$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2\,P(t,x,dy)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2 e^{-\frac{u_i^2}{2t}}\,du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}\,dv\right)^{n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2 e^{-\frac{u_i^2}{2t}}\,du_i\left(\lim_{t\to 0+}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}\,dv\right)^{n-1}=1.$$

Із цього робимо висновок про те, що

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2\,P(t,x,dy)=t+o(t)=b_{ii}(x)t+o(t),\quad b_{ii}\equiv 1.$$

Матриця, що складена з b_{ij} , є одиничною, а така матриця додатно визначена.

Отже, до *n*-вимірного вінерівського процесу W застосовна теорема Колмогорова, тому він має інфінітезимальний оператор, який, у свою чергу, має зображення

$$Lf=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\forall i,j: a_i(x)\equiv 0, b_{ij}(x)=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j,\end{cases}$$

тобто – це оператор Лапласа, або лапласіан: $Lf=\Delta f=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$

Цей оператор визначений для усіх двічі рівномірно неперервно диференційовних функцій, зокрема фінітних, тому W є дифузійним процесом.Теорему повністю доведено.

Висновки. Продемонстровано застосування теореми Колмогорова для доведення дифузійності багатовимірного вінерівського процесу. Знайдено інфінітезимальний оператор півгрупи операторів зсуву, що породжені перехідною ймовірністю цього процесу, та показано, що цей оператор буде лапласіаном.

Список використаних джерел

1. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. – М. : Главная редакция физ.-мат. л-ры изд-ва "Наука", 1975. – 320 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М. : Успехи математических наук (УМН), 1938. – Вып. 5. – С. 5–41.

Надійшла до редколегії 11.05.17

Ю. Мишура, д-р физ.-мат. наук, проф., М. Шатохин, студ.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС КАК ДИФФУЗИОННЫЙ

Теорема Колмогорова применена для доказательства того, что многомерный винеровский процесс является диффузионным с единичной матрицей диффузии.

Y. Mishura, Full Doctor, M. Shatokhin, undergraduate student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

DIFFUSION PROPERTY OF WIENER PROCESS

Kolmogorov theorem is applied to prove the fact that the multidimensional Wiener process is a diffusion with identity diffusion matrix.

УДК 519.21

Л. Пригара, асп.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *pruhara7@gmail.com*

СТОХАСТИЧНЕ ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ЗІ СТІЙКИМ БІЛИМ ШУМОМ

Розглянуто хвильове рівняння на площині зі стійким білим шумом. Визначено потенційний розвязок рівняння за допомогою формули Пуассона – Парсеваля. Установлено локальні властивості реалізацій потенційного розвязку та доведено, що він є узагальненим розвязком рівняння.

Вступ. Рівняння математичної фізики з випадковою правою частиною відіграють значну роль у моделюванні. Більшість літератури з тематики присвячено або випадку загальних стохастичних мір [6, 7], або випадку гауссівських чи субгауссівських розподілів випадковості [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10]. Тому наявні результати непридатні в ситуації, коли випадковість має важкі хвости розподілу. Саме таким результатам присвячено цю статтю, яка є продовженням роботи [6], де розглядалося хвильове рівняння на площині із просторовим α -стійким білим шумом. У цій роботі також розглянуто хвильове рівняння на площині, але випадковий шум є часово-просторовим.

У статті наведено основні відомості щодо стійких величин та мір, формула Пуассона – Парсеваля для хвильового рівняння зі стійким білим шумом та короткі відомості щодо зображення Лепажа. Міститься формулювання та доведення основного результату статті.

Попередні відомості. Стійкі величини та їх розподіли. У цій статті розглядатимуться лише симетричні α-стійкі $(S\alpha S)$ випадкові величини з $\alpha \in (0,2)$. Докладнішу інформацію про стійкі величини можна знайти у [6]. Випадкова величина ξ є $S\alpha S$ із параметром масштабу $\sigma^{\alpha}, \sigma > 0,$ якщо її характеристична функція

$$E\left[e^{i\lambda\xi}\right] = e^{-|\sigma\lambda|^{\alpha}}.$$

Для стійкої величини ξ визначимо $\|\xi\|_{\alpha}^{\alpha} = -\ln E\left[e^{i\xi}\right]$.

Розглядатиметься $S\alpha S$ міра на $R^2 \times R^+$ із незалежними приростами. За означенням це функція $M : B_f\left(R^2 \times R^+\right) \times \Omega \to R$, де $B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ – сім'я борелевих підмножин скінченної міри Лебега, із властивостями:

1) для будь-якої борелевої множини $A \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ випадкова величина $M(A)$ є $S\alpha S$ із параметром масштабу, що дорівнює $\lambda(A)$, – мірі Лебега множини A;

2) для неперетинних множин $A_1,...,A_n \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ значення $M\left(A_1\right),...,M\left(A_n\right)$ є незалежними;

3) для неперетинних множин $A_1,...,A_n,... \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ таких, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$, виконано $M\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} M\left(A_n\right)$ майже напевно.

Для функцій $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(R^2 \times R^+\right)$ інтеграл $I(f) = \int\limits_0^{\infty}\iint\limits_{R^2} f(x,t)M(dx,dt)$ визначено як границю за ймовірністю інтегралів від простих функцій з обмеженим носієм. Справедлива ізометрична властивість

$$\|I(f)\|_{\alpha}^{\alpha} = \int\limits_0^{\infty}\iint\limits_{R^2} |f(x,t)|^{\alpha} dxdt.$$

Для M виконується зображення Лепажа. Нехай φ – довільна неперервна додатна щільність розподілу на $R^2 \times R^+$. Незалежні набори $\{\Gamma_k, k \geq 1\}, \{(\xi_k, \zeta_k), k \geq 1\}, \{g_k, k \geq 1\}$ задовольняють такі умови:

1) $\{\Gamma_k, k \geq 1\}$ – послідовність моментів стрибків пуассонівського процесу з одиничною інтенсивністю;

2) $\{(\xi_k, \zeta_k), k \geq 1\}$ – незалежні випадкові вектори зі щільністю φ;

3) $\{g_k, k \geq 1\}$ – незалежні центровані нормально розподілені величини з $E\left[|g_k|^{\alpha}\right] = 1.$

Тоді M має такий самий розподіл, що й

$$M'(dx,dt) = C_{\alpha} \sum_{k\geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi\left(\xi_k, \zeta_k\right)^{-1/\alpha} \delta_{(\xi_k,\zeta_k)} g_k(dx,dt), \tag{1}$$

де $C_{\alpha} = \left(\dfrac{\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha}$, причому ряд майже напевно збігається.

Рівність (1) потрібно розуміти в такому сенсі: для довільних $f_1,...,f_n \in L^{\alpha}\left(R^2 \times R^+\right)$ вектор $\left(I\left(f_1\right),...,I\left(f_n\right)\right)$ має такий самий розподіл, що й вектор $\left(I'\left(f_1\right),...,I'\left(f_n\right)\right)$, де

$$I'\left(f_n\right) = C_{\alpha} \sum_{k\geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi\left(\xi_k, \zeta_k\right)^{-1/\alpha} f\left(\xi_k, \zeta_k\right) g_k. \tag{2}$$

Надалі без обмеження загальності вважатимемо, що M задається формулою (1), а для функції $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(R^2 \times R^+\right)$ інтеграл $I(f) = \int\limits_0^{\infty}\iint\limits_{R^2} f(x,t)M(dx,dt)$ задається формулою (2), причому ряд є збіжним майже напевно.

Формула Пуассона – Парсеваля для хвильового рівняння з білим шумом. Ми розглядаємо хвильове рівняння з випадковим збуренням:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)U(x,t) = f(x,t),\\ U(x,0) = 0,\\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

У цьому рівнянні випадкове збурення є просторово-часовим шумом, тобто $f(x,t)=\sigma(x,t)\dot{M}(x,t),$ де $\dot{M}(x,t)$ – "α -стійкий білий шум" у R^2, що є щільністю Радона – Нікодима (в узагальненому сенсі) міри M, $\sigma : R^2 \times R^+ \to R$ – неперервна обмежена функція.

Як потенційний розв'язок рівняння (3) варто розглянути функцію, що задана формулою Пуассона – Парсеваля:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t \iint_{y:|x-y|<a(t-\tau)} \frac{\sigma(y_1,y_2,\tau)M(dy_1,dy_2,d\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}. \tag{4}$$

Основні результати. Існування розвязку хвильового рівняння (3). Розвязок рівняння, заданий за допомогою формули Пуассона – Парсеваля, існує з імовірністю 1, про що говорить наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо функція* $\sigma(x,t)$ *є обмеженою, то інтеграл у (4) визначено майже напевно для всіх* $(x,t)\in R^2\times R^+$.

Доведення. Інтеграл у (4) є визначеним, якщо виконується така умова:

$$\int_0^t \iint_{y:|x-y<a(t-\tau)|} \left|\frac{\sigma(y_1,y_2,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}\right|^\alpha dy_1dy_2d\tau<\infty. \tag{5}$$

Перевіримо її.

$$\int_0^t \iint_{y:|x-y<a(t-\tau)|} \left|\frac{\sigma(y_1,y_2,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}\right|^\alpha dy_1dy_2d\tau \le C^\alpha \int_0^t \iint_{y:|x-y<a(t-\tau)|} \frac{dy_1dy_2d\tau}{\left(a^2(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2\right)^{\alpha/2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix} y_1=\rho\cos\varphi \\ y_2=\rho\sin\varphi \\ \varphi\in[0,2\pi] \\ \rho:|x-y|<a(t-\tau)\end{matrix}\right| = C^\alpha\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{\rho:|x-y|<a(t-\tau)} \frac{\rho d\tau d\rho d\varphi}{\left(a^2(t-\tau)^2-(\rho\cos\varphi-x_1)^2-(\rho\sin\varphi-x_2)^2\right)^{\alpha/2}}=\left|\begin{matrix} y_i=x_i+z_i, i=1,2 \\ x_1=x_2=0\end{matrix}\right|=$$

$$=C^\alpha\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{a(t-\tau)}\frac{\rho d\tau d\rho d\varphi}{\left(a^2(t-\tau)^2-\rho^2\right)^{\alpha/2}}=-C^\alpha\pi\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\frac{-2\rho d\tau d\rho}{\left(a^2(t-\tau)^2-\rho^2\right)^{\alpha/2}}=-C^\alpha\pi\int_0^t\frac{\left(a^2(t-\tau)^2-\rho^2\right)^{-\alpha/2+1}}{1-\alpha/2}\Big|_0^{a(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{C^\alpha\pi}{1-\alpha/2}\int_0^t\left(a^2(t-\tau)^2\right)^{1-\alpha/2}d\tau=\frac{C^\alpha\pi a^{2-\alpha}}{1-\alpha/2}\int_0^t(t-\tau)^{2-\alpha}d\tau=\frac{-C^\alpha\pi a^{2-\alpha}}{1-\alpha/2}\frac{(t-\tau)^{3-\alpha}}{3-\alpha}\Big|_0^t=\frac{C^\alpha\pi a^{2-\alpha}t^{3-\alpha}}{(1-\alpha/2)(3-\alpha)}.$$

Оскільки інтеграл скінченний, тобто виконується умова (5), то згідно з визначенням інтеграла α -стійкою мірою, у випадку просторового шуму існує розв'язок хвильового рівняння (3), що має вигляд (4). Теорему доведено.

Поведінка розвязку за просторовою змінною. Виникає природне питання: Чи можна виняткову подію ймовірності нуль у теоремі 1 вибрати одну й ту саму для всіх *x*? Для того, щоб дати відповідь на це запитання, згадаємо розклад Лепажа функції $U(x,t)$:

$$U(x,t)=C_\alpha\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}\frac{\sigma(\xi_k,\zeta_k)}{\sqrt{a^2(t-\zeta_k)^2-|x-\xi_k|^2}}g_kI_{\{|x-\xi_k|<a(t-\zeta_k)\}}.$$

Виявляється, що відповідь на питання негативна, більше того, функція $U(x,t)$ є необмеженою в околі кожної точки, в якій σ не обертається на нуль.

Теорема 2. *Для будь-яких* $t\ge0$ *та* $x\in R^2$ *таких, що* $\sigma(x,t)\ne0$, *та для* $\forall\delta>0$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|=+\infty;\quad \sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|=+\infty.$$

Доведення. Для зручності вважатимемо, не обмежуючи загальності, що

$$(\Omega,F,P)=\left(\Omega_\Gamma\otimes\Omega_{(\xi,\zeta)}\otimes\Omega_g, F_\Gamma\otimes F_{(\xi,\zeta)}\otimes F_g, P_\Gamma\otimes P_{(\xi,\zeta)}\otimes P_g\right)$$

для всіх $\omega=\left(\omega_\Gamma,\omega_{(\xi,\zeta)},\omega_g\right), k\ge1:\Gamma_k(\omega)=\Gamma_k(\omega_\Gamma),(\xi_k,\zeta_k)(\omega)=(\xi_k,\zeta_k)\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right), g_k(\omega)=g_k(\omega_g)$. Оскільки при фіксованих $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$ $U(x,t)$ має гауссівський розподіл, то за законом 0 та 1 для гауссівських мір одержимо

1) $P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)\in\{0,1\}$;

2) $P_g\left(\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|<+\infty\right)\in\{0,1\}$.

Спочатку доведемо, що у (1) імовірність дорівнює нулю для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$. Припустимо, що

$$P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)=1. \tag{6}$$

Тоді за властивістю гауссівських полів дістанемо

$$E_g\left[\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|^2\right]<\infty., \quad E_g\left[\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|^2\right]\ge \sup_{y:|x-y|<\delta}E_g\left[|U(y,t)|^2\right]=$$

$$=\sup_{y:|x-y|<\delta}E_g C_\alpha^2\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_k,\zeta_k)}{a^2(t-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}I_{\{|y-\xi_k|<a(t-\zeta_k)\}}I_{\{|y-\xi_k|<\delta\}}I_{\{|t-\zeta_k|<\delta\}}\ge$$

$$\ge C_\alpha^2\sup_{y:|x-y|<\delta}\Gamma_{k_0}^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})}{a^2(t-\zeta_{k_0})^2-|y-\xi_{k_0}|^2}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<a(t-\zeta_{k_0})\}}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<\delta\}}I_{\{|t-\zeta_{k_0}|<\delta\}}.$$

З іншого боку, для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$ знайдеться таке $k_0=k\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right)$, що $\frac{\delta}{4a}<|t-\zeta_k|<\frac{\delta}{2a}$; $|x-\xi_k|<\frac{\delta}{2}$. Оскільки $\{y:|y-\xi_k|<a(t-\zeta_k)\}\subset\{y:|x-y|<\delta\}$, то $\sup_{y:|x-y|<\delta}\frac{1}{a^2(t-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}=+\infty$. Звідки випливає, що $E_g\left[\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|^2\right]=+\infty$. Ми отримали суперечність із (6). Таким чином, $P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)=0$, а отже,

$$P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)=\int_{\Omega_{(\xi,\zeta)}}\int_{\Omega_\Gamma}P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)dP_g\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right)dP_\Gamma(\omega_\Gamma)=0,$$

що й потрібно було довести.

Доведемо, що у (2) імовірність дорівнює нулю для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$. Аналогічно до попереднього маємо

$$E_g\left[\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|^2\right]\ge\sup_{s:|t-s|<\delta}E_g\left[|U(x,s)|^2\right]=$$

$$=\sup_{s:|t-s|<\delta}E_g C_\alpha^2\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_k,\zeta_k)}{a^2(s-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}I_{\{|y-\xi_k|<a(s-\zeta_k)\}}I_{\{|y-\xi_k|<\delta\}}I_{\{|s-\zeta_k|<\delta\}}\ge$$

$$\ge C_\alpha^2\sup_{s:|t-s|<\delta}\Gamma_{k_0}^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})}{a^2(s-\zeta_{k_0})^2-|y-\xi_{k_0}|^2}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<a(s-\zeta_{k_0})\}}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<\delta\}}I_{\{|s-\zeta_{k_0}|<\delta\}},$$

де $k_0=k\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right)$ таке, що $|x-\xi_k|<\frac{a\delta}{2};|t-\zeta_k|<\frac{\delta}{2}.$ Тоді $\zeta_k+\frac{|x-\xi_k|}{a}\in\{s:|t-s|<\delta\}$ і $\sup_{s:|t-s|<\delta}\frac{1}{a^2(s-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}=+\infty$.

Отже, для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$ маємо $E_g\left[\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|^2\right]=+\infty.$ Звідси, як вище, $P_g\left(\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|<+\infty\right)=0.$

Теорему доведено.

Доведемо, що функція $U(x,t)$ задовольняє рівняння (3) в узагальненому сенсі.

Теорема 3. *Для довільної функції* $\theta(x,t)\in C_{fin}^{\infty}\left(R^2\times R^+\right)$ *з імовірністю 1 виконано рівність*

$$\int_0^\infty\iint_{R^2}U(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t)-a^2\Delta\theta(x,t)\right)dxdt=\int_0^\infty\iint_{R^2}\theta(x,t)\sigma(x,t)M(dx,dt). \tag{7}$$

Зауваження. Виняткова подія ймовірності нуль може залежати від θ.

Доведення. Уведемо позначення:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t)-a^2\Delta\theta(x,t)=\psi(x,t),$$

$$K(y,s)=\int_s^\infty\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{\varphi(y,s)^{-1/\alpha}\sigma(y,s)\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt; \tag{8}$$

$$L(\psi)=\int_0^\infty\iint_{R^2}U(x,t)\psi(x,t)dxdt=C_\alpha\sum_{k=1}^\infty\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}K(\xi_k,\zeta_k)g_k,$$

$$R(\theta)=C_\alpha\sum_{k=1}^\infty\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}\sigma(\xi_k,\zeta_k)\theta(\xi_k,\zeta_k)g_k.$$

Тоді рівність (7) можна записати у вигляді $L(\psi)=R(\theta)$.

Нехай $\operatorname{supp}\theta\subset B(0,R)\times[0,R)$. Тоді

$$K(y,s)=\varphi(y,s)^{-1/\alpha}\sigma(y,s)\int_s^R \iint_{x:|x-y|<a(t-s)} \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt,$$

для $s\le R, K(y,s)=0$, та для $s>R, K(y,s)=0$, якщо $|y|>(a+1)R$. Справді, у такому випадку множина інтегрування $\{x:|x-y|\le a(t-s)\}\subset\{x:|x-y|\le aR\}$ має порожній перетин із $B(0,R)$, тому інтеграл дорівнює 0. Для $|y|\le(a+1)R$ матимемо

$$|K(y,s)|\le\left(\inf_{\substack{|y|\le(a+1)R\\ s\in[0,R]}}\varphi(y,s)\right)^{-1/\alpha}\sup_{\substack{|y|\le(a+1)R\\ s\in[0,R]}}|\sigma(y,s)|\sup_{\substack{|y|\le(a+1)R\\ s\in[0,R]}}|\psi(y,s)|\int_s^R\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{dxdt}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\le C_{R,\psi,\sigma}.$$

З іншого боку, із посиленого закону великих чисел та властивостей нормальних величин випливає, що знайдеться така $\Omega_0\in F, P(\Omega_0)=1$, що для довільних $\omega\in\Omega_0$ та будь-яких $k\ge1$: маємо $\Gamma_k\ge C_1(\omega)k,\ |g_k|\le C_2(\omega)|\log k+1|$, де C_1, C_2 – деякі додатні випадкові величини.

Таким чином, доданок у рівності для $L(\psi)$ обмежений: $|K(y,s)|\le C(\omega)\ C_{R,\psi,\sigma}k^{-1/\alpha}|\log k+1|$, де $C(\omega)$ – деяка скінченна випадкова величина. При фіксованих $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)},\omega_\Gamma\in\Omega_\Gamma$ маємо $E_g\left[L(\psi)^2\right]=C_\alpha^2\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-2/\alpha}K^2(y,s)$. З оцінки (8) випливає, що $E_g\left[L(\psi)^2\right]<\infty$ для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)},\omega_\Gamma\in\Omega_\Gamma$.

Отже, за теоремою Колмогорова про три ряди для довільної функції $\psi(x,t)\in C_{fin}^\infty\left(R^2\times R^+\right)$ ряд $L(\psi)$ збіжний майже напевно. Аналогічно для ряду $R(\theta)$. Отже, достатньо перевірити рівність відповідних часткових сум, тобто довести, що

$$C_\alpha\sum_{k=1}^N\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}g_k\int_s^\infty\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{\sigma(y,s)\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt=C_\alpha\sum_{k=1}^N\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}\theta(y,s)\sigma(y,s)g_kI_{\{x:|x-y|<a(t-s)\}}.$$

Щоб довести останню рівність, досить перевірити рівність відповідних доданків, тобто достатньо перевірити, що для довільного $x:|x-y|<a(t-s)$ виконується рівність

$$\int_s^\infty\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt=\theta(y,s)I_{\{x:|x-y|<a(t-s)\}}.$$

Ця тотожність є стандартною (див., наприклад, [5, теорема 3]). Теорему доведено.

Висновки. У статті розглянуто хвильове рівняння з α-стійким збуренням. Доведено, що існує майже напевно розвязок рівняння, який задається формулою Пуассона – Парсеваля. Також доведено, що він є узагальненим розвязком рівняння.

Список використаних джерел

1. *Balan R. M.* The stochastic wave equation with fractional noise: a random field approach / R. M. Balan, C. A. Tudor // Stochastic Process. Appl. – 2010. – № 120(12). – P. 2468–2494.
2. *Dalang R. C.* The stochastic wave equation in two spatial dimensions / R. C. Dalang, N. E. Frangos. // Ann. Probab. – 1998. – № 26(1). – P. 87–212.
3. *Dalang R. C.* Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three / R. C. Dalang, M. Sanz-Solé //. Mem. Amer. Math. Soc. – 2009. – № 199(931). – P. 70.
4. *Millet A.* On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density / A. Millet, P.-L. Morien // Stochastic Process., Appl. – 2010. – № 86(1). – P. 141–162.
5. *Pryhara L.* Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise / L. Pryhara, G. Shevchenko // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2016. – Vol. 3(3). – P. 237–248.
6. *Radchenko V.* Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Stud. Math. –2009. – №. 194(3). – P. 231–251.
7. *Radchenko V.* Properties of integrals with respect to a general stochastic measure in a stochastic heat equation / V. Radchenko // Theory Probab. Math. Stat. – 2011. – № 82. – P. 103–114.
8. *Quer-Sardanyons L.* The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet / L. Quer-Sardanyons, S. Tindel // Stochastic Process. Appl. –2007. – № 117(10). – P. 1448–1472.
9. *Samorodnitsky G.* Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance / G .Samorodnitsky, M. S Taqqu // Chapman & Hall, New York, 1994.
10. *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations. In: École Dété de Probabilités de Saint-Flour, XIV—1984. – J. B. Walsh, Lecture Notes in Math. – Springer, Berlin. – 1986.– Vol. 1180. – P. 265–439.

Надійшла до редколегії 22.11.16

Л. Пригара, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С УСТОЙЧИВЫМ БЕЛЫМ ШУМОМ

Рассмотрено волновое уравнение на плоскости с устойчивым белым шумом. Потенциальное решение уравнения определено формулой Пуассона – Парсеваля. Установлены локальные свойства реализаций потенциального решения. Доказано, что оно является обобщенным решением уравнения.

L. Pryhara, PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

STOCHASTIC WAVE EQUATION WITH STABLE WHITE NOISE

A planar wave equation with stable white noise is considered. One potential solution to the equation is defined of Poisson – Parseval formula. Local sample properties of the candidate solution are studied. It is shown that the candidate solution is a generalized solution to the equation.