УДК: 519.21

Ю. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф., М. Шатохін, студ.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
Email: *myus@univ.kiev.ua, mike@mbox.in.ua*

БАГАТОВИМІРНИЙ ВІНЕРІВСЬКИЙ ПРОЦЕС ЯК ДИФУЗІЙНИЙ

Докладно показано застосування теореми Колмогорова для доведення того факту, що багатовимірний вінерівський процес є дифузійним з одиничною матрицею дифузії.

Вступ. Усе, що нас оточує, розвивається і змінюється в часі – природа, люди, технічні засоби, економічні та фінансові інструменти. Може, лише вічні гори стоять непохитно, але і для них був період утворення, і зараз теж вони зазнають повільних змін. Проте не будемо загострювати свою увагу на вічному і розглянемо такі обєкти та явища, які змінюються за доступний для огляду і не дуже великий період часу. Нехай, наприклад, це ціни фінансових активів (той, хто любить техніку, а не просто бавиться з гаджетами, може, наприклад, розглянути процес проходження сигналу каналами сотового зв'язку). І ціни на фінансових ринках, і процес проходження сигналу, розвиваючись у часі, утворюють динамічну систему. Нема аксіоматичного визначення динамічної системи, але зміст цього поняття доступний кожній людині. Далі, оскільки ми є математиками, наша задача – дати математичний опис динамічної системи. Математична мова для опису динамічних систем – це, як правило, мова рівнянь. Оскільки рівняння повинно пов'язати координати системи та її швидкість, воно має бути диференціальним. А тепер увага – ви можете заздалегідь назвати ціни активів або передбачити швидкість плину ріки протягом весняних місяців? Мабуть, це неможливо зробити точно, оскільки і те й інше залежить від дії великої кількості випадкових чинників – це і якість, і кількість врожаю зернових, і розміри добутку нафти, і температура повітря, що впливає на швидкість танення снігів, і багато інших. Отже, у диференціальне рівняння, яким ми хочемо описати нашу динамічну систему, треба включити щонайменше два доданки – один відповідатиме за регулярну передбачувану і прогнозовану зміну, а другий має бути вельми нерегулярним, щоб відобразити певний хаос, притаманний динаміці багатьох явищ. Перший із цих доданків називається зносом, або зсувом, або трендом, а от друга випадкова компонента називається дифузією, і сума цих двох доданків називається дифузійним процесом. Тепер ми спробуємо описати найпростіший дифузійний процес, який взагалі не має тренду, тобто опишемо дифузію в чистому вигляді, та ще й із найпростішими коефіцієнтами. Ця дифузія, або що те саме, цей дифузійний процес, називається вінерівським процесом. Справа дещо ускладнюється тим, що ми знаходимось у багатовимірному просторі, і тому нам доведеться займатися диференціюванням функцій багатьох змінних. Нащо багато вимірів, – спитає читач, – якщо знайомий нам простір, у якому ми живемо, є тривимірним, і уявити собі більш високу розмірність важко? Задайте це питання Марині Вязовській, видатній дослідниці, яка була студенткою мехмату Київського національного університету імені Тараса Шевченка і яка зробила справжній прорив у теорії оптимального пакування куль у 24-вимірному просторі. Вона розкаже, зокрема, що літальний апарат Вояджер розкадровує сигнал на 24 незалежні компоненти, тому що це допомагає оптимальним чином відновити сигнал за умови втрати деякої компоненти або деякої кількості компонент. Узагалі, багато цікавих речей можна розповісти про багатовимірні простори, але перейдемо до математичного опису задачі. Ми зробимо це таким чином: спочатку дамо загальне означення багатовимірного дифузійного процесу, паралельно дамо означення багатовимірного вінерівського процесу, а потім доведемо, що вінерівський процес є дифузійним і знайдемо його дифузійну матрицю, точніше, покажемо, що вона є одиничною. Паралельно ми окреслимо зв'язок теорії дифузійних процесів із теорією диференціальних операторів у частинних похідних другого порядку.

Необхідні означення. Випадкова величина – це результат деякого стохастичного експерименту, і цей результат, зазвичай, є дійсним або комплексним вектором. Якщо ж результат є функцією деякого параметра, то це вже маємо випадковий процес.

Означення 1. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{F},P)$, фазовий простір $(G,\mathcal{G})$ і деяку параметричну множину T. Випадковим процесом з фазовим простором G називається функція

$$\xi=\xi(\omega,t):\Omega\times T\mapsto G,$$

що є $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ -вимірною для кожного значення параметра.

Зрозуміло, що не завжди треба розглядати випадковий процес як функцію обох змінних. Наприклад, якщо зафіксувати $t\in T$, то одержимо випадкову величину $\xi(t)$ – значення процесу ξ в точці t. Як і кожна випадкова величина, вона має свій імовірнісний розподіл. Звісно, цікавіше знати сумісний розподіл значень процесу для деякого набору параметрів. Так отримаємо вектор $(\xi(t_1),\xi(t_2),\ldots,\xi(t_n))$, розподіл якого називають скінченновимірним розподілом випадкового процесу. Незважаючи на те, що параметрична множина може бути як завгодно великою, ці розподіли вже містять доволі багато інформації та в певному розумінні однозначно визначають весь процес. З іншого боку, можна також розглядати при фіксованому $\omega\in\Omega$ відображення $\xi_t(\omega),t\in T$, яке ставить у відповідність елементарній події деяку функцію, яка діє з параметричної множини у фазовий простір. Цей об'єкт називають реалізацією або траєкторією випадкового процесу.

Зазвичай параметричну множину розглядають як аналог часу й покладають підмножиною $\mathbb{R}$, такою як промінь або відрізок, тож вважатимемо надалі, що $T=\mathbb{R}^+$. У такій інтерпретації природно прийняти, що в кожний момент часу t відомі значення процесу в минулому, але не в майбутньому. Це можна зрозуміти так, що існує деяка σ-алгебра, відносно якої процес до моменту t є вимірним, а після – ні, що веде до означення фільтрації.

Означення 2. Фільтрацією ймовірнісного простору $(\Omega,\mathcal{F},P)$ називають набір σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, причому

$$\forall s,t\in T,s<t:\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}.$$

Як правило, ще вимагають від фільтрації неперервності справа, але зараз не будемо на цьому зупинятись детально. Імовірнісний простір із заданою на ньому фільтрацією називають фільтрованим простором. Випадковий процес ξ з параметричною множиною T називається адаптованим до фільтрації, якщо

$$\sigma(\xi(t))\subset\mathcal{F}_t.$$

Натуральною фільтрацією називають таку найменшу фільтрацію, до якої процес адаптований, тобто

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi(s), s \le t\}.$$

Інколи природно вважати, що еволюція випадкового процесу в майбутньому залежить від його стану в теперішньому, і за умови, що цей стан відомий, не залежить від історії, як наприклад, для броунівського руху. У теорії випадкових процесів це називається марковською властивістю.

Означення 3. Нехай задано фільтрований простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ та адаптований процес ξ. Кажуть, що він має марковську властивість, якщо

$$\forall t \in T \forall A \in \mathcal{F}_t, B \in \sigma\{\xi(s), s \ge t\} : P(A \cap B \mid \xi(t)) = P(A \mid \xi(t)) P(B \mid \xi(t)).$$

Процес при цьому називають марковським.

Для випадкового процесу може бути відома основна тенденція його розвитку, проте він може також зазнавати впливів випадкових факторів. Наприклад, ціна акцій на біржі дуже часто змінюється, але для прибуткової компанії вона має в середньому зростати. Отже, незважаючи на те, що еволюція процесу не детермінована, щодо неї можна зробити певні висновки. Так виникає поняття перехідної ймовірності, або перехідної функції.

Означення 4. Перехідною функцією марковського процесу ξ із фазовим простором $(G, \mathcal{G})$ називають таку функцію $P(s,x,t,A)$, де $s,t \in T, x \in G, A \in \mathcal{G}$, що

1) за фіксованих s,x,t функція $P(s,x,t,\cdot)$ є ймовірнісною мірою на $\mathcal{G}$;

2) за фіксованих s,t,A функція $P(s,\cdot,t,A)$ вимірна відносно $\mathcal{G}$;

3) $P(s,x,s,A) = \delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$;

4) виконується тотожність Колмогорова – Чепмена:

$$0 \le s \le u \le t : P(s,x,t,A) = \int_G P(u,y,t,A) P(s,x,u,dy).$$

Якщо відомо, як процес еволюціонує з кожного можливого стану, але ймовірнісний розподіл станів невідомий, то для його опису треба розглянути загальніший об'єкт.

Означення 5. Нехай задано фільтрований імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ та адаптований випадковий процес $\xi(\omega,t)$, фазовий простір $(G, \mathcal{G})$ і перехідну функцію $P(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$. Нехай також для всіх $s \in T, x \in G$ на $\mathcal{F}_{\ge s}$ визначена ймовірнісна міра $P_{s,x}$. Тоді $(\xi(\omega,t), P_{s,x})$ називається маркоівською сім'єю випадкових величин із перехідною функцією P, якщо для довільних s,x

1) $\xi(\omega,t)$ – марковський на просторі $(\Omega, \mathcal{F}_{\ge s}, P_{s,x})$ і має відповідну перехідну функцію;

2) $P_{s,x}(\xi(\omega,s) = x) = 1$.

Це можна уявити як набір марковських процесів, які стартують у час s із різних точок простору, що особливо корисно й точно, якщо параметрична множина має найменший елемент, як у випадку $T = \mathbb{R}^+$.

Якщо параметрична множина допускає зсув, тобто $\forall h \in T : T + h \subset T$, то можна досліджувати однорідність, або незмінність, об'єктів відносно цього зсуву.

Означення 6. Перехідна функція P називається однорідною, якщо

$$\forall s,t,h \in \mathbb{R}^+, x \in G, A \in \mathcal{G} : P(s+h, x, t+h, A) = P(s,x,t,A).$$

У разі однорідності можна прибрати один аргумент функції P, якщо покласти

$$P(x,t,A) = P(0,x,t,A) = P(s,x,t+s,A).$$

Марковська сім'я з такою перехідною ймовірністю також називається однорідною.

Нехай G – банахів простір. Розглянемо G_b – простір обмежених вимірних дійснозначних функцій із рівномірною нормою, який також буде банаховим. Надалі буде необхідний такий об'єкт для побудови інфінітезимального оператора.

Означення 7. Нехай $f \in G_b$. Оператором зсуву називають відображення із G_b на себе, що задане співвідношенням

$$\mathcal{P}^t f(x) = \int_G P(x,t,dy) f(y), t \ge 0.$$

Неважко помітити, що оператор зсуву є лінійним неперервним оператором на G_b, який задовольняє такі співвідношення:

1) $\mathcal{P}^t 1 = 1$;

2) $\mathcal{P}^0 = E$ – тотожній оператор;

3) $\mathcal{P}^{t+s} = \mathcal{P}^t \mathcal{P}^s$.

Тож, $\{\mathcal{P}^t\}_{t \in T}$ – півгрупа. Тепер можна означити інфінітезимальний оператор, який є аналогом правої (однобічної) похідної для дійснозначних функцій.

Означення 8. Нехай у банаховому просторі X задано півгрупу $\{\mathcal{P}^t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$. Інфінітезимальним оператором півгрупи називається оператор L, заданий співвідношенням

$$Lf = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{P}^t f - f}{t}.$$

Узагалі кажучи, оператор L не буде визначений на всьому просторі X і не буде обмеженим. Природно визначається інфінітезимальний оператор для однорідної марковської сім'ї як такий для відповідних операторів зсуву.

Тепер ми нарешті маємо всі необхідні інструменти для означення дифузійності. Дифузійні процеси походять, зокрема, від математичних моделей хаотичного руху частинок у речовині. Як відомо з механіки, якщо знати всі сили, що діють на частинку, то такий рух описується диференціальним оператором другого порядку (у частинних похідних для багатовимірного випадку). Природно, він матиме неперервну траєкторію та для нього виконуватиметься принцип максимуму: якщо в деякій точці досягається максимум, то там оператор не додатний. Такі міркування інтуїтивно обґрунтовують умови дифузійності для випадкового процесу.

Означення 9. Однорідна марковська сім'я називається дифузійною, якщо

1) усі її траєкторії неперервні.

2) її інфінітезимальний оператор визначений для всіх фінітних двічі неперервно диференційовних функцій і на них є таким:

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

де $b_{ij}(x), a_i(x)$ – неперервні функції, а матриця $A = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – невід'ємно визначена.

Вінерівський процес як дифузійний. Тепер необхідно означити власне вінерівський процес.

Означення 10. Процес $\xi(t), t \in T = \mathbb{R}^+$ називається процесом із незалежними приростами, якщо для довільних $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ його прирости $(\xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))$ незалежні.

Означення 11. Вінерівським процесом називають такий процес W_t, де $t \in \mathbb{R}^+$, що

1) $W_0 = 0$;

2) W_t має незалежні прирости;

3) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Вінерівський процес також часто називають броунівським рухом. Відомо, що його траєкторії можна вважати неперервними, що важливо для дифузійності. Нехай тепер $n \geq 1$.

Означення 12. n-вимірним вінерівським процесом називається вектор

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \vdots \\ W_n(t) \end{pmatrix},$$

де $\{W_i(t) \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ – набір вінерівських незалежних процесів, тобто таких вінерівських процесів, що породжені їхніми значеннями σ-алгебри $\sigma(W_i), i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ – незалежні в сукупності.

Відмітимо, що W – однорідна марковська сім'я. Дійсно, це процес із незалежними приростами, тому він є марковським процессом, а отже і сім'єю. Враховуючи те, що розподіл приростів не змінюється зі зсувом, маємо, що процес є однорідний.

Перейдемо власне до основної мети нашої статті – доведення того факту, що вінерівський процес є дифузійним і знаходження виду його інфінітезимального оператора. Оскільки траєкторії кожної координати вінерівського процесу є неперервними, що випливає із властивостей вінерівського процесу, такими є й траєкторії нашого векторного вінерівського процесу. Для доведення другої властивості, наведеної в означенні 9, застосуємо такий факт.

Теорема 1 (Колмогорова). *Нехай на $\mathbb{R}^n$ задано неперервні функції $b_{ij}(x), a_i(x)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо*

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Нехай (ξ_t, P_x) – марковська сім'я на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ така, що для довільного $\epsilon > 0$ рівномірно відносно x виконуються властивості

(i) $P(t, x, V_\epsilon(x)) = o(t),$

(ii) $\int_{U_\epsilon(x)} (y_i - x_i) P(t, x, dy) = a_i(x)t + o(t), \forall i \in \overline{1,n},$

(iii) $\int_{U_\epsilon(x)} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(t, x, dy) = b_{ij}(x)t + o(t), \forall i, j \in \overline{1,n},$

якщо $t \to 0$, де $\overline{1,n} = \{1, \ldots, n\}$ та

$$\begin{cases} V_\epsilon(x) = \{y \mid \|y - x\| > \epsilon\}, \\ U_\epsilon(x) = \{y \mid \|y - x\| \leq \epsilon\}. \end{cases}$$

Тоді інфінітезимальний оператор цієї сім'ї збігається з L і визначений для довільної $f \in C^{(2)}_{\text{unif}}(\mathbb{R}^n)$, де останнє позначення символізує простір обмежених двічі неперервно диференційовних функцій, рівномірно неперервних разом з усіма своїми похідними до другого порядку включно.

Доведення цієї теореми можна знайти в [1, с. 209]. У теоремі 1 норму вважають декартовою, але використаємо твердження, що властивості *(i)–(iii)* не порушуються за заміни норми еквівалентною. Це твердження зацікавлений читач легко може довести самостійно. Тож покладемо

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \overline{1,n}} |x_i|.$$

Декартову норму надалі позначимо $\|\cdot\|_2$. Варто згадати, що перехідна ймовірність для вінерівського процесу така:

$$P(t,x,A)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n\int_A e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy.$$

Для зручності надалі відповідний множник при інтегралі позначимо просто $C(t)$, тобто

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}},$$

$$P(t,x,A)=(C(t))^n\int_A e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy.$$

Теорема 2. *Багатовимірний вінерівський процес є дифузійним з одиничною коваріаційною матрицею. Його інфінітезимальний оператор є оператором Лапласа.*

Для доведення по черзі перевіримо виконання властивостей *(i)–(iii)* для багатовимірного вінерівського процесу *(i).* Враховуючи, що в обраній нормі

$$V_\epsilon(x)=\left((-\infty,x-\epsilon)\cup(x+\epsilon,\infty)\right)^n,$$

маємо

$$\frac{1}{t}P\left(t,x,V_\epsilon(x)\right)=\frac{1}{t}(C(t))^n\int_{V_\epsilon(x)}e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy=\frac{1}{t}(C(t))^n\int_{V_\epsilon(0)}e^{-\frac{\|u\|_2^2}{2t}}du=$$
$$=\frac{1}{t}(C(t))^n\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i=\frac{C(t)}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\left(C(t)\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1}, \tag{1}$$

де спочатку зробили заміну $u=y-x$, а потім поміняли її на німу змінну інтегрування v. З огляду на те, що отриманий інтеграл не залежить від x, властивість за цією змінною буде рівномірною. Тепер можна помітити, що вираз у дужках у правій частині рівності (1) не перевищує 1, адже

$$C(t)\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv<C(t)\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=1.$$

Тож

$$\frac{1}{t}P(t,x,V_\epsilon(x))\le\frac{C(t)}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=\frac{C(1)}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}},\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}]}e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \tag{2}$$

де в останній рівності виконано заміну змінної $z=\frac{v}{\sqrt{t}}$. Тепер використаємо відому оцінку

$$\forall a>0:\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx\le a^{-1}e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Тоді справедлива така нерівність:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}},\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}]}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}dz\le2\frac{\sqrt{t}}{\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{t}}.$$

Підставимо цю оцінку в рівність (2) і отримаємо

$$\frac{1}{t}P(t,x,V_\epsilon(x))\le2C(1)\frac{1}{\epsilon\sqrt{t}}e^{-\frac{\epsilon^2}{t}}=\frac{2C(1)}{\epsilon^2}\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\epsilon^2}{t}}.$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що

$$\forall\alpha>0:\frac{x^\alpha}{e^x}\to0,x\to+\infty.$$

У нашому випадку $a=\frac{1}{2},x=\frac{\epsilon^2}{t}$, і цей вираз прямує до нескінченності, коли t прямує до нуля. Отже, отримали

$$\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}P(t,x,V_\epsilon(x))=0\Rightarrow P(t,x,V_\epsilon(x))=o(t).$$

(ii). В обраній нормі

$$U_\epsilon(x)=[x-\epsilon,x+\epsilon]^n.$$

Тоді

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)P(t,x,dy)=C(t)^n\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy=$$
$$=C(t)^n\int_{U_\epsilon(0)}u_ie^{-\frac{\|u\|_2^2}{2t}}du=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_ie^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\prod_{j=1,j\neq i}^{n}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{u_j^2}{2t}}du_j= \tag{3}$$
$$=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_ie^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1},$$

де зроблено заміну $u=y-x$. Аналогічно до попереднього, із незалежності отриманого інтеграла від x у кінцевому підсумку отримаємо рівномірність виконання даної властивості за цією змінною. Тепер можна без обмеження загальності покласти $i=1$. Тоді

$$C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}xe^{-\frac{x^2}{2t}}dx=0,$$

адже інтегрується непарна функція $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ по симетричному інтервалу $[-\epsilon,\epsilon]$. Вираз у дужках у правій частині рівності (3) обмежений, адже

$$C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\le C(t)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=1.$$

Тоді

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)P(t,x,dy)=0,$$

що задовольняє умову *(ii)*

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)P(t,x,dy)=a_i(x)t+o(t),$$

якщо покласти $a_i(x)\equiv 0$. Зрозуміло, що тотожний нуль – неперервна функція.

(iii). Якщо $i\neq j$, то можна стверджувати, аналогічно до другої властивості, таке:

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)(y_j-x_j)P(t,x,dy)=0,$$

що задовольняє умову *(iii)*

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)(y_j-x_j)P(t,x,dy)=b_{ij}(x)t+o(t),$$

якщо покласти $b_{ij}(x)\equiv 0$. У випадку, коли $i=j$, то

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2P(t,x,dy)=C(t)^n\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy=C(t)^n\int_{U_\epsilon(0)}u_i^2e^{-\frac{\|u\|_2^2}{2t}}du=$$
$$=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\prod_{j=1,j\neq i}^{n}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{u_j^2}{2t}}du_j=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1},$$

де зроблено заміну $u=y-x$. Аналогічно до попередніх пунктів, якщо доведено виконання властивості для одного x, то властивість виконується рівномірно для всіх x. Вираз у дужках прямує до одиниці, адже

$$C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=C(1)\int_{-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}^{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\to C(1)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1, t\to 0+,$$

де зроблено заміну $x=\frac{v}{\sqrt{t}}$. Для іншого множника зазначимо, що

$$\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i=C(1)\int_{-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}^{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx\to C(1)\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1, t\to\infty,$$

де замінено $x=\frac{u_i}{\sqrt{t}}$ і використано те, що як дисперсія, так і другий нецентральний момент стандартної нормальної випадкової величини дорівнює 1. Із властивості границі, а саме: границя добутку збіжних послідовностей рівна добутку границь, маємо

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2P(t,x,dy)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\left(\lim_{t\to 0+}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1}=1.$$

Із цього робимо висновок про те, що

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2P(t,x,dy)=t+o(t)=b_{ii}(x)t+o(t),\quad b_{ii}\equiv 1.$$

Матриця, що складена з b_{ij} , є одиничною, а така матриця додатно визначена.

Отже, до *n*-вимірного вінерівського процесу W застосовна теорема Колмогорова, тому він має інфінітезимальний оператор, який, у свою чергу, має зображення

$$Lf=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\forall i,j: a_i(x)\equiv 0, b_{ij}(x)=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j,\end{cases}$$

тобто – це оператор Лапласа, або лапласіан: $Lf=\Delta f=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$

Цей оператор визначений для усіх двічі рівномірно неперервно диференційовних функцій, зокрема фінітних, тому W є дифузійним процесом.Теорему повністю доведено.

Висновки. Продемонстровано застосування теореми Колмогорова для доведення дифузійності багатовимірного вінерівського процесу. Знайдено інфінітезимальний оператор півгрупи операторів зсуву, що породжені перехідною ймовірністю цього процесу, та показано, що цей оператор буде лапласіаном.

Список використаних джерел

1. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. – М. : Главная редакция физ.-мат. л-ры изд-ва "Наука", 1975. – 320 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М. : Успехи математических наук (УМН), 1938. – Вып. 5. – С. 5–41.

Надійшла до редколегії 11.05.17

Ю. Мишура, д-р физ.-мат. наук, проф., М. Шатохин, студ.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС КАК ДИФФУЗИОННЫЙ

Теорема Колмогорова применена для доказательства того, что многомерный винеровский процесс является диффузионным с единичной матрицей диффузии.

Y. Mishura, Full Doctor, M. Shatokhin, undergraduate student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

DIFFUSION PROPERTY OF WIENER PROCESS

Kolmogorov theorem is applied to prove the fact that the multidimensional Wiener process is a diffusion with identity diffusion matrix.

УДК 519.21

Л. Пригара, асп.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *pruhara7@gmail.com*

СТОХАСТИЧНЕ ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ЗІ СТІЙКИМ БІЛИМ ШУМОМ

Розглянуто хвильове рівняння на площині зі стійким білим шумом. Визначено потенційний розвязок рівняння за допомогою формули Пуассона – Парсеваля. Установлено локальні властивості реалізацій потенційного розвязку та доведено, що він є узагальненим розвязком рівняння.

Вступ. Рівняння математичної фізики з випадковою правою частиною відіграють значну роль у моделюванні. Більшість літератури з тематики присвячено або випадку загальних стохастичних мір [6, 7], або випадку гауссівських чи субгауссівських розподілів випадковості [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10]. Тому наявні результати непридатні в ситуації, коли випадковість має важкі хвости розподілу. Саме таким результатам присвячено цю статтю, яка є продовженням роботи [6], де розглядалося хвильове рівняння на площині із просторовим α -стійким білим шумом. У цій роботі також розглянуто хвильове рівняння на площині, але випадковий шум є часово-просторовим.

У статті наведено основні відомості щодо стійких величин та мір, формула Пуассона – Парсеваля для хвильового рівняння зі стійким білим шумом та короткі відомості щодо зображення Лепажа. Міститься формулювання та доведення основного результату статті.