E. Vakal, PhD, Yu. Vakal , PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
L . Vakal, PhD
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF ELLIPTIC TYPE WITH SPECIAL COUPLING CONDITIONS

A mathematical model of fluid flow for heterogeneous environments with thin weakly permeable inclusions is considered. An efficient numerical algorithm for solving the formulated boundary value problem for elliptic equation with special coupling conditions such as imperfect contact is proposed. A numeric experiment of solving the problem of filtration of fluid on the base of a hydraulic structure is done. Obtained results are analyzed and the conclusions on the application of the proposed approach for determining the filtration resistance of soils are made.

УДК 517.9

В. С. Вовк, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *vovkvitali@gmail.com*

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА: ТОЧНІ Й АСИМПТОТИЧНІ ОДНОСОЛІТОННІ РОЗВЯЗКИ ТА ЇХ ЧИСЕЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ

Отримано чисельні розвязки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами при різних значенням малого параметра. Із використанням формули для солітонного розвязку цього рівняння, проведено порівняння формул для точних і асимптотичних солітонноподібних розвязків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами та здійснено порівняльний аналіз аналітичного і чисельного описів розвязків рівняння Кортевега – де Фріза при різних значеннях малого параметра.

Вступ. Історія дослідження явищ, що повязані із солітонними розвязками рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ), розпочалася у 1834 р., ще задовго до відкриття цього рівняння. Саме тоді шотландський інженер Рассел Джон Скотт зафіксував нове явище, яке ним було названо хвилею трансляції, яку зараз зазвичай називають усамітненою або відокремленою хвилею [5].

Повідомлення про відкриття нового виду хвиль привернуло увагу багатьох учених і мало великий резонанс серед фахівців із гідромеханіки. Цим явищем зацікавилися такі відомі вчені: Стокс Дж., Буссінеск Дж., Релей Л. та багато інших [3], які намагалися знайти диференціальне рівняння для аналітичного опису відокремленої хвилі. Із цією метою для математичного опису таких хвиль Релей і Буссінеск запропонували використовувати квадрат гіперболічного синуса.

Як математичну модель явища, яке спостерігав Рассел, нідерландські дослідники Кортевег Д. і де Фріз Дж. у 1895 р. запропонували рівняння

$$u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \tag{1}$$

що описує рух рідини в каналі невеликої глибини і яке зараз названо їхніми іменами.

Розвязок рівняння КдФ у вигляді відокремленої хвилі $u(x,t) = f(x - at)$ записується за допомогою формули

$$u(x,t) = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{a(x - a^2 t)}{2} \right], \tag{2}$$

де a – довільна стала.

Наприкінці 60-х рр. минулого століття рівняння Кортевега – де Фріза привернуло увагу багатьох дослідників. Причиною стало відкриття низки цікавих властивостей частинних розвязків рівняння КдФ: Крускал М. і Забускі Н. чисельно показали, що відокремленні хвилі, які описуються рівнянням КдФ, при взаємодії між собою не втрачають своєї форми, тобто їх взаємодія подібна до взаємодії частинок. Такі хвилі й відповідно розвязки рівняння КдФ ними названо солітонами [8].

Із того часу дослідженню рівняння КдФ і його розвязків присвячено багато праць. Зокрема, для знаходження його точних розвязків застосовувалися різні методи, серед яких варто окремо згадати метод оберненої задачі розсіяння, за допомогою якого знайдено точні розвязки багатьох рівнянь із частинними похідними математичної і теоретичної фізики [4].

Різноманітні числові та асимптотичні методи також використовуються для пошуку наближених розвязків цього рівняння. Вибір методу розвязку залишається за дослідником. Зазвичай надається перевага якомусь одному способу, при цьому рідко проводиться порівняльний аналіз розвязків, що отримані за допомогою різних методів. У цій статті здійснено порівняльний аналіз точного і (відповідного) асимптотичного односолітонного розвязку сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{3}$$

де ε – малий параметр.

Основна частина. У подальшому використовуються такі означення [2, 6].

Означення 1. Простором $G_1 = G_1(R \times [0;T] \times R)$ називається лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau), (x,t,\tau) \in R \times [0:T] \times R,$ що для довільних невідємних цілих n, p, q, r рівномірно щодо (x, t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0;T]$ виконуються умови:

1) справджується співвідношення $\lim\limits_{\tau \to +\infty} \dfrac{\partial^p}{\partial x^p} \dfrac{\partial^q}{\partial t^q} \dfrac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, (x,t) \in K;$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^{-}(x,t,\tau)$, що $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}f(x,t,\tau)-f^{-}(x,t)=0,\ (x,t)\in K.$

Нехай $G_1^0=G_1^0(R\times[0;T]\times R)\subset G_1$ – простір функцій, для яких рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset R\times[0;T]$ виконується умова: $\lim\limits_{\tau\to\infty}f(x,t,\tau)=0.$

Означення 2. Функція $u=u(x,t,\varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається однофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N\ge 0$ зображується у вигляді асимптотичного розкладу:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)]+O(\varepsilon^{N+1}),\ \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

де $\varphi(t)\in C^{\infty}([0;T])$ – скалярна дійсна функція, функції $u_j(x,t),\ j=\overline{1,N}$ – нескінченно диференційовні (у точках $t=0,\ t=T$ розглядаються відповідно ліва та права похідні); $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0, V_j(x,t,\tau)\in G_1, j=\overline{1,N}.$

Функція $x-\varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x,t,\varepsilon)$.

Функція $V_N(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(x,t,\tau)$ називається сингулярною частиною асимптотики, а функція $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$ – регулярною. Зауважимо, що регулярна частина асимптотики в (4) відповідає за так званий фон (або пєдестал солітонного розвязку), а сингулярна частина математично відображає якісні властивості частинного розвязку сингулярно збуренного рівняння, що проявляються при зміні малого параметра.

а) Порівняння точного й асимптотичного розвязків рівняння (3). З урахуванням (2) точний розвязок рівняння КдФ із малим параметром вигляду (3) можна записати таким чином:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}a^2\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{a(x-a^2t)}{2\varepsilon}\right]. \tag{5}$$

У [6] із використанням нелінійного методу Вентцеля – Крамерса – Бріллюена (ВКБ) побудовано асимптотичні солітоноподібні розвязки рівняння Кортевега – де Фріза з малим параметром і змінними коефіцієнтами в загальному випадку. Для реалізації запропонованого у [6] алгоритму побудови асимптотичного розвязку для випадку рівняння вигляду (3) запишемо це рівняння таким чином:

$$\varepsilon^2u_{xxx}=-u_t-6uu_x.$$

Візьмемо до уваги, що коефіцієнти при похідних u_t та u_{xx}, які позначаються літерами a та b відповідно, є сталими, при цьому $a=-1, b=-6.$ З урахуванням цієї обставини розглянемо випадок нульового фону, тобто вважатимемо, що функції $u_j(x,t)=0$ для всіх $j=\overline{0,N}.$

Згідно з алгоритмом статті [6] асимптотичний розвязок рівняння (3) має вигляд

$$V_0(x,t,\tau)=-3\frac{A(\varphi,t)}{b}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{A(\varphi,t)}}{2}(\tau+c_0(t))\right),$$

де $A(\varphi,t)=-a\varphi'(t)=\varphi'(t),\quad \tau=\dfrac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},\quad \varphi=\varphi(t)$ – деяка скалярна функція, що задає так звану криву розриву і яка визначається з диференціального рівняння вигляду $\varphi''(t)=0,$ при цьому $\varphi(t)=C_1t+C_2$, C_1,C_2 – сталі інтегрування, величина c_0 – довільна стала. Надалі покладемо $C_2=0$ і вважаємо, що $C_1>0.$ Тоді асимптотичний солітоноподібний розвязок рівняння (3) набуває вигляду

$$u(x,t)=\frac{C_1}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{C_1}(x-C_1)}{2\varepsilon}\right). \tag{6}$$

Порівнявши точний розвязок рівняння (3) – формулу (5) та асимптотичний солітоноподібний розвязок цього ж рівняння – формулу (6), бачимо, що ці формули повністю збігаються. При цьому асимптотичний солітоноподібний розвязок рівняння (3) містить лише головний член сингулярної частини асимптотичного ряду, а інші члени асимптотичного розкладу рівні нулеві.

б) Порівняння точного і чисельного розвязків. Розглянемо чисельний розвязок сингулярно збуреного рівняння КдФ вигляду (3) при різних значеннях малого параметра. Оскільки точний і асимптотичний розвязки, що побудовані за допомогою нелінійного методу ВКБ, збігаються, то чисельний розвязок рівняння КдФ порівняємо з точним розвязком цього рівняння при відповідних значеннях малого параметра.

Для знаходження чисельного розвязку рівняння (3) застосуємо метод прямих [1] або, як його ще називають, метод ліній. У літературі цей метод іноді ще називається методом Роте. Але частіше так називають варіант методу прямих, для якого розбиття відбувається по часовій змінній.

На відміну від кінцево-різницевих методів, які використовували, наприклад, Крускал і Забускі, у методі прямих дискретизація проводиться лише по одній змінній. Перевагу цьому методу надано через його привабливий і простий підхід до знаходження шуканого чисельного розвязку.

Уведемо рівномірну сітку

$$\overline{\omega_h}=\{x_i=(i-1)h,\ i=1,2,...,N,\ h=1/(N-1)\}$$

і позначимо на прямих x_i невідому функцію $u(x_i,t)=Y_i(t).$

У результаті дискретизації отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dY_2}{dt}+3\frac{Y_3^2-Y_2^2}{h}=0;$$

$$\frac{dY_i}{dt}+3\frac{Y_{i+1}^2-Y_{i-1}^2}{2h}+\varepsilon^2\frac{-Y_{i-2}+2Y_{i-1}-2Y_{i+1}+Y_{i+2}}{h^3}=0,\ i=3,...,N-2;$$

$$\frac{dY_{N-1}}{dt}+3\frac{Y_{N-1}^2-Y_{N-2}^2}{h}=0;$$

$$Y_1=Y_N=0;\ \ Y_i(0)=2\,\mathrm{sech}^2\frac{x_i}{\varepsilon},i=2,...,N-1.$$

У подальшому ця система розвязується за допомогою вбудованих бібліотечних функцій математичного пакета Матлаб. На відміну від [7], де метод прямих застосовано до класичного рівняння КдФ, тобто без малого параметра, рівняння (1) представимо в такій дивергентній формі:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-3\frac{\partial(u^2)}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

при цьому малому параметру було надано значень 1; 0,2; 0,05.

Оскільки наведене рівняння визначене на всій дійсній прямій, то для його чисельного розвязання необхідно обмежитися певним скінченним відрізком, кінці якого умовно відіграють роль нескінченно віддалених точок. Припускається, що в цих точках функція u рівна нулеві.

Різницева апроксимація диференціальних операторів здійснюється за просторовою змінною x. При цьому використовується центральна різницева перша похідна у всіх внутрішніх точках, а в точках, що сусідні до точок межі, – ліві та праві різницеві похідні.

Початкову умову знайдено з формули для точного розвязку рівняння (3) при $a=2,\ \ t=0$ при відповідному значенні малого параметра. Розрахунки також проведено при різних різницевих наближеннях першої похідної з використанням центральних та лівих різницевих схем зі вказаними граничними і початковими умовами.

Розвязання системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) здійснювалося за допомогою вбудованих функцій MATLAB ode45, в якій використовується явний метод Рунге – Кутти четвертого та пятого порядків, та ode23s, в якій реалізовано модифікований метод Розенброка другого порядку.

Графіки отриманих чисельних розвязків рівняння (3) при різних значеннях малого параметра наведено на рис. 1–4.

При зменшенні малого параметра ширина солітона також зменшується, тому потрібно збільшувати за необхідності кількість точок розбиття.

На рис. 1–3 показано чисельні розвязки при різних значеннях часової змінної *t.*

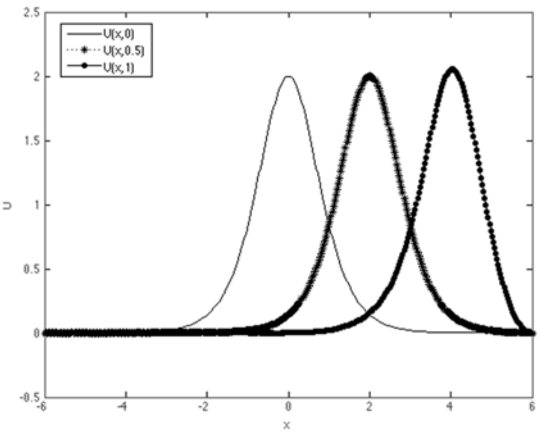

Рис. 1. Розв'язки при $\varepsilon=1$ $(N{=}401)$

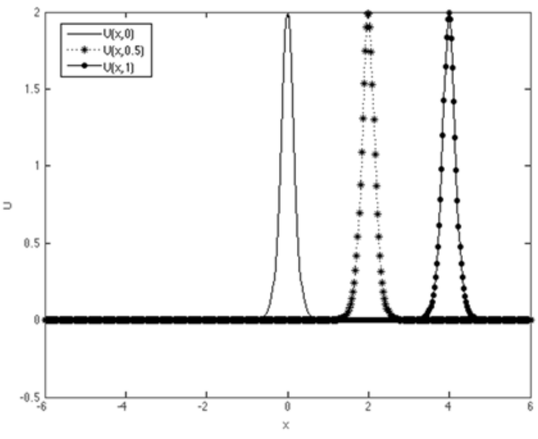

Рис. 2. Розв'язки при $\varepsilon=0{,}2$ $(N{=}401)$

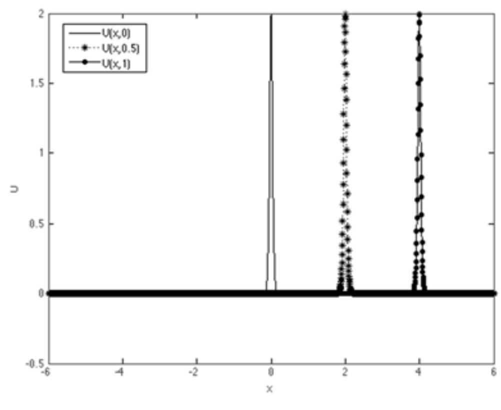

Рис. 3. Розв'язки при $\varepsilon=0.05$ $(N{=}2001)$

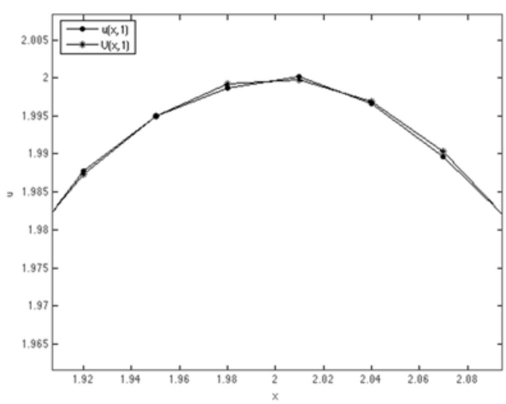

Рис. 4. Графік наближеного $u(x,t)$ **і точного розв'язків** $U(x,t)$ **для** $t{=}0.5$ **в околі** $x{=}2$

Висновки. Порівняння формул для точного і асимптотичного солітонноподібного розвязків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза у випадку сталих коефіцієнтів показало збігання цих формул. При цьому виявилося, що головний член сингулярної частини асимптотичного ряду повністю збігається з точним аналітичним розвязком цього рівняння. За допомогою методу прямих побудовано чисельні розв'язки досліджуваного рівняння при різних значеннях малого параметра. Застосовано різні схеми наближення похідних першого і другого порядків точності. Проведений порівняльний аналіз точного і чисельного розвязків рівняння КдФ із малим параметром показав, що найкраще наближення забезпечують чисельні схеми другого порядку точності. При застосуванні функції ode45 для розвязування системи звичайних диференціальних рівнянь виконується порівняно небагато обчислювальних операцій і, як наслідок, витрачається незначна кількість часу.

Список використаних джерел

1. *Ляшко И. И.* Методы вычислений / И. И. Ляшко, А. А. Скоробогатько. – К. : Вища шк., 1977. – С. 243–245.
2. *Маслов В. П.* Асимптотические солитоноподобные решения уравнений с малой дисперсией / В. П. Маслов, Г. А. Омельянов // Успехи мат. наук. –1981. – Т. 36. – Вып. 3 (219). – С. 63 – 124.
3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис; пер. с англ. В. П. Гурария, В. И. Мацаева. – М. : Мир, 1988. – 696 с.
4. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
5. *Russel J. Scott.* Report on waves / J. Scott. Russel // Reports Fourteenth Meeting of the British Association. – London : John Murray, 1844. – P. 311.
6. *Samoylenko V. Hr.* Asymptotic expansion for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg – de Vries equation with variable coefficients / V. Hr. Samoylenko, Yu. Samoylenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 57, № 1. – P. 132–148.
7. *Shiesser W. E.* Method of lines solution of the Korteweg – de Vries equation / W. E. Shiesser // Computers & Mathematics with Applications. – 1994. – Vol. 28. – № 10–12. – P. 147–154.
8. *Zabusky N. J.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N. J. Zabusky, M. D. Kruskal // Phys. Review Lett. – 1965. – Vol. 15. – P. 147–154.

Надійшла до редколегії 29.05.17

В. С. Вовк, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА: ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОДНОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Получено численные решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с постоянными коэффициентами при разных значениях малого параметра. С использованием формулы для солитонного решения данного уравнения, проведено сравнение формул для точных и асимптотических солитоноподобных решений сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с постоянными коэффициентами и выполнен сравнительный анализ аналитического и численного описаний решений уравнения Кортевега – де Фриза при разных значениях малого параметра.

V. S. Vovk, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

SINGULARLY PERTUBED KORTEWEG – DE VRIES EQUATION: EXACT AND ASYMPTOTIC SOLITON LIKE SOLUTIONS AND THEIR NUMERICAL APPROXIMATIONS

Numerical solutions of singularly pertubed Korteweg – de Vries equation with constant coefficients were obtained for different values of the small parameter. Comparison of exact and asymptotic formulas for soliton like solutions of singularly pertubed Korteweg – de Vries equation and comparison analysis of analytical and numerical description were done using formula of soliton solution of this equation for different values of the small parameter.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, Камянець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Камянець-Подільський
E-mail: *gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua*

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розвязків (матриць впливу та матриць Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розвязку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Вступ. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [3], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Громяка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розвязків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.