Висновки. Таким чином встановлено таке твердження:

Теорема. *Нехай* $a(x), b(x), c(x) \in C^{\infty}[-l;l]$ *та виконуються умови* $a(x) = x \cdot \tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) > 0, b(x) \neq 0,\ c(x) \neq 0.$ *Тоді на відрізку* $[-l,l]$ *можна побудувати загальний розвязок сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді асимптотичного ряду (5), коефіцієнти якого є досить гладкі функції на відрізку* $[-l,l]$.

Список використаних джерел

1. *Бобочко В. М.* Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту / В. М. Бобочко, М. О. Перестюк. – К. : Наук. думка, 2002. – 310 с.
2. *Бобочко В.Н.* Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота В. Н. Бобочко // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 5(528). – С. 8–18.
3. Бобочко В. Н. Внутренняя точка поворота в теории ингулярных возмущений / В. Н. Бобочко // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
4. Болилый В. А. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с дифференциальной точкой поворота II рода / В. А. Болилый, И. А. Зеленская // Междунар. науч. журн. «Спектральные и эволюционные задачи». – 2013. – Т. 23. – С. 21–31.
5. *Болілий В. О.* Внутрішня точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку / В. О. Болілий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 44–50.
6. *Зеленская И. А.* Система сингулярно возмущенных уравнений с дифференциальной точкой поворота I рода / И. А. Зеленская // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 3. – С. 63–74.
7. *Langer R. E.* On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics / R. E. Langer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 84. – P. 144–191.
8. *Lin C.C.* On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order / C. C. Lin, A. L. Rabenstein // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – Vol. 94. – P., 24–57.
9. *Nishimoto T.* On the Orr-Sommerfeld type equations, I; W.K.B. Approximation / T. Nishimoto // KODAI. Math. Sem. Rep. – 1972. – Vol. 24 – P. 281–307.
10. *Wasow W.* Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point / W. Wasow // Annals of mathematics. – 1958. – Vol. 58, № 2. – 222–252.

Надійшла до редколегії 02.12.16

В. Болилый, канд. физ.-мат. наук, доц., И. Зеленская, асп.
Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина

ВНУТРЕННЯЯ ТОЧКА ПОВОРОТА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной и точкой поворота, получены условия для построения равномерной асимптотики решения. Асимптотика построена методом существенно-особых функций, который позволяет в окрестности точки поворота применить модельный оператор Эйри – Лангера. Доказано существование решения системы при условии, что точка поворота расположена внутри рассматриваемого отрезка.

V. Boliliy, PhD, I. Zelenska, PhD graduate
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko state pedagogical university, Kropivnitskyi, Ukraine

INTERIOR TURNING POINT FOR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THE ORR – SOMMERFELD TYPE

For system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the higher derivative and with turning point the conditions are obtained for the construction of a uniform asymptotic of solution. Asymptotic forms of solutions are constructed using the method of essential singular functions, which allows to apply the Airy – Langer model operator. It has been proven the existence of solutions of the system when turning point is in the middle of the interval $[-l,l]$.

УДК 517.95:519.63

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
Л. Вакал, канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова, Київ
E-mail*: jvakal@gmail.com*

РОЗВЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Розглянуто математичну модель руху рідини для неоднорідних середовищ із тонкими слабко проникними включеннями. Запропоновано ефективний числовий алгоритм розвязування сформульованої крайової задачі для еліптичного рівняння зі спеціальними умовами спряження типу неідеального контакту. Здійснено числовий експеримент із розвязання задачі фільтрації рідини в основі гідротехнічної споруди. Проаналізовано отримані результати та зроблено висновки щодо застосування запропонованого підходу для визначення фільтраційної стійкості ґрунтів.

Вступ. Крайові задачі математичної фізики для рівнянь зі спеціальними умовами спряження типу неідеального контакту можуть виникати при моделюванні різноманітних фізичних процесів в областях, що містять тонкі (порівняно з геометричними розмірами області) слабко проникні прошарки. Так, наприклад, при фільтраційних розрахунках гідротехнічних споруд слабко проникними включеннями можна вважати тонкі шпунти та протифільтраційні завіси [1, 6, 9]. Специфіка подібних задач вимагає застосування спеціального підходу для їх розвязування. Доцільність такого підходу обумовлена кількома обставинами. По-перше, часто неможливо точно виміряти окремі фізичні характеристики прошарку і доводиться використовувати його інтегральні, або усереднені, характеристики. По-друге, при числовому розвязанні таких задач у прошарку необхідно розташувати певну кількість вузлів сітки, що вимагає її невиправданого подрібнення в основній частині області розвязку і приводить до ускладнення обчислювальної роботи, зниження ефективності застосованих методів. З урахуванням цих обставин для розвязування крайових задач в областях з указаними особливостями пропонується підхід [2–5], згідно з яким при розробці математичної моделі прошарки виключаються з розвязку, а створювані ними ефекти враховуються формулюванням спеціальних умов спряження типу неідеального контакту на внутрішніх межах поділу середовищ.

Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу, що описує фільтрацію при напірних рухах рідини в основі гідротехнічної споруди (ГС). Дослідимо усталену напірну фільтрацію рідини під ГС, що протікає під впливом різниці напорів у верхньому та нижньому бєфах. Прикладом такого руху є обтікання незаглибленого плоского флютбету зі шпунтом у ґрунті скінченної глибини, що лежить на непроникній основі. Флютбет поділяється шпунтом малої товщини δ на відрізки довжиною $l_ф^1$ і $l_ф^2$. Глибину проникного шару вважаємо рівною $M\cdot$ Розглянемо переріз ґрунту під ГС площиною, перпендикулярною поверхні землі (рис. 1).

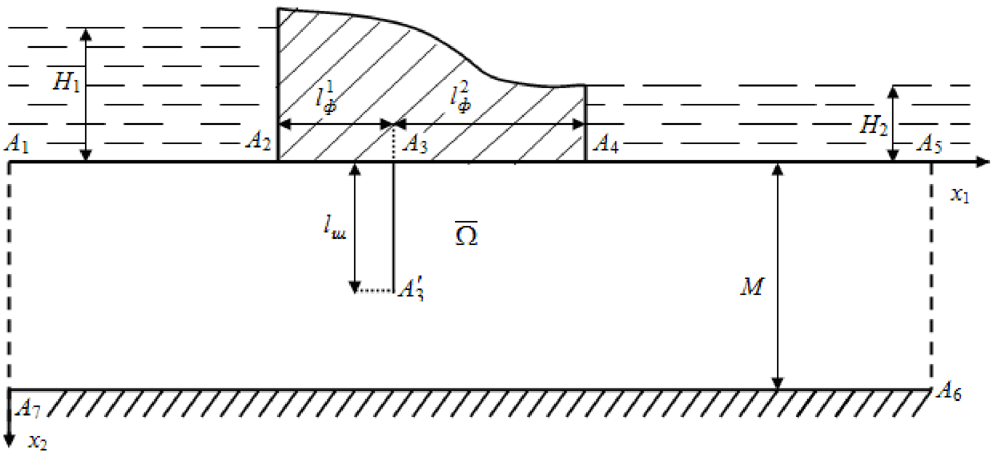

Рис. 1. Незаглиблений плоский флютбет зі шпунтом

Областю фільтрації $\overline{\Omega}$ є прямокутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Заміна нескінченної області на скінченну правомірна, якщо лінії току A_1A_7 і A_5A_6 вважати віддаленими від центра флютбету на три і більше його ширини. На рис. 1 лінія A_6A_7 моделює водонепроникний шар, $A_2A_3A_4$ – водонепроникну основу греблі, A_1A_2, A_4A_5 – еквіпотенціальні лінії із заданими на них сталими напорами H_1 і H_2, A_3A_3' – тонкий шпунт завдовжки $l_ш$ із коефіцієнтом фільтрації k_1. Коефіцієнт фільтрації ґрунту приймається рівним k_2. Таким чином, для дослідження процесів усталеної напірної фільтрації в основі ГС необхідно знайти розвязок диференціального рівняння

$$\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\gamma}\right)=0 \tag{1}$$

в області Ω із граничними умовами

$$u(x)\big|_{A_1A_2}=H_1,\quad u(x)\big|_{A_4A_5}=H_2, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_1A_7}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_5A_6}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{A_2A_4}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{A_6A_7} \tag{3}$$

і умовами спряження у вигляді неперервності напорів і потоків вологи на лініях контакту шпунта з ґрунтом.

Згідно із запропонованим у роботі підходом, ураховуючи незначну товщину шпунта порівняно з розмірами області фільтрації, а також малу проникність матеріалу, з якого він будується ($k_1 << k_2$), виключимо шпунт із розгляду, а його вплив на фільтрацію рідини в основі ГС врахуємо шляхом задання умов неідеального контакту на лінії A_3A_3', що моделює шпунт, тобто

$$k_2\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_3A_3'-0}=\alpha[u]\big|_{A_3A'},\qquad \left.\left[k_2\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\right|_{A_3A_3'}=0, \tag{4)}$$

де $\alpha=k_1/\delta$ назвемо коефіцієнтом вологопередачі через шпунт.

Зазначена модель дозволяє вивчити вплив на фільтрацію проникності шпунтових стінок. Очевидно, що напори і тиски фільтраційного потоку на споруду та швидкості фільтраційних вод при їхньому виході у нижній бєф будуть відрізнятися від відповідних значень напорів, тисків і швидкостей, отриманих за допомогою числових і чисельно-аналітичних методів, що використовують стандартні підходи у припущенні непроникності шпунтів для областей із вирізами і розрізами [1, 6, 9]. Ця обставина може позначитися на стійкості споруд і має враховуватись при проектуванні ГС і розробці заходів щодо зниження фільтраційних потоків.

Числове розвязання задачі. Нехай основа греблі $A_2A_3A_4$ моделюється лінією $x_2=0,\ \ 0<l_6<x_1<l_7<l_1$; водопроникні ділянки межі A_1A_2 і A_4A_5 – лініями $x_2=0,\ 0\le x_1\le l_6$ і $x_2=0,\ l_7\le x_1\le l_1$ відповідно; шпунт A_3A_3' – лінією $x_1=l_5\in(l_6,l_7)$, $0\le x_2\le l_8<l_2$; лінії току A_1A_7 і A_5A_6 – лініями $x_1=0,\ 0<x_2\le l_2$ і $x_1=l_1,\ 0<x_2\le l_2$ відповідно; водонепроникний шар A_6A_7 – лінією $x_2=l_2,\ 0\le x_1\le l_1$.

Для розвязання крайової задачі (1)–(4) використано метод скінченних різниць. За допомогою інтегро-інтерполяційного методу [7] на сітці $\overline{\omega}_{h_1h_2}$ із кроками h_1 і h_2 у напрямках x_1 і x_2 відповідно побудовано різницеву схему для рівняння (1):

$$\sum_{\gamma=1}^{2}\left(a_\gamma y_{x_\gamma}\right)_{x_\gamma}=0\ . \tag{5}$$

Тут і надалі використовуються позначення, прийняті в теорії різницевих схем [7], y, a – сіткові аналоги функцій u і k відповідно.

Похибка апроксимації схеми (5) дорівнює $O\left(h_1^2+h_2^2\right)$. Крайові умови (2)–(3) й умови спряження (4) апроксимуються із другим порядком по просторових змінних аналогічно [7; 9] і записуються у вигляді:

$$\frac{2}{h_1}a_1^+y_{x_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}=0\ ,\ \ x_1=0,\ \ 0<x_2<l_2\ ; \tag{6}$$

$$-\frac{2}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}=0,\ \ x_1=l_1,\ \ 0<x_2<l_2\ ; \tag{7}$$

$$\frac{2}{h_2}a_2^+y_{x_2}+\left(a_1y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1}=0,\ \ x_2=0,\ \ l_6<x_1<l_7,\ \ x_1\ne l_5\ ; \tag{8}$$

$$-\frac{2}{h_2}a_2y_{\bar{x}_2}+\left(a_1y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1}=0,\ \ x_2=l_2,\ \ 0<x_1<l_1\ ; \tag{9}$$

$$-\frac{2}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}+\frac{2}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y^+-y\right)=0,\ \ x_1=l_5-0,\ \ 0<x_2<l_8\ ; \tag{10}$$

$$\frac{2}{h_1}a_1^+y_{x_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}-\frac{2}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y-y^-\right)=0,\ \ x_1=l_5+0,\ \ 0<x_2<l_8\ ; \tag{11}$$

$$\frac{1}{h_1}a_1^+y_{x_1}-\frac{1}{h_2}a_2y_{\bar{x}_2}=0,\ \ x_1=0,\ \ x_2=l_2\ ; \tag{12}$$

$$\frac{1}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\frac{1}{h_2}a_2y_{\bar{x}_2}=0,\ \ x_1=l_1,\ x_2=l_2\ ; \tag{13}$$

$$-\frac{1}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\frac{1}{h_2}a_2^+y_{x_2}+\frac{1}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y^+-y\right)=0,\ \ x_2=0,\ \ x_1=l_5-0\ ; \tag{14}$$

$$\frac{1}{h_1}a_1^+y_{x_1}+\frac{1}{h_2}a_2^+y_{x_2}-\frac{1}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y-y^-\right)=0,\ \ x_2=0,\ \ x_1=l_5+0\ ; \tag{15}$$

$$y=H_1,\ \ x_2=0,\ \ 0\le x_1\le l_6\ ; \tag{16}$$

$$y=H_2,\ x_2=0,\ \ l_7\le x_1\le l_1\ . \tag{17}$$

Таким чином, різницева схема (5)–(17) апроксимує вихідну диференціальну задачу (1)–(4).

Запишемо отриману систему різницевих рівнянь у вигляді операторного рівняння

$$Ay=G, \tag{18}$$

де y містить розвязок різницевої задачі (6)–(17). Матриця A має блочну структуру. Подамо її у вигляді суми діагональної, строго нижньої трикутної і строго верхньої трикутної матриць

$$A=D-L-U.$$

Тоді ітераційний метод верхньої релаксації для рівняння (18) запишеться таким способом [8]:

$$(D-\omega L)\frac{y^{s+1}-y^s}{\omega}+Ay^s=G\ . \tag{19}$$

Тут ω – релаксаційний параметр, y^0 – деяке початкове наближення до розвязку задачі.

Обчислювальні експерименти. Запропонований підхід використано для розвязання задачі обтікання плоского незаглибленого флютбету завдовжки $l_ф$ із тонким шпунтом (рис. 1) із застосуванням системи комп'ютерної математики MATLAB 7.6.0. Розвязок задачі для шпунта, симетрично розташованого вздовж флютбету ($l_ф^1=l_ф^2=l_ф/2$), при $M=l_ф$, $H_2=0$ отримано в [6] за допомогою чисельно-аналітичного методу для області з розрізом (шпунт вважається непроникним) і подано на рис. 2 у вигляді розподілу напору вздовж флютбету для різних значень відношення $l_ш/l_ф$ (для наочності початок системи координат розміщено в точці A_3).

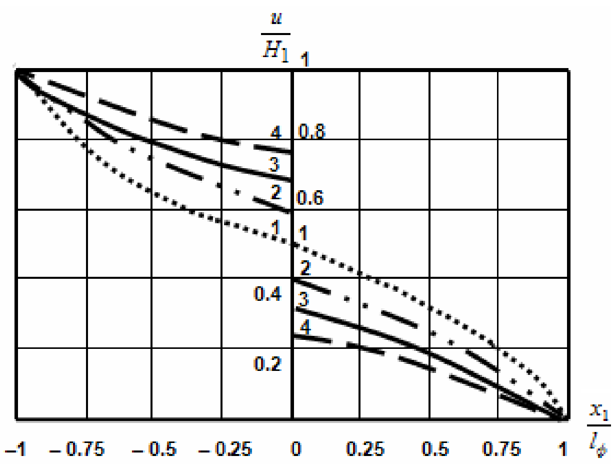

Рис. 2. Розподіл напору вздовж флютбету (лінія 1 – $l_ш/l_ф = 0$, **лінія 2 –** $l_ш/l_ф = 0.3$, **лінія 3 –** $l_ш/l_ф = 0.5$, **лінія 4 –** $l_ш/l_ф = 0.7$ **)**

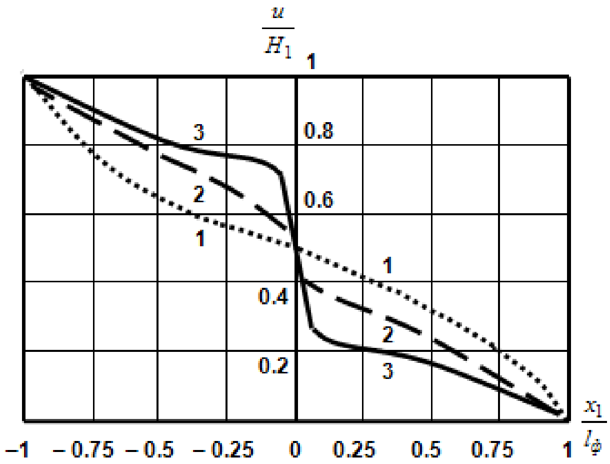

Рис. 3. Розподіл напору вздовж флютбету при $l_ш/l_ф = 0.7$ **(лінія 1 –** $k_2/k_1 = 1$, **лінія 2 –** $k_2/k_1 = 200$, **лінія 3 –** $k_2/k_1 = 20000$**)**

За допомогою моделі, що використовує спеціальні умови спряження (4), знайдено числовий розвязок цієї задачі. При числових розрахунках величини k_1, k_2, δ приймались рівними 0.0002 м/добу, 0.2 м/добу і 0.2 м відповідно, тобто α в умовах (4) дорівнювало 0.001 1/добу. Отримана похибка в результатах не перевищує 2–3 %. Проведені дослідження показали, що тиск перед флютбетом підвищується, а за ним сильно знижується. Завдяки врахуванню проникності шпунта отримано напори перед флютбетом дещо менші, а за ним, при виході фільтраційних вод у нижній бєф, дещо більші, ніж відповідні значення напорів, обчислені в [6] для непроникного шпунта. На рис. 3 наведено розподіл напору вздовж флютбету при $l_ш/l_ф = 0.7$ і різних співвідношеннях між коефіцієнтами фільтрації ґрунту k_2 і шпунта k_1.

Випадок $k_2/k_1 = 1$ відповідає обтіканню плоского флютбету за відсутності в його основі будь-яких включень (лінія 1), а $k_2/k_1 = 20000$– за наявності практично водонепроникного симетрично розташованого шпунта (лінія 3). При $1 < k_2/k_1 < 20000$ лінії, що зображують розподіл напорів, розташовуються між лініями 1 і 3. Так, наприклад, лінія 2 відповідає випадку $k_2/k_1 = 200$.

Висновки. Результати досліджень свідчать, що при значеннях коефіцієнтів фільтрації шпунта k_1 менших деякої малої величини $\bar{k}$ його проникність мало впливає на характер руху рідини в основі ГС, і шпунт можна вважати водонепроникним. Урахування цієї обставини дозволяє при проектуванні ГС використовувати для виготовлення шпунта матеріали з коефіцієнтом фільтрації $k_1 \approx \bar{k}$. Якщо ж $k_1 > \bar{k}$, то вплив проникності шпунта на фільтрацію під спорудою стає помітним, що може відбитися на стійкості ГС і має враховуватись при проектуванні та будівництві ГС.

Таким чином, проведені дослідження показали, що при фільтраційних розрахунках ГС велике значення має правильне відображення в розрахункових схемах гідрогеологічних умов основи споруди, а також умов роботи протифільтраційних пристроїв (проникність шпунтів, екранів, завіс, бетону та ін.).

Список використаних джерел

1. *Аравин В. И.* Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – Л. : Госстройиздат, 1955. – 291 с.
2. *Вакал Е. С.* Об одном подходе к численному решению задач массопереноса в неоднородно-слоистых средах. – Киев, 1985. – 16 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 20.04.1985, № 781–85.
3. *Дейнека В. С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1998. – 615 с.
4. *Демченко В. Ф.* Разностная схема сквозного счета для стационарного уравнения теплопроводности в многослойных средах с неидеальным тепловым контактом / В. Ф. Демченко, Л. И. Демченко, А. Т. Зельниченко // Вычислительная и прикладная математика. – 1980. – Вып. 40. – С. 122–130.
5. *Демченко Л. И.* Численное решение нелинейного уравнения теплопроводности в средах с тонкими слабо проницаемыми включениями / Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий, Е. С. Вакал // Прикладные задачи математической физики. – Рига : ЛУ, 1990. – Вып. 1. – С. 140–150.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина . – М. : Наука, 1977. – 664 с.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.
8. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978.– 592 с.
9. *Фильчаков П. Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями / П. Ф. Фильчаков. Т. 2. – К. : Изд-во АН УССР, 1960. – 256 с.

Надійшла до редколегії 30.05.17

Е. Вакал, канд. физ.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
Л. Вакал, канд. техн. наук
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова, Киев, Украина

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрена математическая модель движения жидкости для неоднородных сред с тонкими слабо проницаемыми включениями. Предложен эффективный численный алгоритм решения сформулированной краевой задачи для эллиптического уравнения со специальными условиями сопряжения типа неидеального контакта. Проведен численный эксперимент по решению задачи фильтрации в основании гидротехнического сооружения. Проанализированы полученные результаты и сделаны выводы по использованию предложенного подхода для определения фильтрационной устойчивости грунтов.

E. Vakal, PhD, Yu. Vakal , PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
L . Vakal, PhD
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF ELLIPTIC TYPE WITH SPECIAL COUPLING CONDITIONS

A mathematical model of fluid flow for heterogeneous environments with thin weakly permeable inclusions is considered. An efficient numerical algorithm for solving the formulated boundary value problem for elliptic equation with special coupling conditions such as imperfect contact is proposed. A numeric experiment of solving the problem of filtration of fluid on the base of a hydraulic structure is done. Obtained results are analyzed and the conclusions on the application of the proposed approach for determining the filtration resistance of soils are made.

УДК 517.9

В. С. Вовк, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *vovkvitali@gmail.com*

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА: ТОЧНІ Й АСИМПТОТИЧНІ ОДНОСОЛІТОННІ РОЗВЯЗКИ ТА ЇХ ЧИСЕЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ

Отримано чисельні розвязки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами при різних значенням малого параметра. Із використанням формули для солітонного розвязку цього рівняння, проведено порівняння формул для точних і асимптотичних солітонноподібних розвязків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами та здійснено порівняльний аналіз аналітичного і чисельного описів розвязків рівняння Кортевега – де Фріза при різних значеннях малого параметра.

Вступ. Історія дослідження явищ, що повязані із солітонними розвязками рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ), розпочалася у 1834 р., ще задовго до відкриття цього рівняння. Саме тоді шотландський інженер Рассел Джон Скотт зафіксував нове явище, яке ним було названо хвилею трансляції, яку зараз зазвичай називають усамітненою або відокремленою хвилею [5].

Повідомлення про відкриття нового виду хвиль привернуло увагу багатьох учених і мало великий резонанс серед фахівців із гідромеханіки. Цим явищем зацікавилися такі відомі вчені: Стокс Дж., Буссінеск Дж., Релей Л. та багато інших [3], які намагалися знайти диференціальне рівняння для аналітичного опису відокремленої хвилі. Із цією метою для математичного опису таких хвиль Релей і Буссінеск запропонували використовувати квадрат гіперболічного синуса.

Як математичну модель явища, яке спостерігав Рассел, нідерландські дослідники Кортевег Д. і де Фріз Дж. у 1895 р. запропонували рівняння

$$u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \tag{1}$$

що описує рух рідини в каналі невеликої глибини і яке зараз названо їхніми іменами.

Розвязок рівняння КдФ у вигляді відокремленої хвилі $u(x,t) = f(x - at)$ записується за допомогою формули

$$u(x,t) = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{a(x - a^2 t)}{2} \right], \tag{2}$$

де a – довільна стала.

Наприкінці 60-х рр. минулого століття рівняння Кортевега – де Фріза привернуло увагу багатьох дослідників. Причиною стало відкриття низки цікавих властивостей частинних розвязків рівняння КдФ: Крускал М. і Забускі Н. чисельно показали, що відокремленні хвилі, які описуються рівнянням КдФ, при взаємодії між собою не втрачають своєї форми, тобто їх взаємодія подібна до взаємодії частинок. Такі хвилі й відповідно розвязки рівняння КдФ ними названо солітонами [8].

Із того часу дослідженню рівняння КдФ і його розвязків присвячено багато праць. Зокрема, для знаходження його точних розвязків застосовувалися різні методи, серед яких варто окремо згадати метод оберненої задачі розсіяння, за допомогою якого знайдено точні розвязки багатьох рівнянь із частинними похідними математичної і теоретичної фізики [4].

Різноманітні числові та асимптотичні методи також використовуються для пошуку наближених розвязків цього рівняння. Вибір методу розвязку залишається за дослідником. Зазвичай надається перевага якомусь одному способу, при цьому рідко проводиться порівняльний аналіз розвязків, що отримані за допомогою різних методів. У цій статті здійснено порівняльний аналіз точного і (відповідного) асимптотичного односолітонного розвязку сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{3}$$

де ε – малий параметр.

Основна частина. У подальшому використовуються такі означення [2, 6].

Означення 1. Простором $G_1 = G_1(R \times [0;T] \times R)$ називається лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau), (x,t,\tau) \in R \times [0:T] \times R,$ що для довільних невідємних цілих n,p,q,r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0;T]$ виконуються умови:

1) справджується співвідношення $\lim\limits_{\tau \to +\infty} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, (x,t) \in K;$