

5. Дресвянников В. И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей / В. И. Дресвянников // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32–47.
6. Келли А. Кристаллография и дефекты в кристаллах / А. Келли, Г. Гровс // – М. : Мир, 1974. – 496 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика / А. Зоммерфельд / М. : Изд-во иностр. л-ры., 1968. – 501 с.
8. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 624 с.
9. Мольченко Л. В. Гибкие оболочки вращения в магнитном поле: монография [Электронный ресурс] / Л. В. Мольченко. – К., 2013. – 196 с. – Режим доступа : <http://mechmat.univ.kiev.ua/publications>.
10. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин // – М. : Наука, 1973. – 232 с.
11. Федорченко Л. М. Вплив фізичних властивостей матеріалу на напружений стан ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю / Л. М. Федорченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спец. Вип. – С. 267–270.
12. Федорченко Л. М. Деформування гнучкої ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю з діа- та парамагнітних матеріалів / Л. М. Федорченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2015. – Вип. 34. – С. 57–61.
13. Bian Yu-Hong. Analysis of nonlinear stresses and strains in a thin current-carrying elastic plate / Yu-Hong Bian // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, № 1. – P. 108–120.
14. Green A. E. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates / A. E. Green, P. M. Naghdi // Phil. Trans. Roy. Soc. – London. – 1983. – A309. – P. 559–610.
15. Mol'chenko L. V. Influence of an Extraneous Electric Current on the Stress of an Annular Plate of Variable Rigidity / L. V. Mol'chenko // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37. – № 12. – P. 1607–1611.
16. Mol'chenko L. V. The stress state of a flexible orthotropic spherical shell subject to external current and mechanical force in a magnetic field / L. V. Mol'chenko, I. I. Loos // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49. – № 5. – P. 528–533.
17. Mol'chenko L. V. Deformation of a flexible orthotropic spherical shell of variable stiffness in a magnetic field / L. V. Mol'chenko, I. I. Loos, L. M. Fedorchenko // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52. – № 1. – P. 56–61.
18. Newmark N. M. Method of Computation for Structural Dynamics / N. M. Newmark // J. Eng. Mech. Div. Proc. (ASCE). – 1959. – 85. – № 7. – P. 67–97.

Надійшла до редколегії 30.11.16

Л. Мольченко, д-р физ.-мат. наук

Николаевский национальный университет имени В. А. Сухомлинского, Николаев, Украина,

Л. Федорченко, канд. физ.-мат. наук

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,

Л. Васильева, канд. физ.-мат. наук

Николаевский национальный университет имени В. А. Сухомлинского, Николаев, Украина

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ СРЕЗАННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТИ

В рамках решения важной задачи магнитоупругости теории гибких ортотропных оболочек вращения сформулировано постановку граничной задачи. Предложено методу её решения. Исследовано и проанализировано влияние граничных условий на характеристики напряженно-деформированного состояния усеченной сферической оболочки.

L. Mol'chenko, Full Doctor

V. O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, Ukraine,

L. Fedorchenko, PhD

Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine,

L. Vasil'eva, PhD

V. O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, Ukraine

STRESS-STRAIN STATE ORTHOTROPIC TRUNCATED SPHERICAL SHELL OF VARIABLE STIFFNESS

As part of solving important task magnetoelasticity theory of flexible orthotropic shells of revolution formulated boundary problem statement. The method of the solution. Investigated and analyzed the influence of boundary conditions on the characteristics of the stress-strain state.

УДК 539.3

В. Чернобай, асп.

Институт надтвердых материалов имени В. М. Бакуля НАН Украины, Київ

E-mail: volodymyr_mexanik@ukr.net

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРУЖЕНЬ НА ЭЛЛИПТИЧНОЙ НАНОПОРИ ЗА АНТИПЛОСКОГО ЗСУВУ

Досліджено концентрацію напружень в антиплоско-деформованому пружному тілі з еліптичною порою, напруження на поверхні якої відповідають моделі Гуртіна – Мердока. Точний аналітичний розв'язок одержано методом мультипольних розвинень із використанням техніки комплексних потенціалів. Наведені чисельні результати параметричного аналізу задачі демонструють суттєву залежність концентрації напружень від розміру і форми пори. Асимптотичний аналіз напружень у випадку виродження тонкої пори у тріщину доводить, що поверхневі напруження усувають кореневу особливість поля напружень у вершинах тріщини.

Вступ. Характерною рисою наноструктурних (в т. ч. нанопористих) матеріалів є дослідно підтверджена (напр. [11,13]) залежність їх пружної поведінки від характерного розміру неоднорідностей, зумовлена впливом поверхневої енергії вільних/міжфазних меж розділу фаз. Указаний вплив є вкрай слабким на макрорівні (і тому ним нехтують у класичній механіці), утім зростає зі збільшенням питомої міжфазної поверхні і стає суттєвим на нанорівні. Для його врахування в рамках континуального підходу зазвичай [15] використовується модель Гуртіна – Мердока [5, 6], згідно з якою поверхневі напруження залежать від пружних властивостей та геометрії (головним чином, кривизни) вільної чи міжфазної поверхні й обумовлюють так званий "розмірний" ефект макроскопічної жорсткості нанокомпозитів (напр. [3, 4, 12]).

Цікавим і практично важливим, але до цього часу вкрай мало дослідженим, є питання впливу поверхневої енергії на локальну концентрацію напружень, а отже і межу міцності наноструктурних матеріалів. Характер такого впливу є вельми своєрідним і відрізняється від звичних уявлень макрорівня. Так, згідно із [7], поверхневі напруження усувають відому з лінійної механіки руйнування кореневу особливість поля напружень у вершинах тріщини. Аналогічно висновку доходять і автори робіт [9, 10] на підставі розрахунку напружень в околі тонкої еліптичної пори. Утім, досі в літературі відсутні як теоретичне обґрунтування цього важливого для механіки руйнування факту, так і систематичне

дослідження концентрації напружень та їхньої поведінки в околі нанорозмірної пори. Робота [14] є ймовірно, єдиною (утім, безрезультатною) спробою асимптотичного аналізу вказаної проблеми. Метою цієї роботи є систематичний аналіз концентрації напружень при антиплоскому зсуві пружного тіла з еліптичною порою, напруження на поверхні якої відповідають моделі Гуртіна – Мердока.

Постановка крайової задачі. Розглянемо площину з однією еліптичною порою. Уведемо декартову систему координат Ox_1x_2 з початком у центрі еліпса й осями, орієнтованими уздовж його великої l_1 і малої l_2 півосей. Форма еліпса визначається співвідношенням сторін $e = l_2/l_1$, фокальна відстань $d = \sqrt{l_1^2 - l_2^2}$. Поруч із загальноживаною комплексною змінною $z = x_1 + ix_2$ введемо "еліптичну" комплексну змінну $\xi = \zeta + i\eta$, згідно із формулою

$$z = d \operatorname{ch} \xi = \frac{d}{2}(v + v^{-1}), \quad v = \exp \xi. \quad (1)$$

Координатна лінія $\zeta = \zeta_0$ визначає поверхню еліптичної пори L , $v_0 = \exp \zeta_0$. На поверхні пори функції $v^k = v_0^k \exp i k \eta$ залежать лише від кутової координати η , що робить комплексну змінну ξ зручною при розгляді областей з еліптичною межею. У крайньому випадку круглої ($e = 1$) пори, $d \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow \infty$, $v_0 d \rightarrow 2R$, $\eta \rightarrow \theta$ і $vd \rightarrow 2r \exp i \theta = 2z$, де r і θ – полярні координати. Інший крайній випадок – це нескінченно тонка ($e = 0$) пори (тріщина), де $d = l_1$ і $v_0 = 1$.

Постановка задачі про антиплоский зсув включає рівняння рівноваги

$$\partial \sigma_{13} / \partial x_1 + \partial \sigma_{23} / \partial x_2 = 0 \quad (2)$$

і закон Гука

$$\sigma_{i3} = 2\mu \varepsilon_{i3} = \mu \partial w / \partial \xi_i, \quad i=1,2, \quad (3)$$

для двох ненульових компонент тензора напружень σ_{13} та σ_{23} . Тут $w = w(x_1, x_2)$ – переміщення вздовж осі Ox_3 , μ – модуль зсуву. За вказаних умов переміщення w є гармонічною функцією, що уможлиблює застосування до її пошуку методу комплексних потенціалів [2].

Гранична умова на поверхні пори L є частинним випадком моделі Гуртіна – Мердока [5; 6] і має такий вигляд (напр., [9, 10]):

$$\sigma_n + \frac{\partial \sigma_t^s}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

де $\sigma_n = 2\mu \partial w / \partial n$, $\sigma_t = 2\mu \partial w / \partial t$ і $\sigma_t^s = 2(\mu^s - \tau^0) \partial w / \partial t$ – відповідно нормальне, дотичне і поверхневе напруження, μ^s та τ^0 – пружні константи поверхні розмірності [Н/м] згідно з [5, 10]. У термінах переміщень, умова (4) має вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{(\mu^s - \tau^0)}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Подамо переміщення w у вигляді $w = \operatorname{Re} \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – комплексний потенціал. Відповідне комплексне напруження $\sigma = \sigma_{13} + i \sigma_{23} = \mu \overline{\varphi'(z)}$, а умова (5) набуває вигляду

$$\mu \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} = -(\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi}{\partial t^2}.$$

Її перетворення з використанням умови Коші – Рімана $\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial t}$ до $\mu \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial t} = -(\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi}{\partial t^2}$ і наступне інтегрування по t уздовж L дає аналогічний граничній умові третього роду вираз

$$\operatorname{Im} \varphi = -h \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial t} = h \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial n}, \quad (6)$$

де $h = (\mu^s - \tau^0) / \mu$.

Напружений стан площини з еліптичною порою відповідає заданому на нескінченності сталому напруженню $\sigma^\infty = \sigma_{13}^\infty + i \sigma_{23}^\infty = 2\mu \varepsilon^\infty$, де $\varepsilon^\infty = \varepsilon_{13}^\infty + i \varepsilon_{23}^\infty$. Із фізичних міркувань, при $z \rightarrow \infty$ маємо $w \rightarrow w^\infty$, де $w^\infty = \varepsilon_{13}^\infty x_1 + \varepsilon_{23}^\infty x_2 = \operatorname{Re}(\varepsilon^\infty z)$.

Аналітичний розв'язок. Згідно з [9], представимо комплексний потенціал $\varphi(z)$ рядом по еліптичних гармоніках:

$$\varphi = \sum_k (A_k + a_k) v^{-k}, \quad (7)$$

де $A_k = 0$ для $k \leq 0$, $a_k = a_{-k} = \delta_{k1} d \varepsilon^\infty / 2$ і δ_{ij} – символ Кронекера. На контурі L $v = v_0 \tau$, де $\tau = \exp i \eta$, також $\overline{v} = v_0 \tau^{-1}$. Зважаючи на те, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = g_{11}^{-1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g_{22}^{-1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

де $g_{11} = g_{22} = d^2 (\sin^2 \zeta + \sin^2 \eta)$ – метричні коефіцієнти еліптичної системи координат, з умови (6) отримаємо

$$\varphi - \overline{\varphi} = \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} \right), \quad (8)$$

тут $\beta = ihg_{11}^{-1/2}$. З урахуванням очевидної тотожності $\partial v/\partial \eta = iv$ диференціювання у правій частині (8) є елементарним.

Інтегрування помноженої на τ^k ($k=1,2,\dots$) функціональної рівності (8) по періоду $0 \leq \eta \leq 2\pi$ дає нам нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$B_k + a_k v_0^{-k} - \overline{a_k} v_0^k = \sum_n n \left[(B_n + a_n v_0^{-n}) \beta_{k-n} - (\overline{B_n} + \overline{a_n} v_0^{-n}) \beta_{k+n} \right], \tag{9}$$

де $B_k = A_k v_0^{-k}$, а

$$\beta_k = \beta_{-k} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{11}^{-1/2} \exp(ik\eta) d\eta. \tag{10}$$

Визначення коефіцієнтів ряду (7) із системи (9) завершує побудову розв'язку.

Розглянемо два частинні випадки, коли розв'язок цієї задачі є елементарним: для простоти, покладемо $\varepsilon_{13}^\infty = 0$. Перший випадок відповідає еліптичній порі з вільною поверхнею ($h = 0$). Із (9) маємо $A_k \equiv 0$ для всіх k крім $A_1 = i\varepsilon_{23}^\infty v_0 d \operatorname{ch} \zeta_0$. Як легко перекоонатись, за такого вибору A_1 на поверхні пори $\operatorname{Im} \varphi = 0$. Крім того, при $\eta = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \varepsilon_{23}^\infty l_1 (1+e); \quad \frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{23}^\infty} g_{11}^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial \eta} = (1+1/e). \tag{11}$$

Враховуючи, що радіус кривизни еліпса в точці $z = l_1$ дорівнює $R = e^2 l_1$, маємо $\sigma_{t3} = \sigma_{23}^\infty (1 + \sqrt{l_1/R})$. При $R \rightarrow 0$, коли еліпс вироджується у тріщину, напруження очікувано зростають як $\sigma_{t3} \sim R^{-1/2}$ [2]. Важливо зазначити, що для довільного e потенціал φ та його похідна $\partial \varphi/\partial \xi = \frac{1}{2}(\partial \varphi/\partial \zeta - i \partial \varphi/\partial \eta)$ в околі та на поверхні пори є скінченними, тоді як $g_{11}^{-1/2} \sim 1/e$ при $e \rightarrow 0$, тобто метричний коефіцієнт є єдиним чинником сингулярності розв'язку задачі про тріщину.

Іншим простим випадком є кругла пора ($e = 1$), радіус кривизни якої є сталим: $g_{11}^{1/2} = R$. Із (10) маємо $\beta_k = -h^* \delta_{k0}$, де $h^* = h/R$ – безрозмірний параметр. Як наслідок, лише перше рівняння системи (9) є ненульовим: $B_1 = i\varepsilon_{23}^\infty R(1-h^*)/(1+h^*)$. Відповідно на поверхні пори маємо

$$w = \operatorname{Re} \varphi = \varepsilon_{23}^\infty \frac{2}{1+h^*} R \sin \theta, \quad \operatorname{Im} \varphi = -\varepsilon_{23}^\infty \frac{2h^*}{1+h^*} R \cos \theta. \tag{12}$$

За наявності поверхневих напружень ($h^* \neq 0$) уявна частина потенціалу $\operatorname{Im} \varphi$ теж відмінна від нуля. Вираз напруження σ_{t3} при $\theta = 0$

$$\frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{23}^\infty R} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{2}{1+h^*} \tag{13}$$

відрізняється від (11) лише виразом $(1+h^*)$ у знаменнику і спадає від 2 до 0 при зростанні h (крива 1 на рис. 3).

Чисельний аналіз. У загальному випадку еліптичної пори з поверхневими напруженнями розв'язок задачі має форму ряду (7), коефіцієнти якого задовольняють нескінченну систему лінійних рівнянь (9). Її чисельний розв'язок із довільною точністю ε можна одержати методом редукції [1], тобто утриманням скінченної кількості $n_{\max}(\varepsilon)$ гармонік у (7) і такої самої кількості рівнянь у (9). Одержаний таким чином наближений розв'язок прямує до точного при $n_{\max} \rightarrow \infty$, утім швидкість збіжності суттєво залежить від вхідних параметрів задачі: вона зростає при наближенні до розглянутих вище "простих" випадків, а саме при (а) $h \rightarrow 0$ і (б) $e \rightarrow 1$ при довільному h . Для скінченного h збіжність сповільнюється при $e \rightarrow 0$, тому n_{\max} має бути достатньо великим для одержання достовірних результатів. Деякі результати дослідження збіжності наведено в [9].

На рис. 1 показано розподіл нормального напруження σ_{n3} уздовж поверхні круглої (крива 1) та еліптичної пор з $e = 1/3$ (крива 2) та $e = 1/10$ (крива 3) для $h/l_1 = 1$. У випадку вільної поверхні ($h = 0$) згідно з умовою (5) $\sigma_{n3} = 0$ незалежно від форми пори. Характерно, що зі зменшенням e максимальне значення σ_{n3} зростає, а точка максимуму поступово зсувається від $\eta = \pi/2$ для круглої пори у бік зменшення η . На відміну від σ_{n3} , дотичне напруження σ_{t3} є ненульовим на поверхні пори навіть для $h = 0$ (криві 1 і 2 на рис. 2), при цьому його максимальне значення досягається при $\eta = 0$ і визначається формулою (11). За наявності поверхневих напружень (криві 3 і 4 на рис. 2) максимальне значення σ_{t3} зменшується (формула (13)), тоді як точка максимуму залишається незмінною. З огляду на вказане, у подальшому ми зосередимся на дослідженні концентрації напруження $\sigma_{t3} = \sigma_{23}$ у вершині еліпса ($\zeta = \zeta_0, \eta = 0$).

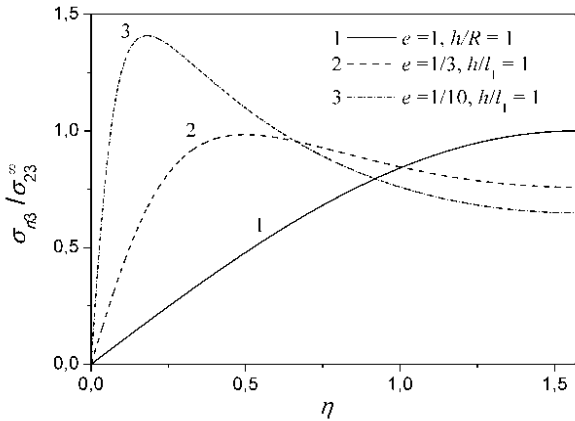


Рис. 1. Розподіл нормальних напружень навколо пори

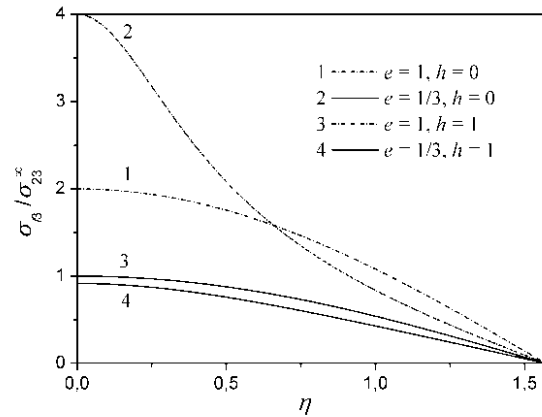


Рис. 2. Розподіл дотичних напружень навколо пори

Таблиця. $\sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^\infty$ як функція e і h^*

h^*	$e = 1.0$	$e = 0.5$	$e = 0.2$	$e = 0.1$	$e = 0.05$	$e = 0.02$
0	2.000	3.000	6.000	11.00	21.00	51.00
0.05	1.905	2.892	5.814	10.67	20.39	49.87
0.1	1.818	2.796	5.652	10.39	19.85	48.83
0.5	1.333	2.264	4.778	8.858	16.98	42.48
1.0	1.000	1.866	4.140	7.756	14.92	37.45

У таблиці подано значення коефіцієнта концентрації $\sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^\infty$ декількох значень параметра форми (співвідношення осей) еліптичної пори e і безрозмірного параметра $h^* = h/R$, де $R = e^2 l_1$ – радіус кривизни у вершині пори. Як видно з таблиці, вплив поверхневих напружень є слабким незалежно від форми пори при $h^* \ll 1$ і стає значним, коли h^* є порядку 1, що дозволяє говорити про критеріальну сутність цього параметра.

На рис. 3. наведено значення похідної $\partial w / \partial \eta$ в точці $z = l_1$ як функції h^* для ряду значень e при $\epsilon_{23}^\infty = 1$. Згідно з (11), при $h = 0$ похідна пропорційна $(1 + e)$: для забезпечення можливості порівняння, на графіках відповідно виконано масштабування. Для круглої пори (крива 1) згідно з формулою (13) $\partial w / \partial \eta \sim 1/(1 + h^*)$. Для інших значень e (0.5, крива 2; 0.1, крива 3; 0.01, крива 4; 0.001, крива 5) залежності цілком подібні і, за необхідності, із достатньою для інженерних розрахунків точністю можуть бути апроксимовані виразом $1/[1 + \alpha(h^*)^\beta]$. У контексті нашого дослідження важливим є те, що існує збіжність при $e \rightarrow 0$: так, крива 4 ($e = 0.01$) і крива 5 ($e = 0.001$) на рис. 3 практично збігаються.

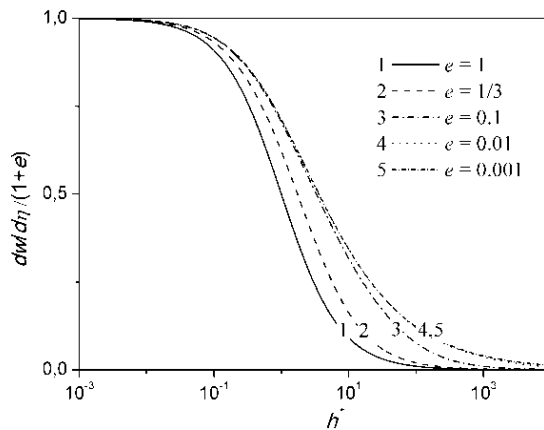


Рис. 3. Залежність похідної $\partial w / \partial \eta$ від параметра h^*

З умови (2), переписаної у вигляді

$$\text{Im} \varphi = -h \frac{\sigma_{13}}{2\mu} = -h g_{22}^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{14}$$

і згаданої вище скінченності $\text{Im} \varphi$ на поверхні та в околі еліптичної пори (у т. ч. $e = 0$) скінченність напруження σ_{13} у вершині тріщини є очевидною. Оскільки при $e \rightarrow 0$ $g_{11}^{-1/2} \sim 1/e$, то для $\partial w / \partial \eta$ при $h^* \rightarrow \infty$ з необхідністю справедлива асимптотика $\partial w / \partial \eta \sim (h^*)^{-1/2} = e \sqrt{l_1/h}$. Дійсно, апроксимація наведена на рис 3 кривої 5 при великих h^* дає відповідно

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 1.243 (h^*)^{-1/2}, \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}^\infty} = 1.243 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-1/2}, \tag{15}$$

що є підтвердженням достовірності чисельних результатів цієї роботи.

На завершення, порівняємо одержані нами дані з наявними в літературі аналогічними результатами. На рис. 4 показано розраховані згідно з (7)–(10) значення концентрації напруження σ_{I3} (світлі кружечки) на тонкій ($e = 0.001$) порі та їх апроксимація (15) (штрих-пунктирна крива). Тут же наведено дані роботи [7] (темні кружечки), де задачу для тріщини з поверхневими напруженнями зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння Коші першого порядку. Спостерігається суттєва розбіжність порівнюваних даних, імовірно причиною якої є зазначена у [8] некоректність використаного в [7] чисельного алгоритму.

У [10] задачу для нанорозмірного включення/пори еліптичної форми розв'язано методом конформного відображення. Наведені в [10] значення концентрації напруження σ_{I3} з $h/l_1 = 0.002$ для нанопори показано на рис. 5 чорними кружками. Тут же подано розраховані за (7)–(10) залежності $\sigma_{I3}(e)$ для $h/l_1 = 0$ (крива 1), 0.002 (крива 2) і 0.004 (крива 3),

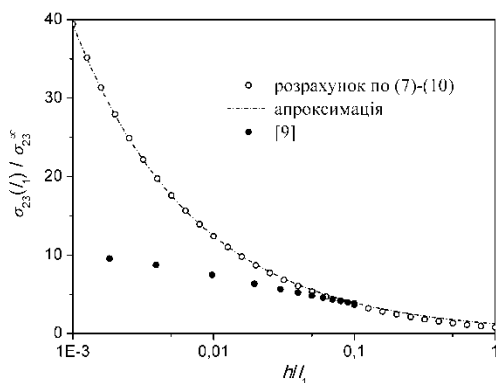


Рис. 4. Концентрація напружень σ_{I3} на тонкій нанопорі

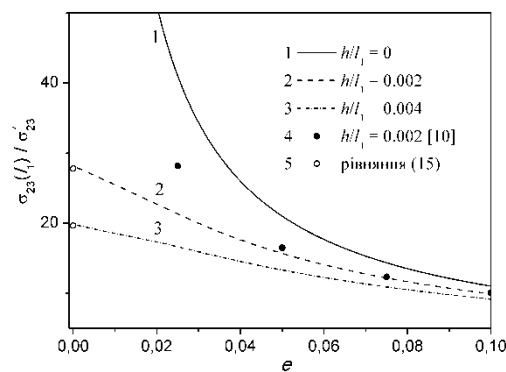


Рис. 5. Залежність концентрації напружень σ_{I3} від форми пори

а також асимптотичні значення згідно з формулою (15) – світлі кружечки. Маємо значне відхилення даних роботи [10] від кривої 2 для $e \leq 0.05$, найімовірнішою причиною якого є те, що ці дані одержано з урахуванням від 50 до 100 гармонік. Така кількість гармонік є явно недостатньою: як показує практика обчислень, для визначення концентрації σ_{I3} на тонкій ($e = 0.001$) порі з точністю 0.1 % необхідно врахувати до $n_{\max} = 5000$ членів ряду (7).

Висновки. Методом мультипольних розвинень із використанням техніки комплексних потенціалів одержано точний аналітичний розв'язок задачі про концентрацію напружень в антиплоско-деформованому пружному тілі з еліптичною порою, напруження на поверхні якої відповідають моделі Гуртіна – Мердока. Одержані результати свідчать про суттєву зміну напруженого стану в околі нанорозмірної еліптичної пори порівняно з макрорівнем: зокрема, асимптотичний аналіз показує, що поверхневі напруження усувають типову для макрорівня кореневу особливість поля напружень у вершинах тріщини.

Список використаних джерел

1. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: Физматлит, 1962.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.
3. Chen T., Dvorak G.J., Yu C.C. Size-dependent elastic properties of unidirectional nano-composites with interface stresses / T. Chen, G. J. Dvorak, C. C. Yu // Acta Mechanica. – 2007. – 188. – P. 39–54.
4. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects: Part I – theoretical framework / H. L. Duan, X. Yi, Z. P. Huang, J. Wang // Mechanics of Materials. – 2007. – 39. – P. 81–93.
5. Gurtin M. E. A continuum theory of elastic material surfaces / M. E. Gurtin, A. I. Murdoch // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1975. – 57. – P. 291–323.
6. Gurtin M. E. Surface stress in solids / M. E. Gurtin, A. I. Murdoch // Int. J. Solids Struct. – 1978. – 14. – P. 431–440.
7. Kim C. I. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete solution / C. I. Kim, P. Schiavone, C.-Q. Ru // ASME Journal of Applied Mechanics. – 2010. – 77. – 021011–17.
8. Kim C. I. A clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects / C. I. Kim, P. Schiavone // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2013. – 18(1). – P. 59–66.
9. Kushch V. I. Longitudinal shear of elliptic nanofiber composite: local stress and effective stiffness / V. I. Kushch, V. S. Chernobai, G. S. Mishuris // International Journal of Engineering Science. – 2014. – Vol. 84. – P. 79–94.
10. Luo J. On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity / J. Luo, X. Wang // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2009. – 28. – P. 926–934.
11. Miller R. E. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements / R. E. Miller, V. B. Shenoy // Nanotechnology. – 2000. – 11. – P. 39–147.
12. The effects of surface elasticity and surface tension on the transverse overall elastic behavior of unidirectional nanocomposites / S. G. Mogilevskaya, S. L. Crouch, A. La Grotta, H. K. Stolarski // Composites Science and Technology. – 2010. – 70. – P. 427–434.
13. Sharma P. Interfacial elasticity corrections to size-dependent strain-state of embedded quantum dots / P. Sharma, S. Ganti // Phys. Stat. Sol. – 2002. – 234. – R10–R12.
14. Wang G. F. Surface effects on the near-tip stresses for mode-I and mode-III cracks / G. F. Wang, X.Q. Feng, T. J. Wang, W. Gao // Journal of Applied Mechanics. – 2008. – 75. – Art. 011001.
15. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials / J. Wang, Z. Huang, H. Duan et al. // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2011. – 24. – P. 52–82.

Надійшла до редколегії 02.09.16

В. Чернобай, асп.
 Институт сверхтвердых материалов имени В. М. Бакуля НАН Украины, Киев, Украина

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ НАНОПОРЕ ПРИ АНТИПЛОСКОМ СДВИГЕ

Исследована концентрация напряжений в антиплоско-деформированном упругом теле с эллиптической порой, напряжения на поверхности которой соответствуют модели Гуртина – Мердока. Точное аналитическое решение получено методом мультипольных разложений с использованием техники комплексных потенциалов. Приведенные численные результаты анализа задачи демонстрируют существенную зависимость концентрации напряжений от размера и формы поры. Асимптотический анализ напряжений в случае вырждения тонкой поры в трещину доказывает, что поверхностные напряжения устраняют корневую особенность поля напряжений в вершинах трещины.

V. Chernobai, PhD graduate
V. Bakul Institute for superhard materials NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

STRESS CONCENTRATION ON ELLIPTICAL NANO PORE DUE TO ANTIPLANE SHEAR

Stress concentration in antiplane-deformed elastic solid containing an elliptical pore with surface stress corresponding to Gurtin – Murdoch model has been studied. Rigorous analytical solution has been obtained by the multipole expansion method using the technique of complex potentials. Numerical results show significant pore size and shape effect on the stress concentration. Asymptotic stress analysis in the case where pore degenerates into a crack proves that the surface stress eliminates the root singularity of stress field in the crack tip.

УДК 372.851

О. Василевич, канд. філол. наук, старш. викл.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
Л. Василевич, канд. техн. наук, доц.
Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ,
В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Розглядається питання про педагогічні методи викладання математичних дисциплін представникам соціогуманітарного напрямку в обсязі, що достатній для практичного і теоретичного використання в цих галузях знань математичних методів і понять фахівцями, які не мають глибокої математичної підготовки. Як один із можливих методичних засобів підвищення ефективності сприйняття і засвоєння при такому викладанні математичних понять і методів обговорюється педагогічна методика, в основі якої лежить використання народних прислів'їв, афоризмів та широковідомих висловлювань. Для низки тем і дисциплін із прикладної математики подано приклади народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих висловлювань та їх англійські аналоги, а також описано якісні результати внутрішньої оцінки ефективності цієї методики.

Вступ. Математика є потужним інструментом наукового дослідження різноманітних задач і проблем у багатьох галузях природознавства і техніки, біології, медицини, економіки та інших. Останнім часом математичні методи набувають усе більшого використання в різноманітних соціогуманітарних науках, зокрема, таких як соціологія, психологія, лінгвістика тощо. При дослідженні відповідних задач та їх математичних моделей різноманітні математичні методи і моделі активно використовуються як професійними математиками, так і фахівцями з відповідних галузей знань, яким для практичного застосування математичних методів потрібно оволодіти певними математичними поняттями, фактами (твердженнями) і методиками з тих розділів сучасної математики, які нині називають прикладною математикою.

Таких знань з основних понять і методів прикладної математики набувають частіше всього при прослуховуванні курсів лекцій із певних розділів прикладної математики та застосуванні отриманих знань при розв'язуванні конкретних задач. При цьому природно виникає проблема викладання математичного матеріалу в доступній, для майбутніх фахівців зі спеціальностей соціогуманітарного напрямку, формі та на зрозумілому їм рівні знань, у поєднанні з достатньо високим рівнем математичної строгості, тобто достатньо просто та дохідливо і водночас – сприйнятливо для математичної строгості відповідної математичної дисципліни.

У зв'язку з цим можна згадати про "Лезо Окками" [5] – методологічний принцип, суть якого полягає в тому, що "пояснення будь якого явища тим ближче до істинного, чим на меншій кількості гіпотез воно базується і чим більш широке коло явищ базується на цих гіпотезах". А. Ейнштейн переформулював цей принцип таким чином: "Усе слід спрощувати доти, поки це можливо, але не більш того", тобто при цьому потрібно розуміти різницю між "простотою" та "спрощенням". Згаданий вислів отримав назву "Лезо Ейнштейна". Методологічні принципи "Лезо Окками" і "Лезо Ейнштейна" відповідають і методиці Ньютона, згідно з якою потрібно "пояснити якомога більшу кількість фактів якомога меншою кількістю вхідних положень". Як показує практика, студенти краще засвоюють більш прості пояснення та ті пояснення, які використовують меншу кількість аргументів.

Мета цієї статті полягає в розгляді елементів педагогічної методики, що базується на використанні народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих висловів при викладанні математичних дисциплін. Пропонується при викладанні дисциплін із прикладної математики для досягнення простоти пояснень складних питань використовувати народні прислів'я, афоризми та широковідомі вирази, які відображають суть тих чи інших математичних сутностей (понять, методів, фактів), що викладаються, в дещо іншій, але можливо у простішій і зрозумілішій формі. При цьому також долається ще й такий недолік як "сухість" викладу математичного матеріалу, бо останнє часто породжує пасивність, а згодом і байдужість студентів у їх навчальній діяльності.

Основна частина. Основні елементи педагогічної методики, що базується на використанні народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих виразів видатних особистостей при викладанні математичних дисциплін, можна охарактеризувати так:

а) здійснюється аналіз тих чи інших тем певної навчальної дисципліни, відбираються ті поняття, твердження, методи тощо, які потребують досить складного математичного обґрунтування (пояснення), яке не може бути реалізоване з різних причин у рамках даного курсу (недостатня кількість навчальних годин, недостатня математична підготовка слухачів тощо);

б) проводиться пошук і відбір відповідних народних прислів'їв, афоризмів і широковідомих виразів, з якими слухачка аудиторія або вже знайома, або може їх легко сприйняти;

в) при викладі відповідного навчального матеріалу використовуються ті чи інші крилаті вирази і дається їм відповідне трактування, що тісно пов'язано з навчальним матеріалом дисципліни;

г) слухачі залучаються до обговорення і трактування запропонованих крилатих виразів та пошуку нових еквівалентних їм висловлювань, які дають відповідне пояснення тих математичних понять, що розглядаються під час навчального процесу.