАКСИМАЛЬНІ АЛГЕБРИ ІНВАРІАНТНОСТІ. Розглянемо задачу: знайти максимальні алгебри інваріантності (МАІ) конформно інваріантних рівнянь (17). Розв'язання цієї задачі повністю описується загальним розв'язком визначальної системи (5)–(6). Одними з рівнянь визначальної системи (5)-(6) є рівняння Кілінга, а як відомо їх розв'язки залежать від значення n. При $n \neq 2$ розв'язки рівняння Кілінга мають вигляд $\xi^a = -\lambda_a\vec{x}^2 + 2\vec{\lambda}\vec{x}x_a + \varkappa x_a + (C_{ab} - C_{ba})x_b + d_a$, а при $n = 2$ розв'язками рівняння Кілінга є функції $\xi^a = \xi^a(\vec{x})$ такі, що $\xi^a_b + \xi^b_a = 2\delta_{ab}\xi^1_1$, $\Delta\xi^a = 0$. Тут і далі δ_{ab} – символ Кронекера. Тому групову класифікацію проведемо в залежності від значень параметра n.

Теорема 5. *У випадку $n \neq 2$ основною алгеброю інваріантності класу багатовимірних рівнянь*

$$\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f(\frac{u_0}{u}) \tag{18}$$

є алгебра $A_1^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, D = 2x_a\partial_a + (2-n)u\partial_u, K_a = 2x_a D - \vec{x}^2\partial_a\rangle$.

Теорема 6. *З точністю до перетворень з $G^{\sim}$ для класу рівнянь (18) при $n \neq 2$ існує лише п'ять випадків розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх МАІ):*

$$\Delta u = \lambda e^{\frac{u_0}{u}} u^{\frac{n+2}{n-2}}: \quad A_1 = \langle A_1^{bas}, Q_1 = e^{\frac{4x_0}{2-n}} u\partial_u\rangle;$$

$$\Delta u = \lambda(\frac{u_0}{u})^k u^{\frac{n+2}{n-2}}: \quad A_2 = \langle A_1^{bas}, Q_2 = x_0\partial_0 + \frac{2-n}{4}ku\partial_u\rangle, \quad k \neq \frac{n+2}{n-2};$$

$$\Delta u = \lambda u_0^{\frac{n+2}{n-2}}: \quad A_3 = \langle A_1^{bas}, Q_3 = x_0\partial_0 + \frac{2+n}{4}u\partial_u, Q^{\infty} = \beta(\vec{x})\partial_u\rangle;$$

$$\Delta u=\lambda(\frac{u_0}{u}+m)^k u^{\frac{n+2}{n-2}}:\quad A_4=\langle A_1^{bas},Q_4=e^{\frac{4mx_0}{k(2-n)}}(\partial_0-mu\partial_u)\rangle,\ k\neq\frac{n+2}{n-2},\ m\neq 0,\ k\neq 0;$$

$$\Delta u=\lambda(u_0+mu)^{\frac{n+2}{n-2}}:\quad A_5=\langle A_1^{bas},Q_5=e^{-\frac{4mx_0}{2+n}}(\partial_0-mu\partial_u),Q^\infty=e^{-mx_0}\beta(\vec{x})\partial_u\rangle.$$

Тут і далі f – довільна гладка функція своїх аргументів, $\beta(\vec{x})$ – довільна гладка функція, що задовольняє рівняння $\Delta\beta=0$, λ, $m\neq 0$, $k\neq 0$ – сталі.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Нехай $\omega=\frac{u_0}{u}$. У випадку $n\neq 2$ розв'язком визначальної системи (5)–(6) є функції:

$$\xi^0=\xi^0(x_0),\xi^a=-\lambda_a\vec{x}^2+2\vec{\lambda}\vec{x}x_a+\varkappa x_a+(C_{ab}-C_{ba})x_b+d_a,\eta=a(x)u+b(x),$$

що задовольняють систему:

$$\begin{gathered}(b\omega-b_0)\dot{f}=\frac{n+2}{n-2}bf,\ (a_0-\omega\xi_0^0)\dot{f}+(\frac{4}{n-2}a+2\xi_1^1)f=0,\ \Delta b=0,\\ a_a=\lambda_a(2-n),\ \Delta a=0,\ \xi_1^1=2\vec{\lambda}\vec{x}+\varkappa.\end{gathered}\tag{19}$$

Якщо f – довільна функція, то розщеплюючи по f, $\dot{f}$ отримаємо, зокрема, такі визначальні рівняння $\xi_0^0=0, a=(2-n)(\vec{\lambda}\vec{x}+\frac{1}{2}\varkappa)$, розв'язком яких є функції, які задають базисні генератори конформної алгебри, що доводить теорему 5.

Опишемо всі можливі розширення МАІ. Структурні рівняння для першого та другого рівнянь системи (19) мають вигляд

$$(k_1\omega+k_2)\dot{f}=k_3 f,\tag{20}$$

де k_1, k_2, k_3 – деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з $G^{\sim}$ отримуємо різні вигляди функції f. Зазначимо, що випадок $f=\mathrm{const}$ ми не розглядаємо.

Проаналізувавши структуру рівняння (20), приходимо до висновку, що можливі такі суттєво різні випадки: $f=e^{m\omega}$, $f=(\omega+m)^k$, $f=(\omega+m)^{\frac{n+2}{n-2}}$, де $k\neq\frac{n+2}{n-2}$, m – довільні сталі, для кожного з яких, використовуючи класичні результати Лі та провівши стандартні математичні міркування, отримаємо перший, другий, третій, четвертий або п'ятий пункти теореми 6. Теорему 6 доведено.

Сформулюємо результати групової класифікації для випадку $n=2$.

Теорема 7. *Нескінченна алгебра, базисні оператори якої породжуються інфінітезимальним оператором* $X^{bas}=d_0\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a-2\xi_1^1\partial_u$, *а функції* ξ^a *задовольняють рівняння* $\xi_b^a+\xi_a^b=2\delta_{ab}\xi_1^1$, $\Delta\xi^a=0$, *є основною алгеброю інваріантності класу (1+2)-вимірних рівнянь*

$$\Delta u=e^u f(u_0).\tag{21}$$

Тут і далі $f(u_0)$ – довільна гладка функція.

Теорема 8. *З точністю до перетворень з* $G^{\sim}$ *для класу (1+2)-вимірних рівнянь (21) існує три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх інфінітезимальні оператори, які породжують максимальні алгебри інваріантності цих рівнянь):*

$\Delta u=\lambda e^{u+mu_0}$:

$$X_1=(-mC_1e^{-\frac{1}{m}x_0}+d_0)\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a+[C_1e^{-\frac{1}{m}x_0}u+(\frac{1}{m}\beta_1(\vec{x})x_0+\beta_2(\vec{x}))e^{-\frac{1}{m}x_0}-2\xi_1^1]\partial_u;$$

$$\Delta u=\lambda(u_0+m)^k e^u:\ X_2=(-\frac{kC_1}{m}e^{-\frac{m}{k}x_0}+d_0)\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a+[kC_1e^{-\frac{m}{k}x_0}-2\xi_1^1]\partial_u;$$

$$\Delta u=\lambda u_0^k e^u:\ X_3=(C_1x_0+d_0)\partial_0+\xi^a(\vec{x})\partial_a+[kC_1-2\xi_1^1]\partial_u.$$

Тут $m\neq 0$, $k\neq 0$, $\lambda\neq 0$, C_1, d_0 – довільні сталі, β_1, β_2 – довільні такі гладкі функції, що $\Delta\beta_1=0$, $\Delta\beta_2=0$.

Доведення обох теорем проведемо одночасно. Підставивши у визначальну систему (5)–(6) функцію $F=e^u f(u_0)$ та розщепивши по виразам ue^u та e^u, отримаємо визначальні рівняння:

$$\begin{gathered}\xi^0=\xi^0(x_0),\xi^a=\xi^a(\vec{x}),\xi_b^a+\xi_a^b=2\delta_{ab}\xi_1^1,\eta=a(x_0)u+b(\vec{x}),\Delta\xi^a=0,\Delta b=0,\\ a_0\dot{f}+af=0,\ (b_0+(a-\xi_0^0)\omega)\dot{f}+bf=(a-2\xi_1^1)f.\end{gathered}\tag{22}$$

Якщо f – довільна функція, то розв'язком (22) є функції $\xi^0=d_0$, $\xi^a=\xi^a(\vec{x})$, $\eta=-2\xi_1^1$ та ξ^a задовольняють рівняння $\xi_b^a+\xi_a^b=2\delta_{ab}\xi_1^1$, $\Delta\xi^a=0$, що доводить теорему 7.

Дослідимо останні два рівняння системи (22) за структурою. В залежності від співвідношень між структурними коефіцієнтами з точністю до перетворень еквівалентності отримуємо різні вигляди функцій f, а саме: $f = e^{mu_0}$, $f = (u_0 + m)^k$, де $k \neq \frac{n+2}{n-2}$, m – довільні сталі. Зазначимо, що: 1. Випадок $f = \mathrm{const}$ ми не розглядаємо; 2. Випадок $f = (u_0 + m)^k$ розпадається на два суттєво різні підвипадки: $m = 0$ та $m \neq 0$, для кожного з яких, провівши міркування, що аналогічні наведеним вище, отримуємо другий або третій пункт теореми 8. Теорему 8 доведено.

ВИСНОВКИ. У даній роботі вивчено клас еволюційних n-вимірних рівнянь. Серед широкого класу нелінійних багатовимірних рівнянь відібрано ті, що володіють конформною симетрією. А саме, є інваріантними відносно прямої суми операторів зсуву по часу та алгебри Евкліда $AE(n)$, що розширена операторами масштабних та конформних перетворень. Для відібраних багатовимірних еволюційних нелінійних рівнянь проведено повну групову класифікацію.

Запропоновані рівняння мають широкі симетрійні властивості і тому можуть бути використані в якості математичних моделей для опису реальних фізичних процесів. Знання МАІ даних рівнянь дає можливість їх інтегрування і дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абраменко А. А., Лагно В. И., Самойленко А. М.* Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 482–489.
2. *Андреєва Н. В. (тепер Ічанська Н. В.)* Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. – 1998. – Т. 19. – С. 10–13.
3. *Ахатов Н. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1989. – Т.34. – С. 3–83.
4. *Бойко В. М., Попович В. О.* Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – Т. 36. – С. 45–50.
5. *Дородницын В. А.* О инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – Т. 22. – С. 1393–1400.
6. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – С. 1215–1223.
7. *Жданов Р. З., Лагно В. І.* Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом // Доповіді НАН України. – 2000. – № 3. – С. 12–16.
8. *Ічанська Н. В.* Еволюційні рівняння та системи інваріантні відносно конформної алгебр // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 2. – С. 159–169.
9. *Ічанська Н. В.* Групова класифікація еволюційних рівнянь високого порядку// Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 1. – С. 43–48.
10. *Лагно В. И., Самойленко А. М.* Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 365–372.
11. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України. – Т. 45. – 2002. – 360 с.
12. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука. – 1978. – 400 с. – English translation: Ovsiannikov L. V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press. – 1982. – 400 p.
13. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492–495.
14. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений С. А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн.физ. – 1960. – № 3. – С. 126–145.
15. *Сєров М. І., Черніга Р. М.* Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 9. – С. 1262–1270.
16. *Серова М. М.* О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики. – 1985. – С. 119–123.
17. *Basarab-Horwath P., Lahno V. and Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – Vol. 69, № 1. – P. 43–94.
18. *Cherniha R. M.* Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // J. Nonlin. Math.Phys. – 1995. – Vol. 2, № 3. – P. 374–383.
19. *Cherniha R., Serov M.* Symmetries ans $\ddot{a}$ tze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. of Appl. Math. – 1998. – Vol. 9. – P. 527–542.
20. *Heredero R. H., Olver P. J.* Classification of invariant wave equations // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37, № 12. – P. 6414–6438.
21. *Edwards M. P.* Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol. 190. – P. 149–154.
22. *Lie S.* Discussion der differential Gleichung $d^2 z / dxdy = F(z)$ // Arch. Math. – 1881. – Vol. 8, № 1. – P. 112–125.
23. *Lie S.* Classification und Integration von gewöhnlichen Differential-gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. – 1883. – 9. – P. 371–393.
24. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 1666–1688.
25. *Oron A., Rosenau P.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 118, № 4. – P. 172–176.
26. *Serova M., Andreeva N. (Ichanska N.)* Evolution equations invariant under the conformal algebra // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – Vol. 1. – P. 217–221.
27. *Fushchych W., Shtelen W. and Serov N.* Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1993. – 436 p.
28. *Pukhnachov V. V.* Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations // Energy methods in continuum mechanics. – 1996. – 316 p.
29. *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – Vol. 32. – P. 7405–7418.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.16

Серов М., д-р физ.-мат. наук, проф., Ичанская Н., канд. физ.-мат. наук, доц.
ПолтНТУ им. Юрия Кондратюка, Полтава

О КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрено многомерные нелинейные эволюционные уравнения. Среди широкого класса уравнений отобрано те, которые являются инвариантными относительно конформной алгебры. Для некоторых из них найдено максимальные алгебры инварианости.

Serov M., Full Doctor, Ichanska N., Phd
Yury Kondratiuk' PolNTU, Poltava

FROM THE CONFORMAL INVARIACE OF NONLINEAR EVOLUTIONARY MANY DIMENSION EQUATIONS

This paper deals with study of symmetry properties of nonlinear evolution equations. The inverse group classification problem is solver for nonlinear evolutionary equations, which are invariant with respect to the conformal algebra.