Висновки. Порівняння формул для точного і асимптотичного солітонноподібного розвязків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза у випадку сталих коефіцієнтів показало збігання цих формул. При цьому виявилося, що головний член сингулярної частини асимптотичного ряду повністю збігається з точним аналітичним розвязком цього рівняння. За допомогою методу прямих побудовано чисельні розв'язки досліджуваного рівняння при різних значеннях малого параметра. Застосовано різні схеми наближення похідних першого і другого порядків точності. Проведений порівняльний аналіз точного і чисельного розвязків рівняння КдФ із малим параметром показав, що найкраще наближення забезпечують чисельні схеми другого порядку точності. При застосуванні функції ode45 для розвязування системи звичайних диференціальних рівнянь виконується порівняно небагато обчислювальних операцій і, як наслідок, витрачається незначна кількість часу.

Список використаних джерел
1. *Ляшко И. И.* Методы вычислений / И. И. Ляшко, А. А. Скоробогатько. – К. : Вища шк., 1977. – С. 243–245.
2. *Маслов В. П.* Асимптотические солитоноподобные решения уравнений с малой дисперсией / В. П. Маслов, Г. А. Омельянов // Успехи мат. наук. –1981. – Т. 36. – Вып. 3 (219). – С. 63 – 124.
3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис; пер. с англ. В. П. Гурария, В. И. Мацаева. – М. : Мир, 1988. – 696 с.
4. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
5. *Russel J. Scott.* Report on waves / J. Scott. Russel // Reports Fourteenth Meeting of the British Association. – London : John Murray, 1844. – P. 311.
6. *Samoylenko V. Hr.* Asymptotic expansion for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg – de Vries equation with variable coefficients / V. Hr. Samoylenko, Yu. Samoylenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 57, № 1. – P. 132–148.
7. *Shiesser W. E.* Method of lines solution of the Korteweg – de Vries equation / W. E. Shiesser // Computers & Mathematics with Applications. – 1994. – Vol. 28. – № 10–12. – P. 147–154.
8. *Zabusky N. J.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N. J. Zabusky, M. D. Kruskal // Phys. Review Lett. – 1965. – Vol. 15. – P. 147–154.

Надійшла до редколегії 29.05.17

В. С. Вовк, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА: ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОДНОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Получено численные решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с постоянными коэффициентами при разных значениях малого параметра. С использованием формулы для солитонного решения данного уравнения, проведено сравнение формул для точных и асимптотических солитоноподобных решений сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с постоянными коэффициентами и выполнен сравнительный анализ аналитического и численного описаний решений уравнения Кортевега – де Фриза при разных значениях малого параметра.

V. S. Vovk, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

SINGULARLY PERTUBED KORTEWEG – DE VRIES EQUATION: EXACT AND ASYMPTOTIC SOLITON LIKE SOLUTIONS AND THEIR NUMERICAL APPROXIMATIONS

Numerical solutions of singularly pertubed Korteweg – de Vries equation with constant coefficients were obtained for different values of the small parameter. Comparison of exact and asymptotic formulas for soliton like solutions of singularly pertubed Korteweg – de Vries equation and comparison analysis of analytical and numerical description were done using formula of soliton solution of this equation for different values of the small parameter.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, Камянець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Камянець-Подільський
E-mail: *gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua*

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розвязків (матриць впливу та матриць Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розвязку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Вступ. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [3], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Громяка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розвязків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [5, 12].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розвязків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [4, 6, 7].

У цій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t,r,\varphi,z) : t>0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j),\ R_0 = 0,\ R_{n+1} = R < +\infty;\ \varphi \in [0;2\pi); z \in (0;+\infty)\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу другого порядку [10].

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z)\,,\ r \in I_j\,,\ j = \overline{1,n+1}\,, \tag{1}$$

із початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0} = g_j^1(r,\varphi,z);\quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2(r,\varphi,z)\,,\ r \in I_j\,,\ j = \overline{1,n+1}\,, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0\,,\quad \left.\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0,\quad s = 0,1, \tag{3}$$

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \right|_{z=0} = g_j(t,r,\varphi)\,,\quad \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0\,,\quad s = 0,1\,,\ j = \overline{1,n+1}\,, \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]\right|_{r=R_k} = 0\,,\ j = 1,2\,,\ k = \overline{1,n}, \tag{5}$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі;

$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$,

$f(t,r,\varphi,z) = \{ f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z), \ldots, f_{n+1}(t,r,\varphi,z) \}$, $g^1(r,\varphi,z) = \left\{ g_1^1(r,\varphi,z), g_2^1(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}^1(r,\varphi,z) \right\}$,

$g^2(r,\varphi,z) = \left\{ g_1^2(r,\varphi,z), g_2^2(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}^2(r,\varphi,z) \right\}$, $g(t,r,\varphi) = \{ g_1(t,r,\varphi), g_2(t,r,\varphi), \ldots, g_{n+1}(t,r,\varphi) \}$ – задані обмежені неперервні функції; $u(t,r,\varphi,z) = \{ u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), \ldots, u_{n+1}(t,r,\varphi,z) \}$ – шукана функція.

Основна частина. Припустимо, що розвязок задачі (1)-(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [14, 15, 8].

До задачі (1)-(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F_+\left[f(z) \right] = \int_0^{+\infty} f(z) K(z,\sigma) dz \equiv \tilde{f}(\sigma), \tag{6}$$

$$F_+^{-1}\left[\tilde{f}(\sigma) \right] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\sigma) K(z,\sigma) d\sigma \equiv f(z), \tag{7}$$

$$F_+\left[\frac{d^2 f}{dz^2} \right] = -\sigma^2 \tilde{f}(\sigma) + K(0,\sigma) \left.\left(-\frac{df}{dz} + hf \right)\right|_{z=0}, \tag{8}$$

де ядро перетворення $K(z,\sigma) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\cos(\sigma z) + h\sin(\sigma z)}{\sqrt{\sigma^2 + h^2}}$.

Інтегральний оператор F_+ за формулою (6) унаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \left\{(t,r,\varphi); t>0; r\in I_n^+; \varphi\in[0;2\pi)\right\}$, 2π-періодичного щодо кутової змінної φ розвязку диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \tilde{u}_j + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2 \right)\tilde{u}_j = \tilde{F}_j(t,r,\varphi,\sigma),\ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{9}$$

із початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(r,\varphi,\sigma),\ \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(r,\varphi,\sigma),\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_1}{\partial r^s}\Big|_{r=0} = 0,\ \frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1}}{\partial r^s}\Big|_{r=+\infty} = 0,\ s=0,1, \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right)\tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right)\tilde{u}_{k+1} \right]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}, \tag{12}$$

де $\tilde{F}_j(t,r,\varphi,\sigma) = \tilde{f}_j(t,r,\varphi,\sigma) + a_{zj}^2 K(0,\sigma) g_j(t,r,\varphi)$, $j=\overline{1,n+1}$.

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m\left[g(\varphi)\right] = \int_0^{2\pi} g(\varphi)\exp(-im\varphi)d\varphi \equiv g_m, \tag{13}$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi)\right), \tag{14}$$

$$F_m\left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2}\right] = -m^2 F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \tag{15}$$

де *i* – уявна одиниця, $\mathrm{Re}(\cdots)$ – дійсна частина виразу $(\cdots)$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$, $k=1,2,3,\ldots$

Інтегральний оператор F_m за формулою (13) унаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \left\{(t,r); t>0; r\in I_n^+\right\}$ розвязку одновимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу другого порядку

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm}^2}{r^2} \right)\tilde{u}_{jm} + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2 \right)\tilde{u}_{jm} = \tilde{F}_{jm}(t,r,\sigma),\ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1},\ \nu_{jm} = a_{\varphi j} m / a_{rj}, \tag{16}$$

із початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(r,\sigma),\ \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(r,\sigma),\ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{17}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m}}{\partial r^s}\Big|_{r=0} = 0,\ \frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1,m}}{\partial r^s}\Big|_{r=+\infty} = 0,\ s=0,1, \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right)\tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right)\tilde{u}_{k+1,m} \right]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j=1,2,\ k=\overline{1,n}. \tag{19}$$

До задачі (16)–(19) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є – Бесселя на полярній осі I_n^+ із n точками спряження щодо радіальної змінної r [8]:

$$H_{(n)}\left[f(r)\right] = \int_0^{+\infty} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda), \tag{20}$$

$$H_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \tag{21}$$

$$H_{(n)}\left[B_{(m)}[f(r)]\right] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda)\sigma_k r dr. \tag{22}$$

У формулах (20)–(22) беруть участь, виписані у [8] спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя:

$B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{rk}^2 \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k - r)B_{\nu_{km}} + a_{r,n+1}^2 \Theta(r-R_n)B_{\nu_{n+1,m}}$, де $B_{\nu_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{km}^2}{r^2}$ – класичний диференціальний оператор Бесселя, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{F}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{F}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^1(r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(r,\sigma) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^2(r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2, \ j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\cdots] = \left[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr \quad \int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr \right] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Унаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{F}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^1(\lambda,\sigma), \quad \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^2(\lambda,\sigma), \tag{27}$$

де $\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \ j = \overline{1,n+1}, \ \tilde{\tilde{F}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{F}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \ j = \overline{1,n+1},$

$\tilde{\tilde{g}}_{jm}^s(\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm}^s(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \ s = 1,2, \ j = \overline{1,n+1}.$

Припустимо, не зменшуючи загальності розвязку задачі, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, ..., q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2 - q_j^2, \ j = \overline{1,n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_m = \tilde{\tilde{F}}_m(t,\lambda,\sigma), \tag{28}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma); \quad \frac{d\tilde{\tilde{u}}_m}{dt}\Bigg|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma), \tag{29}$$

де

$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \quad \tilde{\tilde{F}}_m(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{F}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \quad \tilde{\tilde{g}}_m^s(\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^s(\lambda,\sigma), \ s = 1,2, \ \Delta^2(\lambda,\sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2.$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розвязком задачі (28), (29) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma) = G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma) + \frac{d}{dt}G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma) + \int_0^t G(t-\tau,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{F}}_m(\tau,\lambda,\sigma)d\tau, \tag{30}$$

де $G(t,\lambda,\sigma) = \dfrac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}$.

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $H_{(n)}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \int_0^{+\infty} \cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розвязок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma) = \int_0^{+\infty} [G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma) + \frac{\partial}{\partial t}G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma) + \int_0^t G(t-\tau,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{F}}_m(\tau,\lambda,\sigma)d\tau]V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda, \ j=\overline{1,n+1}. \tag{32}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (32), обернені оператори F_+^{-1} та F_m^{-1}, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{gathered} u_j(t,r,\varphi,z) = \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\times \\ \times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho + \\ + \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_2^{2\pi} W_{jk}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z)g_k(\tau,\rho,\alpha)\sigma_k\rho d\alpha d\rho d\tau, \quad j=\overline{1,n+1}, \end{gathered} \tag{33}$$

які визначають єдиний розвязок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} G(t,\lambda,\sigma)K(z,\sigma)K(\xi,\sigma)V_j(r,\lambda)V_k(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\sigma\right)\cos(m\varphi)$ матриці впливу (функції впливу) та компоненти $W_{jk}(t,r,\varphi,z) = E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,0)$ тангенціальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі.

Із використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) у сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розвязку (33) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розвязків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)–(5).

Методами із [2, 17] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розвязок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Якщо функції* $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$, $g_j(t,r,\varphi)$ *задовольняють умови:*

1) *двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;*
2) *мають обмежену варіацію за геометричними змінними;*
3) *абсолютно сумовні за змінною* z *на* $(0;+\infty)$*;*
4) *абсолютно сумовні з ваговою функцією* $\rho(r) = r\sigma(r)$ *на* I_n^+*;*
5) *справджують умови спряження,*

то гіперболічна початково-крайова задача (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розвязок, який визначається за формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розвязку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Зауваження 2. Параметр h дозволяє виділяти з формул (33) розвязки початково-крайових задач у випадках задання на площині $z = 0$ крайової умови 1-го роду $(h \to \infty)$ та 2-го роду $(h \to 0)$.

Зауваження 3. Аналіз розвязку (33) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z),\ g_j^s(r, \varphi, z),\ g_j(t, r, \varphi)$, $s = 1, 2;\ j = \overline{1, n+1}$, проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 4. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища в циліндричній системі координат.

Зауваження 5. У випадку $\alpha_{11}^k = 0,\ \beta_{11}^k = 1;\ \alpha_{12}^k = 0,\ \beta_{12}^k = 1;\ \alpha_{21}^k = E_1^k,\ \beta_{21}^k = 0;\ \alpha_{22}^k = E_2^k,\ \beta_{22}^k = 0,$ де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1, n},$) умови спряження (5) збігаються із класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю вимушених коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розвязків (функцій впливу та функцій Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розвязку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі. Одержаний розвязок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може використовуватися як у подальших теоретичних дослідженнях, так і у практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука. 1978.
2. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958.
3. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. – М. : ИЛ, 1961.
4. *Громик А. П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Камянець-Подільський : Абетка-Світ, 2011.
5. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1998.
6. *Конет І. М.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2004.
7. *Конет І. М.* Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. – Камянець-Подільський : Абетка-Світ, 2013.
8. *Ленюк М.П.* Узагальнення інтегралу Фур'є – Бесселя / М. П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 2, ч. 1. – С. 89–101.
9. *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. – К. : Наук. думка. 1991.
10. *Перестюк М. О.* Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2006.
11. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными / А. М. Самойленко, Б. П. Ткач. – К. : Наук. думка, 1992.
12. *Сергиенко И. В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991.
13. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1962.
14. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М. : ИЛ, 1955.
15. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : Гостехтеориздат, 1956.
16. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. – М. : Изд-во МГУ, 1991.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 05.12.16

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольский, Украина,
И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. физ.-мат. наук, Украина,
Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ЦИЛЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики в кусочно-однородном цилиндрически-круговом полупространстве.

A. Gromyk, PhD
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky, Ukraine,
I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky, Ukraine

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDRICAL-CIRCULAR HALFSPACE

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise-homogeneous cylindrically-circular halfspace is constructed for the first time.