УДК 517.5

П. Задерей, д-р фіз.-мат. наук
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ,
М. Гаєвський, канд. фіз.-мат. наук
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький,
М. Веремій, асп.
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ

АСИМПТОТИЧНА ФОРМУЛА ДЛЯ ІНТЕГРАЛА ВІД МОДУЛЯ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ФУР'Є

Отримано асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є із комплексними коефіцієнтами, на які накладаються умови типу Сідона – Теляковського.

Вступ. У цій статті встановлюється асимптотична формула для інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt \tag{1}$$

через коефіцієнти $c_k \in C$, що задовольняють умови типу Сідона – Теляковського [5; 10], які будемо позначати через $S-T^*$. Припускаємо виконання таких умов:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0, \tag{2}$$

існують такі числа A_k, що

$$|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \le A_k, k = 0,1,2..., \tag{3}$$

причому

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta A_k\right| < \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k} < \infty. \tag{5}$$

Умови (2)-(5) еквівалентні, тобто описують одну й ту ж множину тригонометричних рядів, таким умовам: існують такі числа $A_k \downarrow 0$, що виконуються нерівності (3), збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, а також виконується умова (5). Ці умови вперше були встановлені С. О. Теляковським [5] при вивченні умов інтегровності тригонометричних рядів:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{7}$$

де $a_k, b_k \in R$, а їх еквівалентність умовам (3) і (4) доведена А. Лейндлером [11].

Зокрема С. О. Теляковським [5] встановлено, що якщо для коефіцієнтів ряду (6) виконуються умови (2)-(4), то цей ряд є рядом Фур'є сумовної функції і виконується нерівність

$$\int_{0}^{\pi}\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\right| dx \le K \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta A_k|. \tag{8}$$

Тут і далі у статті K – деяка абсолютна стала, можливо, не одна й та ж у різних формулах.

Якщо для коефіцієнтів ряду (7) виконуються умови (2)-(4) , то цей ряд є рядом Фур'є сумовної функції тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}$ і справедлива оцінка

$$\int_{\pi/(m+1)}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\right| dx = \sum_{k=1}^{m}\frac{|b_k|}{k} + O\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta A_k|\right). \tag{9}$$

У цій статті ми розглянемо умови інтегровності S-T*. Якщо покласти $c_k = a_k - ib_k, k = 1,2,..., c_0 = \frac{a_0}{2}$, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) + i\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_k \cos kt + a_k \sin kt\right)$, і врахувавши нерівності $|\Delta a_k| \le |\Delta c_k|, |\Delta b_k| \le |\Delta c_k|$, можна стверджувати, що ряд в (1) при виконанні умов (2)-(5) буде рядом Фур'є деякої функції $f(\cdot) \in L_+ = \{g \in L : c_{-k} = 0, k = 1,2,...\}$.

Добре відомим є результат Харді – Літтвуда [4, с. 454], де для $\forall f \in L_+$ з рядом Фур'є $S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ встановлено оцінку $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k+1} \le K\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt$. Згодом Л. Фейер [9] показав, що $K = \pi$.

Г. М. Голузіним [2] покращено цю оцінку $2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k|}{k+\frac{1}{2}} \le \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right|dt.$

У статті О. В. Єфімова [3] доведено, що $\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=o}^{n} c_k e^{ikt}\right|dt \le K\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2 c_k| + \sum_{k=1}^{n}\frac{|c_k|+|c_{n-k}|}{k}\right).$

М. В. Гаєвський і П. В. Задерей [1] установили асимптотичну рівність для інтеграла від модуля тригонометричного полінома

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}\right|dt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}(|c_k|+|c_{n-k}|)\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-4\frac{|c_k|\cdot|c_{n-k}|}{(|c_k|+|c_{n-k}|)^2}\sin^2 t}\,dt + O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}|\Delta^2 c_{k-1}|\right).$$

Відомі також результати Р. М. Тригуба, де оцінки для інтеграла (1), виражені в термінах коефіцієнтів Фур'є – Лагранжа, інтегровної за Ріманом функції $c(x)$ такої, що $c_k = c\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)$ [7], або її перетворень Фур'є [8].

Основні результати. Метою роботи є одержання асимптотичної формули типу (9) для інтеграла (1).

Теорема. *Якщо коефіцієнти ряду* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ *задовольняють умови (2)-(5), то для інтеграла* $I = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right|dt$ *рівномірно відносно* $m = 0,1,...$ *справедлива асимптотична рівність*

$$I = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|)\mathcal{I}_{m,k}(c) + 2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k} + O(T_m(A)),$$

де $\mathcal{I}_{m,k}(c) := \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-4\frac{|c_k|\cdot|c_{m-k}-c_{m+k}|}{(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|)^2}\sin^2 t}\,dt$, а $T_m(A) := \sum_{k=0}^{m}(k+1)|\Delta A_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m+1)|\Delta A_k|$.

Для доведення теореми наведемо деякі допоміжні твердження, які викликають інтерес і як самостійні.

Лема 1. *Нехай* $a,b \in C$. *Тоді справедлива рівність* $\int_{-\pi}^{\pi}\left|a+be^{it}\right|dt = 4(|a|+|b|)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|a|\cdot|b|}{(|a|+|b|)^2}\sin^2 t}\,dt.$

Лема 2. *Для інтеграла* $I_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\left|a+be^{it}\right|dt$ *справедливі оцінки* $I_0 \le 2\pi(|a|+|b|), I_0 \ge 4(|a|+|b|)$.

Нехай $m \ge 1, m \in N$, $\mu = [m/3]$ ($[m/3]$ – ціла частина числа $m/3$), $\nu = m - \mu$,

$$d_k = \begin{cases} c_k & k = 0,1,...,m-1, \\ 0, & k \ge m, \end{cases} \tag{10}$$

$$d'_k = \begin{cases} d_k, & k = 0,1,...,\mu, \\ \frac{\nu-k}{\nu-\mu}d_k, & k = \mu+1,...,\nu-1, \\ 0, & k \ge \nu. \end{cases} \tag{11}$$

$$d''_k = \begin{cases} d_{m-k} - d'_{m-k}, & k = 0,1,...,m, \\ 0, & k \ge m+1. \end{cases} \tag{12}$$

Таким чином $c_k = d_k = d'_k + d''_{m-k}$ при $k = 0,1,...,m-1$. Покладемо $q_{k,m} = \min\left(\left[\frac{k}{2}\right],\left[\frac{m-k}{2}\right]\right)$.

Лема 3. *Справедливі такі оцінки:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta d'_k| + \sum_{k=0}^{\infty}|\Delta d''_k| \le K\sum_{k=0}^{m-1}|\Delta c_k|,$$

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \cos kt\right|dt \le K\sum_{k=0}^{m}(k+1)|\Delta A_k| \quad ,(13)$$

де $\alpha_k = d'_k$, або $\alpha_k = d''_k$,

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_{m+k}\cos kt\right|dt \le K\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m+1)|\Delta A_k|. \tag{14}$$

Для встановлення нерівностей (13) і (14) потрібно повторити міркування, які використовуються при доведенні теореми 1 у роботі [5].

Доведення теореми проводиться методом, який використовувався при доведенні теореми 1 в [6]. Для послідовності коефіцієнтів c_k визначимо послідовності $\{d_k\},\{d'_k\}$ і $\{d''_k\}, k=\overline{0,\infty}$, за формулами (10)-(12). Тоді для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ будемо мати рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=0}^{m-1} (d'_k + d''_{m-k}) e^{ikt} + \sum_{k=m}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} d'_k \cos kt + i\sum_{k=1}^{\infty} d'_k \sin kt + e^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \cos kt - ie^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \sin kt +$$

$$+e^{imt}\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\cos kt + ie^{imt}\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\sin kt = \sum_{k=0}^{\infty}(d'_k + e^{imt}c_{k+m})\cos kt + e^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty}(d'_k + e^{imt}(c_{k+m)} - d''_k))\sin kt.$$

Користуючись одержаною С. О Теляковським [5] оцінкою (8) та нерівностями (13) і (14), знайдемо

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(d'_k + e^{imt}c_{k+m}\right)\cos kt + e^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \cos kt\right|dt \le KT_m(A).$$

Позначимо

$$B_{k,m} := B_{k,m}(t) = d'_k + e^{imt}\left(c_{m+k} - d''_k\right), k = 1,2,..., B_0 = 0. \qquad (15)$$

Очевидно, що

$$\left|\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right|dt - \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} B_{k,m}(t)\sin kt\right|dt\right| \le KT_m(A). \qquad (16)$$

Оскільки $\sin kt = \dfrac{\cos\frac{2k-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{\cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{k,m}(t)\sin kt = -\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\cos\frac{2k+1}{2}t. \qquad (17)$$

Тому для всіх t справедлива оцінка

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta B_{k,m}(t)| \le |c_m| + \sum_{k=0}^{\infty}\left(|\Delta d'_k| + |\Delta c_{k+m}| + |\Delta d''_k|\right) \le KT_m(A). \qquad (18)$$

Враховуючи (17) і обмеженість функції $1/2\sin\frac{t}{2} - 1/t$ та оцінку (18), знаходимо, що

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} B_{k,m}(t)\sin kt\right|dt - \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\frac{dt}{|t|}\right| \le KT_m(A).$$

Визначимо функції

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ \cos(2k+1)t, & \text{при } \dfrac{\pi}{2(2k+1)} \le t \le \pi - \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ 0, & \text{при } \pi - \dfrac{\pi}{2(2k+1)} \le t \le \pi, \end{cases} \quad \psi_k(t) = \begin{cases} \cos(2k+1)t, & \text{при } |t| \le \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ 0, & \text{при } |t| \ge \dfrac{\pi}{2(2k+1)}. \end{cases} \qquad (19)$$

Ясно, що $\forall t \in [\pi,\pi]$ $\cos\frac{2k+1}{2}t = \varphi_k\left(\frac{t}{2}\right) + \psi_k\left(\frac{t}{2}\right)$ та

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\frac{dt}{|t|} - \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_k(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}\right| \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\varphi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|} \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}. \qquad (20)$$

Використавши (15), матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|} \le 2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta d'_k\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t} + 2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta c_{k+m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t} + 2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta d''_{k+m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t}.$$

Лема 4. *Якщо функції $\varphi_k(t), k = 0,1,...$, визначені рівностями (19), а послідовність $\{a_k\}, a_k \in C, k = 0,1,2,...$, задовольняє умови типу Сідона – Теляковського (2)-(4), то справедлива оцінка* $\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t} \le KT_m(A)$.

Ця лема слідує з леми 3 у [6] і теореми 3 у[5].

Оскільки $c_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\forall k \in N$ $|c_k| = |\sum_{l=k}^{\infty}\Delta c_l| \le \sum_{l=k}^{\infty}|\Delta c_l| \le \sum_{l=k}^{\infty} A_l \le KT_k(A)$. З цієї оцінки і леми 4 одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|} \le KT_m(A). \qquad (21)$$

Тому з (20) та (21) маємо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}\right|\le KT_m(A). \tag{22}$$

З оцінок (16), (20) і (22) знайдемо, що $\left|\int_{\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{ikt}\right|dt-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}\right|\le KT_m(A).$

Покажемо тепер, що $\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|}{k}\mathcal{I}_{m,k}(c)-2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|c_m|}{k}\right|\le KT_m(A).$

Для цього визначимо функцію $\mu_k(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\dfrac{\pi}{k+1};\\ 0, & |t|>\dfrac{\pi}{k+1}.\end{cases}$, де $k=0,1,2,...$ Тоді $|\psi_k(\frac{t}{2})-\mu_k(t)|\le\frac{2k+1}{2}|t|$, при $|t|\le\frac{\pi}{k+1}$, а $\psi_k(\frac{t}{2})=\mu_k(t)$ при $|t|>\frac{\pi}{k+1}$.

Використавши (18), знайдемо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta B_{k,m}\right|\left|\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)-\mu_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}\le\sum_{k=0}^{\infty}A_k\frac{2k+1}{2}\int_{-\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k+1}}dt\le KT_m(A).$$

Для оцінки інтеграла $\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}$ розіб'ємо проміжок інтегрування на декілька частин. Для цього покладемо $m_1=[\sqrt{m}]+1$ і розглянемо спочатку інтеграл

$$\int_{\frac{\pi}{m_1}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}=\sum_{l=1}^{m_1-1}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}. \tag{23}$$

Для $t\in\left(\frac{\pi}{l+1},\frac{\pi}{l}\right)$, згідно з означенням функції $\mu_k(t)$, маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)=\sum_{k=0}^{l-1}\Delta B_{k,m}=-B_{l,m}(t), \tag{24}$$

тому

$$\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}=\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\,dt. \tag{25}$$

Крім того $\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\,dt-\frac{l}{\pi}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}|B_{l,m}(t)|\,dt\right|\le\max_t|B_{l,m}(t)|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\frac{1}{t}-\frac{l}{\pi}\right|dt\le\frac{1}{l^2}\max_t|B_{l,m}(t)|.$

Звідси, згідно з (18)

$$|B_{l,m}(t)|\le\sum_{k=l}^{\infty}|\Delta B_{k,m}|\le KT_m(A), \tag{26}$$

тому

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\,dt-\frac{l}{\pi}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}|B_{l,m}(t)|\,dt\right|\le K\frac{1}{l^2}T_m(A). \tag{27}$$

Функція $B_{l,m}(t)=d_l'+e^{imt}(c_{l+m}-d_l'')$ має період $2\pi/m$, а у відрізок $\left[\frac{\pi}{l+1},\frac{\pi}{l}\right]$ повністю вкладається $\left[\frac{\pi m}{l(l+1)2\pi}\right]$ відрізків довжиною $2\pi/m$.

Оскільки, згідно (26) $\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}|B_{l,m}(t)|\,dt-\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]\int_{0}^{\frac{2\pi}{m}}|B_{l,m}(t)|\,dt\right|\le\max_t|B_{l,m}(t)|\frac{2\pi}{m}\le\frac{K}{m}T_m(A)$, то на основі леми 1

$$\int_{0}^{\frac{2\pi}{m}}\left|B_{l,m}(t)\right|dt=\frac{1}{m}\int_{0}^{2\pi}\left|d_l'+e^{it}(c_{l+m}-d_l'')\right|dt=\frac{4}{m}\left(|d_l'|+|c_{l+m}-d_l''|\right)\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|d_l'|\cdot|c_{l+m}-d_l''|}{(|d_l'|+|c_{l+m}-d_l''|)^2}\sin^2 t}\,dt. \tag{28}$$

Позначивши $\overline{E}_l(m) := 2\left(|d_l'|+|c_{l+m}-d_l''|\right)\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|d_l'|\cdot|c_{l+m}-d_l''|}{(|d_l'|+|c_{l+m}-d_l''|)^2}\sin^2 t dt}$, отримаємо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} B_{l,m}(t)\,|\,dt-\frac{2}{m}\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]\overline{E}_l(m)\right|\le\frac{K}{m}T_m(A).$$

А звідси, враховуючи нерівність

$$\overline{E}_l(m)\le KT_m(A) \tag{29}$$

та $\left|\frac{2}{m}\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]-\frac{1}{l^2}\right|\le K\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l^3}\right)$, матимемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} |B_{l,m}(t)\,|\,dt-\frac{1}{l^2}\overline{E}_l(m)\right|\le K\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{l^3}\right)T_m(A)\,. \tag{30}$$

Тому з (25), (27) і (30) випливає нерівність

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi l}\overline{E}_l(m)\right|\le K\left(\frac{l}{m}+\frac{1}{l^2}\right)T_m(A). \tag{31}$$

Враховуючи співвідношення (23) і (31), знайдемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m_1}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m_1-1}\frac{1}{l}\overline{E}_l(m)\right|\le K\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{l}{m}+\frac{1}{l^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}A_k\le KT_m(A)\,. \tag{32}$$

Тепер розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}=\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}+\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}, \tag{33}$$

де j_0 – найбільше натуральне число, для якого

$$\frac{\pi}{m}(2j_0+1)\le\frac{\pi}{m_1},2j_0+1\le\sqrt{m}. \tag{34}$$

Візьмемо точку $\frac{\pi}{l}, l\in N$, яка належить проміжку $[\frac{\pi(2j-1)}{m},\frac{\pi(2j+1)}{m}]$. Тоді справедлива оцінка

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}-\frac{l}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(\frac{\pi}{l})\right|\frac{dt}{t}\right|\le$$

$$\le\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{k,m}\right|\left|\frac{1}{t}-\frac{l}{\pi}\right|dt+\frac{l}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{k,m}\right|\left|\mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right|dt. \tag{35}$$

Оскільки

$$|\frac{1}{t}-\frac{l}{\pi}|\le\frac{m}{\pi(2j-1)}-\frac{m}{\pi(2j-1)}=\frac{2m}{\pi(4j^2-1)},$$

то на основі оцінок (18) будемо мати

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta B_{k,m}\right|\left|\frac{1}{t}-\frac{l}{\pi}\right|dt\le\frac{2m}{\pi(4j^2-1)}\frac{2\pi}{m}KT_m(A)\le\frac{K}{j^2}T_m(A)\,. \tag{36}$$

Згідно з означенням функції $\mu_k(t)$, $\mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)=0$ для всіх k таких, що $\frac{\pi}{k+1}<\frac{\pi}{m}(2j-1)$, або $\frac{\pi}{k+1}>\frac{\pi}{m}(2j+1)$.

Якщо $\frac{\pi}{m}(2j-1)<\frac{\pi}{k+1}<\frac{\pi}{m}(2j+1)$, то $\left|\mu_k(t)-\mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right|\le 1$.

Очевидно, що для таких k маємо

$$\frac{m}{2j+1} < k+1 < \frac{m}{2j-1}. \tag{37}$$

Суму по всіх k, що задовольняють нерівність (37), позначатимемо через $\sum_k^j$. Тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta B_{k,m}\right| \left|\mu_k(t) - \mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right| dt \le \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \sum_k^j \left|\Delta B_{k,m}\right| dt = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum_k^j \left|\Delta B_{k,m}(t)\right| dt. \tag{38}$$

Згідно з означенням функції $\mu_k(t)$ і леми 1 дістанемо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right| dt = \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|B_{l,m}(t)\right| dt = \frac{2}{m} \bar{E}_l(m). \tag{39}$$

На основі співвідношень (35)-(39) одержуємо, що для $\forall l \in \mathbb{N}$ таких, що

$$\frac{\pi}{m}(2j-1) \le \frac{\pi}{l} < \frac{\pi}{m}(2j+1), \tag{40}$$

справедлива оцінка

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{2}{\pi}\frac{l}{m} \bar{E}_l(m) \right| \le \frac{K}{j^2} T_m(A) + \frac{l}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum_k^j |\Delta B_{k,m}|\, dt. \tag{41}$$

На відрізку $[\frac{\pi}{m}(2j-1), \frac{\pi}{m}(2j+1)]$ містяться $\tau = [\frac{m}{2j-1}] - [\frac{m}{2j-1}]$ точок виду $\frac{\pi}{l}$. Додамо нерівності (41) для всіх l, що задовольняють умову (40), і поділимо на число доданків. Тоді одержимо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{2}{\pi m \tau} \sum_l l \bar{E}_l(m) \right| \le \frac{K}{j^2} T_m(A) + m \int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum_k^j |\Delta B_{k,m}|\, dt, \tag{42}$$

де $\sum_l$ означає підсумовування по тих l, для яких виконується нерівність (40).

Для $j < j_0$, де $2j_0 + 1 \le \sqrt{m}$, справедлива нерівність $\frac{m}{2j-1} - \frac{m}{2j+1} = \frac{2m}{4j^2-1} \ge \frac{2m}{(2j_0+)^2} \ge 2$, то

$$\left|\frac{1}{\tau} - \frac{4j^2-1}{2m}\right| \le \frac{1}{\frac{m}{2j-1} - 1 - \frac{m}{2j+1}} - \frac{1}{\frac{2m}{4j^2-1}} \le \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{2m}{4j^2-1}\frac{2m}{4j^2-1}} \le 2\left(\frac{4j^2-1}{2m}\right)^2 \le K\frac{j^4}{m^2}. \tag{43}$$

Для всіх l, що задовольняють співвідношення (40) має місце оцінка

$$\left|\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{l^2}\right| \le \left|\frac{\sqrt{4j^2-1}}{m} - \frac{2j-1}{m}\right| \cdot \left|\frac{\sqrt{4j^2-1}}{m} + \frac{2j+1}{m}\right| \le \frac{4j}{m^2}. \tag{44}$$

Із (43) і (44), а також співвідношення $\frac{m}{2j+1} \le l \le \frac{m}{2j-1}$, матимемо

$$\left|\frac{l}{m\tau} - \frac{1}{2l}\right| \le \frac{l}{m}\left|\frac{1}{\tau} - \frac{4j^2-1}{2m}\right| + \frac{l}{2}\left(\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{ml}\right) \le K\frac{l}{m}\frac{j^4}{m^2} + \frac{l}{2}\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{2l} \le K\frac{j^3}{m^2} + \frac{l}{2}\left|\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{l^2}\right| \le K\left(\frac{j^3}{m^2} + \frac{1}{m}\right).$$

Оскільки $\tau \le K\frac{m}{j^2}$, то

$$\left|\frac{2}{\pi m\tau}\sum_l l\bar{E}_l(m) - \frac{1}{\pi}\sum_l \frac{1}{l}\bar{E}_l(m)\right| \le K\left(\frac{j^3}{m^2} + \frac{1}{m}\right)\tau \max_l \bar{E}_l(m) \le K\left(\frac{j^3}{m^2} + \frac{1}{j^2}\right)\max_l \bar{E}_l(m). \tag{45}$$

Із (42), враховуючи (45) і (29), знайдемо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}(t) \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=[\frac{m}{2j+1}]+1}^{[\frac{m}{2j-1}]} \frac{1}{l}\bar{E}_l(m) \right| \le K\left(\frac{j}{m} + \frac{1}{j^2}\right) T_m(A) + m \int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum_k^j |\Delta B_k|\, dt. \tag{46}$$

Для інтеграла $\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t}$ із (33), унаслідок (18) справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_k \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{m}{\pi(2j_0+1)} \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta B_k(t)| \frac{dt}{t} \le \frac{Km}{(2j_0+1)m} T_m(A) . \tag{47}$$

Із співвідношень (46), (47) і (33) знайдемо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \sum_{l=[\frac{m}{2j_0+1}]+1}^{m} \frac{1}{l} \overline{E}_l(m) \right| \le K \sum_{j=1}^{j_0} \Big(\frac{j}{m} + \frac{1}{j^2}\Big) T_m(A) + m \int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} \sum_{j=0}^{j_0} \sum_k{}_j \, |\Delta B_{k,m}| \, dt. \tag{48}$$

Оскільки $[\frac{m}{2j_0+1}] - m_1 \le K$ (унаслідок вибору чисел j_0 і m_1), то користуючись оцінкою (47), знайдемо, що $\sum_{l=m_1}^{[\frac{m}{2j_0+1}]} \frac{1}{l} \overline{E}_l(m) \le KT_m(A)$. На основі вибору j_0 (див. (34)) справедлива оцінка $\sum_{j=1}^{j_0} \Big(\frac{j}{m} + \frac{1}{j^2}\Big) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{j_0} j + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j^2} \le K$.

Якщо в подвійній сумі $\sum_{j=1}^{j_0} \sum_k{}_j$ поміняємо порядок підсумовування, то для кожного k в сумі по j буде тільки один доданок. Тому $\sum_{j=1}^{j_0} \sum_k{}_j \, |\Delta B_{k,m}(t)| \le \sum_{k=0}^{m} |\Delta B_{k,m}(t)|$, а внаслідок (37) буде $m \int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum_{j=1}^{j_0} \sum_k{}_j \, |\Delta B_{k,m}(t)| \, dt \le KT_m(A)$, тому із сказаного вище і нерівності (48) слідує нерівність

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=m_1}^{m} \frac{1}{l} \overline{E}_l(m) \right| \le KT_m(A). \tag{49}$$

А з (32) і (49) матимемо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} \overline{E}_l(m) \right| \le KT_m(A). \tag{50}$$

Згідно з означенням d_l, d_l', d_l'' (див. (10)-(12)) і співвідношенням (28) маємо для всіх $l = 1, 2, ..., [m/3]$,

$$\overline{E}_l(m) = 2\big(|c_l| + |c_{l+m} - c_{m-l}|\big) \cdot \mathcal{I}_{m,l}(c) =: E_l(m). \tag{51}$$

Крім того, з оцінки (29) і аналогічної їй оцінки $E_l(m) \le KT_m(A)$ знайдемо, що

$$\sum_{l=\left[\frac{m}{3}\right]+1}^{m} \frac{1}{l} \overline{E}_l(m) \le KT_m(A), \quad \sum_{l=\left[\frac{m}{3}\right]+1}^{m} \frac{1}{l} E_l(m) \le KT_m(A) \tag{52}$$

На основі співвідношень (50)-(52) одержуємо нерівність $\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l} E_l(m) \right| \le KT_m(A).$

Для інтеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t}$ внаслідок (24) і (25) матимемо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} = \sum_{l=m}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \frac{1}{l} |B_{l,m}(t)| \, dt, \tag{53}$$

але для $l \ge m$ (див. (26)) $B_{l,m}(t) = c_{m+l} e^{imt}$, тому $\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \frac{1}{t} |B_{l,m}(t)| \, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \frac{|c_{m+l}|}{t} dt = |c_{m+l}| \ln \frac{l+1}{l}.$

Оскільки при $l \geq m$

$$\ln\left(1+\frac{1}{l}\right)=\frac{1}{l}+O\left(\frac{1}{l^2}\right)=\frac{1}{m+l}+O\left(\frac{m}{l^2}\right) \tag{54}$$

рівномірно відносно m, то з (53) і (54) знайдемо

$$\left|\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|-\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}E_l(m)-\sum_{l=2m+1}^{\infty}\frac{|c_l|}{l}\right|\leq KT_m(A).$$

Для від'ємних t справедлива аналогічна нерівність. Теорему повністю доведено.

Висновки. У роботі отримано асимптотичну формулу для ряду Фур'є, у якого коефіцієнти з відємними індексами рівні 0, що є аналогом відповідних результатів С. О. Теляковського для тригонометричних рядів із дійсними коефіцієнтами [5,6].

Список використаних джерел

1. *Гаєвський М. В.*Оцінки інтеграла від модуля многочлена на одиничному колі / М. В. Гаєвський, П. В. Задерей // Всеукраїнська літня науково-методична мат. шк. "Математичний аналіз та теорія ймовірностей" 4–7 липня 2013 р., с. Плюти, Україна: Тези доповідей. – К. : НТУУ "КПІ", 2013.
2. *Голузин Г. М.* Некоторые неравенства для аналитических функций // Г. М. Голузин // Изв. АН Казахской ССР. Сер. Матем. и мех. – 1949. – № 3. – С. 101–105.
3. *Ефимов А. В.* Оценка интеграла от модуля многочлена единичной окружности / А. В. Ефимов // Успехи мат. наук. – 1980.– Т. 15, № 4. – С. 215–218.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. Т. 1. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965.
5. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов / С. А. Теляковский // Матем. Заметки. – 1973. – Т14. – № 3. – С. 317–328.
6. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации / С. А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – Т. 109. – С. 65–97.
7. *Тригуб Р. М.* Об интегральных нормах полиномов / Р. М. Тригуб // Мат. сб. – 1976. – Т. 101, № 143. – С. 315–333.
8. Тригуб Р. М. Мультипликаторы Фурье и *К*-функционалы пространств гладких функций / Р. М. Тригуб // Український математичний вісник. – 2005. – Т. 2б, № 2. – С. 236–280.
9. *Fejer L.* Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie / L. Fejer // Math. Ann. – 1926. – Vol. 97. – P. 104–123.
10. *Garrett J. W.* L_1 -convergence of Fourier series with bounded variation /J. W. Garrett, C. S Rees, C. V. Stanojevic // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 80. – P. 423–430.
11. *Leindler ..* On the equivalence of classes of numerical sequences / L. Leindler // Analysis Mathematica. – 2000. – Vol. 26. – P. 227–234.

Надійшла до редколегії 29.03.17

П. Задерей, д-р физ.-мат. наук
Киевский национальный университет технологий и дизайна, Киев, Украина,
М. Гаевский, канд. физ.-мат. наук
Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина,
М. Веремий, асп.
Киевский национальный университет технологий и дизайна, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ОТ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ РЯДОМ ФУРЬЕ

Получена асимптотическая формула для интеграла модуля функции, которая задана рядом Фурье с комплексными коэффициентами. Последовательность коэффициентов удовлетворяет условию типа Сидона – Теляковского.

P. Zaderei, Full Doctor
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine,
M. Gaevskij, PhD
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University, Kropivnitskyi, Ukraine,
M. Veremii, PhD graduate
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTICS OF THE INTEGRAL OF A MODUL OF FUNCTION GIVEN BY A FOURIER SERIES

We obtain an asymptotic formula for the integral of the function module specified by Fourier series with complex coefficients. The coefficients of the series satisfies conditions of the type Sidon – Telyakovskii.

УДК 517.5

Т. Петрова, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ПОТОЧКОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ МОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ $r > 2$

Досліджується питання наближення монотонних функцій із простору Соболєва алгебраїчними поліномами. Побудовано контрприклад, який показує, що для монотонних функцій із простору Соболєва оцінка (1) є хибною.

Спочатку введемо основні позначення. Нехай $W^r[0,1]$ клас таких функцій f, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^{r-1}f\right|\leq 1$ майже скрізь, де $D_{0+}^{r-1}f$ – лівостороння дробова похідна [5]. Позначатимемо через Π_n множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^1 – множину неспадних на $[0,1]$ функцій.

У [4] доведено, що для апроксимації без обмежень для всіх $r\in\mathbb{N}$, для кожної функції $f\in W^r[0,1]$ і для кожного $n\in\mathbb{N}$, знайдеться такий поліном $p_n\in\Pi_n$, що виконується оцінка

$$\left|f(x)-p_n(x)\right|\leq c\cdot\frac{1}{n^2}(\sqrt{x(1-x)})^r, x\in[0,1]. \tag{1}$$