УДК 517.9

В. Мороз, старш. викл.
Хмельницький національний університет, Хмельницький
E-mail: *morozvv2008@yandex.ua*

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВЯЗКУ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПОХІДНОЮ ПО ЧАСУ У КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) на полярній осі із двома точками спряження побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розвязку мішаної крайової задачі для рівнянь параболічного типу у припущенні, що крайові умови та умови спряження містять похідну по часовій змінній.

Вступ. Композитні матеріали широко застосовують у різноманітних технологічних процесах, будівництві, енергозбереженні, у звязку з чим виникає необхідність постановки і розвязування задач теплопровідності в середовищах, неоднорідних по своїй структурі (багатошарові тіла). При цьому неоднорідність середовища приводить до розгляду крайових і мішаних задач із кусково-неперервними або кусково-сталими коефіцієнтами [2; 8].

В усіх випадках процеси поширення теплоти вивчались у припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Однак, якщо припустити, що на межі середовища може відбуватись поглинання хвиль (мяка межа), одержимо крайову задачу, що містить похідну по часу в операторах крайових умов та умов спряження виду $L_{jk}=\left(\alpha_{jk}+\delta_{jk}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{jk}+\gamma_{jk}\frac{\partial}{\partial t}$, $k=1{,}2$, j – номер точки спряження.

Для розвязування таких задач, як правило, застосовувався метод інтегрального перетворення Лапласа. Це приводило до крайової задачі на кусково-однорідному сегменті для сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з відповідними крайовими умовами та умовами спряження, залежними від комплексного параметра перетворення Лапласа. Маємо дві нелегкі задачі: розвязання крайової задачі в зображеннях за Лапласом та знаходження оригіналу одержаного розвязку. Виявляється, що можна отримати інтегральні перетворення зі спектральним параметром, які спрацьовують для задач із мякими межами за такою самою логічною схемою, як інтегральні перетворення без спектрального параметра в задачах із жорсткими межами. Побудові одного класу таких гібридних інтегральних перетворень, породжених гібридним диференціальним оператором Ейлера – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) на полярній осі, присвячено цю роботу.

Основна частина. Розглянемо диференціальний оператор Ейлера $B^*_{\alpha_1}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)\,r\frac{d}{dr}+\alpha_1^2$ [5], Фур'є $F=\frac{d^2}{dr^2}$ [6] та Конторовича – Лєбєдєва $B_{\alpha_2}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)\,r\frac{d}{dr}+\alpha_2^2-\lambda^2r^2$ [7]. Нехай $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [10]. Утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\mathrm{M}_{(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)\,B^*_{\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\,F+\theta(r-R_2)\,B_{\alpha_2}\,. \tag{1}$$

У цих рівностях $2\alpha_j+1>0$, $\lambda\in(0;\infty)$, $r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)$, $(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$.

Означення. Областю визначення ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ назвемо множину G функцій $g(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)g_1(r)+\theta(r-R_1)\times$ $\times\theta(R_2-r)\,g_2(r)+g_3(r)\,\theta(r-R_2)$ із такими властивостями:

1) функція $\mathrm{M}_{(\alpha)}[g(r)]$ неперервна на множині $I_2^+=\{r:r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[(\tilde\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j1})\,g_k(r)-(\tilde\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j2})g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=0\,,\quad j,k=1{,}2\,; \tag{2}$$

3) існують такі числа γ_1 та γ_2, що справедливі умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma_1}g_1(r)\right]=0\,,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma_2}g_3(r)\right]=0\,. \tag{3}$$

У рівності (2) беруть участь величини

$$\tilde\alpha^k_{jm}=\alpha^k_{jm}-(\beta^2+\gamma^2)\,\delta^k_{jm}\,,\ \tilde\beta^k_{jm}=\beta^k_{jm}-(\beta^2+\gamma^2)\gamma^k_{jm}\,,\ \gamma^2\ge 0\,,\ \beta\in(0,\infty)\,,\ \beta \text{ – спектральний параметр.}$$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^k_{jm}\ge 0$, $\beta^k_{jm}\ge 0$, $\delta^k_{jm}\ge 0$, $\gamma^k_{jm}\ge 0$, $c_{11,k}\,c_{21,k}>0$;

$$c_{j1,k}=\alpha^k_{2j}\beta^k_{1j}-\alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}\,;\ c_{j2,k}\equiv\delta^k_{2j}\gamma^k_{1j}-\delta^k_{1j}\gamma^k_{2j}=0\,,\ \alpha^k_{1j}\gamma^k_{2j}-\alpha^k_{2j}\gamma^k_{1j}=\beta^k_{1j}\delta^k_{2j}-\beta^k_{2j}\delta^k_{1j}\,,\ j,m,k=1{,}2\,.$$

Якщо визначити числа

$$\tilde a^k_{11}=\tilde\alpha^k_{11}\tilde\alpha^k_{22}-\tilde\alpha^k_{21}\tilde\alpha^k_{12}\,;\ \tilde a^k_{11}=\tilde\beta^k_{11}\tilde\alpha^k_{22}-\tilde\beta^k_{21}\tilde\alpha^k_{12}\,;$$

$$\tilde a^k_{12}=\tilde\alpha^k_{11}\tilde\beta^k_{22}-\tilde\alpha^k_{21}\tilde\beta^k_{12}\,;\ \tilde a^k_{22}=\tilde\beta^k_{11}\tilde\beta^k_{22}-\tilde\beta^k_{21}\tilde\beta^k_{12}\,,$$

то безпосередньо встановлюємо, що

$$\tilde\alpha^k_{11}\tilde\beta^k_{21}-\tilde\alpha^k_{21}\tilde\beta^k_{11}=-c_{11,k}\,;\ \tilde\alpha^k_{12}\tilde\beta^k_{22}-\tilde\alpha^k_{22}\tilde\beta^k_{12}=-c_{21,k}\,;\ \tilde a^k_{22}\tilde a^k_{11}-\tilde a^k_{12}\tilde a^k_{21}=c_{11,k}\,c_{21,k}\,.$$

Унаслідок умов спряження для $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ маємо базову тотожність:

$$\left[u_k(r)v_k'(r)-u_k'(r)v_k(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)-u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}\,. \tag{4}$$

Уведемо до розгляду величини

$$\sigma_1=\frac{c_{11,1}\,c_{11,2}}{c_{21,1}\,c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}},\ \sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1},\ \sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2+\theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}, \tag{5}$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big)=\int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)\,dr\equiv\int_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}\,dr+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2\,dr+\int_{R_2}^{\infty}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\,dr. \tag{6}$$

Покажемо, що ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений. Згідно із правилом (6) маємо

$$\Big(M_{(\alpha)}[u(r)],v(r)\Big)=\int_0^\infty M_{(\alpha)}[u(r)]\,v(r)\sigma(r)\,dr=\int_0^{R_1}B^*_{\alpha_1}[u_1]v_1\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+\int_{R_1}^{R_2}\frac{d^2u_2}{dr^2}v_2\sigma_2\,dr+\int_{R_2}^{\infty}B_{\alpha_2}[u_3]v_3\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\,dr. \tag{7}$$

Інтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\Big(M_{(\alpha)}[u],v\Big)=\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_0^{R_1}+\sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2}+ \tag{8}$$

$$+\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{R_2}^{\infty}+\int_0^\infty u(r)\,M_\alpha[v(r)]\,\sigma(r)\,dr.$$

У силу умов обмеження (3) вирази в точці $r=0$ та в точці $r=\infty$ перетворюються на нуль:

$$\lim_{r\to0}\Big[r^{2\alpha_1+1}(u_1'v_1-u_1v_1')\Big]=0,\ \lim_{r\to\infty}\Big[r^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3-u_3v_3')\Big]=0.$$

На підставі базової тотожності (4) маємо таке:

1) $\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}(u_1'v_1-u_1v_1')\big|_{r=R_1}-\sigma_2(u_2'v_2-u_2v_2')\big|_{r=R_1}=(\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-\sigma_2)(u_2'v_2-u_2v_2')\big|_{r=R_1}=$

$$=\left(\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\right)(u_2'v_2-u_2v_2')\big|_{r=R_1}=$$

$$=\left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\right)R_2^{2\alpha_2+1}\big[u_2'(r)v_2(r)-u_2(r)v_2'(r)\big]\big|_{r=R_1}=0;$$

2) $\sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}-\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}=$

$$=\left(\sigma_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}\right)(u_3'v_3-u_3v_3')\big|_{r=R_2}=\left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}\right)\times$$

$$\times(u_3'v_3-u_3v_3')\big|_{r=R_2}=(1-1)\,R_2^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3-u_3v_3')\big|_{r=R_2}=0.$$

Рівність (8) набуває вигляду

$$\Big(M_{(\alpha)}[u],v\Big)=\Big(u(r),M_{(\alpha)}[v(r)]\Big). \tag{9}$$

Рівність (9) означає, що ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний згідно з [1]. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r=0$, то його спектр неперервний. Вважаємо, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)+\theta(r-R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta). \tag{10}$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}(B^*_{\alpha_1}+b_1^2)\,V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ r\in(0,R_1),\\ (F+b_2^2)\,V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\\ (B_{\alpha_2}+b_3^2)\,V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty),\end{gathered} \tag{11}$$

умови спряження (2) та умови обмеження (3); $b_j^2=(\beta^2+k_j^2)$, $k_j^2\ge0$, $j=\overline{1,3}$, $\beta\in(0,\infty)$.

Фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1}+b_1^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)$ [5]; фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Фур'є $(F+b_2^2)v=0$ складають тригонометричні функції $v_1=\cos b_2r$ та $v_2=\sin b_2r$ [6]; фундаментальну систему для диференціального рівняння Конторовича – Лєбєдєва $(B_{\alpha_2}+b_3^2)v=0$ складають функції $v_1=C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $v_2=D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [7].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)\ ,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2\cos b_2 r + B_2\sin b_2 r\ , \qquad (12)$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)\ ,$$

то умови спряження (2) дають для визначення величини A_j ($j=1,2$) та B_k ($k=\overline{1,3}$) алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$A_1 Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1) + B_1 Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1) - A_2 v^{11}_{j2}(b_2R_1) - B_2 v^{12}_{j2}(b_2R_1) = 0\ , \qquad (13)$$
$$A_2 v^{21}_{j1}(b_2R_2) + B_2 v^{22}_{j1}(b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_3)B_3 = 0\ ,\ \ j=1,2\ .$$

Алгебраїчна система (13) завжди сумісна [3]. При $B_3 \neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему відносно A_2, B_2:

$$v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2 = X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_3)B_3\ ,\ \ j=1,2\ . \qquad (14)$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$v^{21}_{11}(b_2R_2)\, v^{22}_{21}(b_2R_2) - v^{22}_{21}(b_2R_2)\, v^{21}_{11}(b_2R_2) = c_{11,2}\, b_2 \neq 0\ .$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розвязок [3]:

$$A_2 = B_3\left[b_2\, c_{11,2}\right]^{-1}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\, v^{22}_{21}(b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\, v^{22}_{11}(b_2R_2)\right], \qquad (15)$$
$$B_2 = -B_3\left[b_2\, c_{11,2}\right]^{-1}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\, v^{21}_{21}(b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\, v^{21}_{11}(b_2R_2)\right].$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему відносно A_1, B_1:

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1 = B_3\left[b_2\, c_{11,2}\right]^{-1}\Big\{X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\left[v^{22}_{21}(b_2R_2)\, v^{11}_{j2}(b_2R_1) - v^{21}_{21}(b_2R_2)\, v^{12}_{j2}(b_2R_1)\right] -$$
$$- X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\left[v^{22}_{11}(b_2R_2)\, v^{11}_{j2}(b_2R_1) - v^{21}_{11}(b_2R_2)\, v^{12}_{j2}(b_2R_1)\right]\Big\} \equiv \qquad (16)$$
$$\equiv B_3\left[b_2\, c_{11,2}\right]^{-1}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\ \delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\ \delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)\right] \equiv B_3\left[b_2\, c_{11,2}\right]^{-1} b_{\alpha_2;j}(\beta)\ .$$

Визначник алгебраїчної системи (16)

$$Y^{11}_{\alpha_1;11}\, Y^{12}_{\alpha_1;21} - Y^{11}_{\alpha_1;21}\, Y^{12}_{\alpha_1;11}(b_1R_1) = c_{11,1}\, b_1\, R_1^{-(2\alpha_1+1)} \neq 0\ .$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розвязок [3]:

$$A_1 = \omega_{(\alpha);2}(\beta)\ ,\ \ B_1 = -\omega_{(\alpha);1}(\beta)\ ;\ \ B_3 = c_{11,1}\, b_1\, c_{11,2}\, b_2\, R_1^{-(2\alpha_1+1)}\ , \qquad (17)$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = b_{\alpha_2;1}(\beta)\, Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1,R_1) - b_{\alpha_2;2}(\beta)\, Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1,R_1)\ .$$

Підставивши згідно з формулами (15) та (17) визначені величини A_j та B_k у рівності (11), отримаємо:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta) r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r) - \omega_{(\alpha);1}(\beta) r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r)\ ,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{11,1} b_1 R_1^{-(2\alpha_1+1)}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\ \varphi^2_{21}(b_2R_2,b_2r) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\ \varphi^2_{11}(b_2R_2,b_2r)\right],$$
$$\varphi^2_{j1}(b_2R_2,b_2r) = v^{21}_{j1}(b_2R_2)\cos b_2 r - v^{21}_{j1}(b_2R_2)\sin b_2 r\ , \qquad (18)$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = c_{11,1}\, b_1\, c_{11,2}\, R_1^{-(2\alpha_1+1)}\, D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)\ .$$

Унаслідок співвідношень (18) спектральна вектор-функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ стає відомою.

Наявність вагової $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta\left[b_1(\beta)\right]^{-1}\left(\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}$$

дозволяє побудувати пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), які породжені на множині I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1):

$$H_{(\alpha)}\left[g(r)\right] = \int_0^\infty g(r)\, V_{(\alpha)}(r,\beta)\, \sigma(r)\, dr \equiv \tilde{g}(\beta)\ , \qquad (19)$$

$$H^{-1}_{(\alpha)}\left[\tilde{g}(\beta)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)\, V_{(\alpha)}(r,\beta)\, \Omega_{(\alpha)}(\beta)\, d\beta \equiv g(r)\ . \qquad (20)$$

Математичним обґрунтуванням формул (19), (20) є твердження.

Теорема 1. *Якщо функція*

$$f(r) = \left[\theta(r)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)1 + \theta(r-R_2)r^{\alpha_2-1/2}\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$*, то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\ . \qquad (21)$$

Доведення. Застосуємо метод дельтаподібної послідовності – ядро Коші як фундаментальна матриця розвязків задачі Коші для системи рівнянь із частинними похідними параболічного типу, породженої ГДО $M_{(\alpha)}$.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+ = \left\{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in I_2^+\right\}$ розвязку диференціальних рівнянь параболічного типу

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - B_{\alpha_1}^*[u_1] = 0\,,\ r \in (0, R_1)\,,\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - F[u_2] = 0\,,\ r \in (R_1, R_2)\,,\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - B_{\alpha_3}[u_3] = 0\,,\ r \in (R_2, \infty)
\end{gathered}
\tag{22}
$$

із початковими умовами

$$
u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r)\,,\ r \in I_2^+\,,\ j = \overline{1,3}
\tag{23}
$$

та умовами спряження

$$
\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)] \right)\Big|_{r=R_k} = 0\,,\ k = 1,2\,.
\tag{24}
$$

У рівності (24) беруть участь диференціальні оператори

$$
L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\,;\ j,m,k = 1,2\,.
$$

Припустимо, що функція $u(t,r) = \left\{ u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r) \right\}$ є оригіналом за Лапласом щодо t [4]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (22)–(24) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розвязок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича – Лєбєдєва для модифікованих функцій:

$$
\begin{gathered}
(B_{\alpha_1}^* - q_1^2) u_1^*(p,r) = -g_1(r)\,,\ r \in (0, R_1)\,,\\
(F - q_2^2)\, u_2^*(p,r) = -g_2(r)\,,\ r \in (R_1, R_2)\,,\\
(B_{\alpha_2} - q_3^2)\, u_3^*(p,r) = -g_3(r)\,,\ r \in (R_2, \infty)\,.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

За умовами спряження

$$
\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k \right) u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k \right) u_{k+1}^*(p,r) \right]\Bigg|_{r=R_k} = 0\,;\ j,k = 1,2\,.
\tag{26}
$$

Тут $q_1 = (p + \gamma_j^2)^{1/2}$, $u_j^*(p,r) = \int\limits_0^\infty u_j(t,r)\, e^{-pt} dt$, $\overline{\alpha}_{jm}^k = \overline{\alpha}_{jm}^k + p\,\delta_{jm}^k$, $\overline{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + p\,\gamma_{jm}^k$, $\operatorname{Re} q_j > 0$.

Ми вважаємо, що числа

$$
\psi_{jk} \equiv \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - \left[\delta_{j1}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k) \right] = 0\,.
$$

У протилежному випадку переходимо до нових початкових даних $\overline{g}_1(r) = g_1(r) - b_1$, $\overline{g}_2(r) = g_2(r) - (a_2 r + b_2)$, $\overline{g}_3(r) = g_3(r) - b_3$ і числа b_1, b_2, b_3 та a_2 знаходимо із алгебраїчної системи

$$
(\gamma_{j1}^k R_k + \delta_{j1}^k)\, a_k + \gamma_{j1}^k b_k - (\gamma_{j2}^k R_k + \delta_{j2}^k)\, a_{k+1} - \gamma_{j2}^k b_{k+1} = \psi_{jk}\,;\ a_1 = a_3 = 0\,.
$$

При виконанні умов на коефіцієнти ця система має єдиний розвязок. Фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)\, v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1 - q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha_1 + q_1}$ [5]; фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Фур'є $(F - q_2^2)\, v = 0$ утворюють функції $v_1 = \operatorname{ch} q_2 r$ та $v_2 = \operatorname{sh} q_2 r$ [6], фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Конторовича – Лєбєдєва $(B_{\alpha_2} - q_3^2)\, v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [7].

Наявність фундаментальної системи розвязків дозволяє побудувати розвязок крайової задачі (25), (26) методом функцій Коші [9]:

$$
\begin{gathered}
u_1^*(p,r) = A_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int\limits_0^{R_1} E_1^*(p,r,\rho)\, g_1(\rho)\, \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho\,,\\
u_2^*(p,r) = A_2 \operatorname{ch} q_2 r + B_2 \operatorname{sh} q_2 r + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho)\, g_2(\rho)\, d\rho\,,\\
u_3^*(p,r) = B_3 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho)\, g_3(\rho)\, \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho\,.
\end{gathered}
\tag{27}
$$

У рівностях (27) $E_j^*(p,r,\rho)$ – функції Коші:

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_1Z^{12}_{\alpha_1;11}(q_1,R_1)}\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho),\ 0<r<\rho<R_1,\\ \rho^{-\alpha_1+q_1}\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),\ 0<\rho<r<R_1,\end{cases} \quad (28)$$

$$E_2^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases} \Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho),\ R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r),\ R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \quad (29)$$

$$E_3^*(p,r,\rho)=-\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}\begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r),\ R_2<r<\rho<\infty,\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho),\ R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \quad (30)$$

У рівностях (28)–(30) беруть участь функції:

$$Z^{11}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1)=\left[\left(\overline{\beta}^1_{j1}-\alpha_1R_1^{-1}\overline{\alpha}^1_{j1}\right)-\overline{\alpha}^1_{j1}R_1^{-1}q_1\right]R_1^{-\alpha_1-q_1},$$

$$Z^{12}_{\alpha_1,j1}(q_1,R_1)=\left[\left(\overline{\beta}^1_{j1}-\alpha_1R_1^{-1}\overline{\alpha}^1_{j1}\right)+\overline{\alpha}^1_{j1}R_1^{-1}q_1\right]R_1^{-\alpha_1+q_1},$$

$$\psi^{1*}_{\alpha_1j1}(q_1,r)=Z^{12}_{\alpha_1j1}(q_1,R_1)r^{-\alpha_1-q_1}-Z^{11}_{\alpha_1j1}(q_1,R_1)r^{-\alpha_1+q_1},$$

$$V^{m1}_{jk}(q_sR_m)=\overline{\alpha}^m_{jk}q_s\,\mathrm{sh}\,q_sR_m+\overline{\beta}^m_{jk}\,\mathrm{ch}\,q_sR_m\equiv(\overline{\alpha}^m_{jk}d/dr+\overline{\beta}^m_{jk})\,\mathrm{ch}\,q_sr\Big|_{r=R_m},$$

$$V^{m2}_{jk}(q_sR_m)=\overline{\alpha}^m_{jk}q_s\,\mathrm{ch}\,q_sR_m+\overline{\beta}^m_{jk}\,\mathrm{sh}\,q_sR_m\equiv(\overline{\alpha}^m_{jk}d/dr+\overline{\beta}^m_{jk})\,\mathrm{ch}\,q_sr\Big|_{r=R_m},$$

$$\Phi^m_{jk}(q_sR_m,q_sr)=V^{m2}_{jk}(q_sR_m)\,\mathrm{ch}\,q_sr-V^{m1}_{jk}(q_sR_m)\,\mathrm{sh}\,q_sr,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2)-V^{12}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2);\ j,k=1,2,$$

$$U^{m1}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)=\left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{q_3-\alpha_2}{R_m}+\overline{\beta}^m_{jk}\right)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_m)+\overline{\alpha}^m_{jk}\lambda^2R_m\,I_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)=\left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{q_3-\alpha_2}{R_m}+\overline{\beta}^m_{jk}\right)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_m)+\overline{\alpha}^m_{jk}\lambda^2R_m\,K_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$\psi^{m*}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)=U^{m1}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)-U^{m2}_{q_3,\alpha_2;jk}(\lambda R_m)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r).$$

Умови спряження (26) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають неоднорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z^{12}_{\alpha_1jk}(q_1,R_1)A_1-V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2-V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2=\delta_{j2}G^*_{12},\ j=1,2; \quad (31)$$

$$V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2+V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)B_3=\delta_{j2}G^*_{23}.$$

У системі (31) беруть участь функції

$$G^*_{12}=\frac{c^*_{11}(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{\rho^{-\alpha_1+q_1}}{Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+c^*_{21}(p)\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho,$$

$$G^*_{23}=-c^*_{12}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho+\frac{c^*_{22}(p)}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int\limits_{R_3}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_2}(q_3\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12}=0$, $\delta_{22}=1$) [3].

Уведемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1,j}(p)=Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{q_3,\alpha_2;j}(p)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$\theta^*_{\alpha_1,1}(r,p)=Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_2,q_2r)-Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_2,q_2r),$$

$$\theta^*_{q_3,\alpha_2,2}(r,p)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розвязності крайової задачі (25), (26): для $p=\sigma+is$ із $\mathrm{Re}\,p=\sigma\ge\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа та $\mathrm{Im}\,p=s\in(-\infty,+\infty)$ – визначник алгебраїчної системи (31)

$$\Delta^*_{(\alpha)}(p)\equiv Z^{12}_{\alpha_1,11}(q_1,R_1)B_{q_3,\alpha_2;2}(p)-Z^{12}_{\alpha_1,21}(q_1,R_1)B_{q_3,\alpha_2;1}(p)=$$

$$=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)A_{\alpha_1,1}(p)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)A_{\alpha_1,2}(p)\neq0. \quad (32)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (25) функції впливу:

$$H^*_{(\alpha);11}(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_1\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}\left[B_{q_3,\alpha_2;2}(p)\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)-B_{q_3,\alpha_2;1}\psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,\rho)\right],\ 0<r<\rho<R_1;\\ \rho^{-\alpha_1+q_1}\left[B_{q_3,\alpha_2;2}(p)\psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)-B_{q_3,\alpha_2;1}\psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)\right],\ 0<\rho<r<R_1;\end{cases}$$

$$H^*_{(\alpha);12}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}r^{-\alpha_1+q_1}\theta^*_{q_3,\alpha_2;2}(\rho,p);$$

$$H^*_{(\alpha);13}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}q_2r^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho);$$

$$H^*_{(\alpha);21}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\rho^{-\alpha_1+q_1}\theta_{q_3,\alpha_2;2}(r,p);$$

$$H^*_{(\alpha);22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases}\theta^*_{\alpha_1;1}(r,p)\theta_{q_3,\alpha_2;2}(\rho,p),\ R_1<r<\rho<R_2;\\ \theta^*_{\alpha_1;1}(\rho,p)\theta_{q_3,\alpha_2;2}(r,p),\ R_1<\rho<r<R_2;\end{cases}$$

$$H^*_{(\alpha);23}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\theta^*_{\alpha_1;1}(r,p)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho);\qquad(33)$$

$$H^*_{(\alpha);31}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}c^*_{12}q_2}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\rho^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);$$

$$H^*_{(\alpha);32}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{12}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\theta^*_{\alpha_1;1}(\rho,p)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);$$

$$H^*_{q_3,\alpha_2;33}(p,r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)[A_{\alpha_2;2}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)-A_{\alpha_1;1}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r)],\ R_2<r<\rho<\infty;\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)[A_{\alpha_2;2}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)-A_{\alpha_1;1}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda\rho)],\ R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

У результаті однозначної розвязності алгебраїчної системи (31), підстановки отриманих значень A_j та B_k у формули (27) і низки елементарних перетворень маємо єдиний розвязок крайової задачі (25), (26):

$$u^*_j(p,r)=\int_0^{R_1}H^*_{(\alpha);j1}(p,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H^*_{(\alpha);j2}(p,r,\rho)g_2(\rho)d\rho+\qquad(34)$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}H^*_{(\alpha);j3}(p,r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}.$$

Повертаючись у (34) до оригіналу, отримуємо єдиний розвязок параболічної задачі (22)–(24):

$$u_j(t,r)=\int_0^{R_1}H_{(\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{(\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)d\rho+\qquad(35)$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}H^*_{(\alpha);j3}(t,r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}.$$

У рівностях (35) за означенням [4]

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}H^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)e^{pt}\,dp,\ j,k=\overline{1,3}.\qquad(36)$$

Особливими точками функцій $H^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ та $p=\infty$.

Нехай $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_3^2\}$. Покладемо $\gamma^2-\gamma_j^2=k_j^2\ge 0$. Тоді при $\sqrt{p+\gamma_j^2}=i\sqrt{\beta^2+k_j^2}$ маємо, що $p+\gamma_j^2=-(\beta^2+k_j^2)$. Звідси випливає, що $p=-(\beta^2+k_j^2+\gamma_j^2)=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv(\beta^2+\gamma^2)\exp(\pi i)$; $dp=-2\beta d\beta$.

Якщо скористатися методом контурного інтеграла, лемою Жордана і теоремою Коші [4], то формули (36) можна перетворити майже на розрахункові:

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\left\{H^*_{(\alpha);jk}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho)\right\}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\,\beta d\beta;\ j,k=\overline{1,3}.\qquad(37)$$

Тут $\mathrm{Im}(...)$ означає уявну частину виразу (…).

Виконавши зазначені у формулі (37) операції, знаходимо

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\,\Omega_{(\alpha)}(\beta)\sigma_k\,d\beta;\ j,k=\overline{1,3}.\qquad(38)$$

Розвязок (35) параболічної задачі (22)–(24) набуває вигляду

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\left(\int_0^{R_1}g_1(\rho)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\sigma_2d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta+\qquad(39)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)V_{(\alpha);3}(p,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3}.$$

Унаслідок властивостей ядра Коші як дельтаподібної послідовності та початкових умов (23) одержуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);1}(r,\beta)\left(\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,, \tag{40}$$

$$g_2(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);2}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,, \tag{41}$$

$$g_3(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);3}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,. \tag{42}$$

Помножимо рівність (40) на $\theta(r)\theta(R_1-r)$, рівність (41) – на $\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)$, а рівність (42) помножимо на $\theta(r-R_2)$ і додамо. У результаті приходимо до інтегрального зображення (21). Теорему доведено.

Застосування запровадженого формулами (19), (20) гібридного інтегрального перетворення (ГІП) базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{(\alpha)}$.

Теорема 2. *Якщо функція $M_{(\alpha)}[g(r)]$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження*

$$\left[(\tilde{\alpha}_{j1}^k d/dr+\tilde{\beta}_{j1}^k)g_k(r)-(\tilde{\alpha}_{j2}^k d/dr+\tilde{\beta}_{j2}^k)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,;\ \ j,k=1,2\,, \tag{43}$$

та умови обмеження (3), то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$H_\alpha\left[M_{(\alpha)}[g(r)]\right]=-\beta^2\bar{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\bar{g}_j(\beta)+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}\right]. \tag{44}$$

Доведення тотожності (44) здійснюється за відомою логічною схемою [5; 7].

Висновки. Наявність інтегрального зображення (21) дозволяє побудувати пряме (19) та обернене (20) ГІП, породжені ГДО Ейлера – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ на полярній осі із двома точками спряження. Отримані ГІП можна застосовувати для знаходження точних аналітичних розвязків мішаних крайових задач як із мякими, так і з жорсткими межами (у цьому випадку коефіцієнти $\delta_{jm}^k=0$, $\gamma_{jm}^k=0$). Одержані розвязки неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть використовуватись у теоретичних дослідженнях і в компютерному моделюванні процесів поширення теплоти в кусково-неоднорідному середовищі.

Список використаних джерел

1. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. – К. : Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Конет І. М.* Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. – Камянець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. – 244 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1971. – 432 с.
4. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
5. *Ленюк М. П.* Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку / М. П. Ленюк. – Чернівці : Прут. – 2012 – 224 с.
6. *Ленюк М. П.* Интегральные преобразования Фурье для кусочно-однородных неограниченных и полуограниченных сред / М. П. Ленюк. – К., 1985. – 60 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; N 85).
7. *Ленюк М. П.* Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. – Чернівці : Прут, 2002. – 280 с.
8. *Мороз В. В.* Моделювання нестаціонарного температурного поля в багатошаровій кусково-однорідній пластині методом інтегрального перетворення Фур'є зі спектральним параметром у крайових умовах та умовах спряження / В. В. Мороз // Зб. наук. пр. ф-ту прикладної математики та компютерних технологій ХНУ. – 2009. № 1(2). – С. 89–94.
9. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Физматгиз, 1959. – 428 с.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

Надійшла до редколегії 14.05.17

В. Мороз, старш. препод.
Хмельницкий национальный университет, Хмельницкий, Украина

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ И УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ

Методом гибридного интегрального преобразования типа Эйлера – Фурье – (Конторовича – Лебедева) на полярной оси с двумя точками сопряжения получено интегральное представление точного аналитического решения смешанной краевой задачи для уравнений параболического типа в предположении, что краевые условия и условия сопряжения содержат производную по времени.

V. Moroz, senior lecturer
Khmelnitsky National University, Khmelnitsky, Ukraine

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DERIVATIVE BY TIME IN BOUNDARY CONDITIONS AND CONDITIONS OF CONTRACTING

Using the hybrid integral transformation type Euler – Fourier – (Kontorovich – Lebedev) on a polar axis with two conjugation points, it was obtained the integral representation of exact analytical solution of the mixed parabolic boundary value problem equations of parabolic type in supposition that the boundary conditions and conjugation conditions contain the time derivative.