УДК 517.5

Т. Петрова, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ПОТОЧКОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ $r \in (3,4)$

Досліджується питання наближення опуклих функцій із простору Соболєва алгебраїчними поліномами. Побудовано контрприклад, який показує, що для опуклих функцій із простору Соболєва оцінка (1) не виконується.

Вступ. Спочатку введемо основні позначення. Нехай $W^r[0,1]$ клас таких функцій f, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^{r}f\right| \le 1$ майже скрізь, де $D_{0+}^{r-1}f$ – лівостороння дробова похідна [1]. Будемо позначати через Π_n множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\le n$ і через Δ^2 – множину опуклих вниз на $[0,1]$ функцій.

У [5] Gopengauz довів, що для апроксимації без обмежень для всіх $r \in \mathbb{N}$, для кожної функції $f \in W^r[0,1]$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться такий поліном $p_n \in \Pi_n$, що виконується оцінка

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \le c \cdot \frac{1}{n^2}(\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]. \tag{1}$$

DeVore і Yu у [3] поставили питання про те, чи має місце нерівність (1) при $r > 2$ для монотонного наближення. Негативну відповідь на це дали Gonska, Leviatan, Shevchuk, Wenz в [4], довівши теорему для випадку $r > 2, r \in \mathbb{N}$. Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$, в [1] доведено, що оцінка (1) також не виконується. У роботі [2] побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не має місця для класу функцій $W^r[0,1] \bigcap \Delta^2, r \in (2,3)$. Основним результатом цієї статті є теорема про те, що цей результат не можна поширити і на класи $W^r[0,1] \bigcap \Delta^2$ з $r \in (3,4)$.

Основний результат.

Теорема. *Нехай* $r \in (3,4)$. *Тоді для кожного* n *існує така функція* $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2$, *що для кожного полінома* $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^2$ *справедлива одна з таких властивостей:*

$$\text{або } \overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\left|F(x) - p_n(x)\right|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \tag{2}$$

$$\text{або } \overline{\lim_{x\to 1}} \frac{\left|F(x) - p_n(x)\right|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \tag{3}$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (3,4)$ і $m = [r] + 1 = 4$. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^4}{4!} + b^4(x+7) + \dfrac{13b^4}{4}(1+x)^{-2b^{-1}+4} - \dfrac{25}{4}(1-x)^{b^{-1}+4}, 0 \le x \le b, \\ b^4(x+7) + \dfrac{13b^4}{4}(1+x)^{-2b^{-1}+4} - \dfrac{25}{4}(1-x)^{b^{-1}+4}, b < x \le 1, \end{cases} \quad \text{де} \quad b = \frac{1}{468n^2}.$$

Легко бачити, що $f(0) > 0, f(1) \le \dfrac{45b^4}{4}, f'(0) > -\dfrac{b^3}{12}, f'(1) > 0, f''(0) > 0, f''(1) > 0, f'''(0) < 0, f'''(b) < 0, f'''(1) < 0$ і $f^{(4)}(x) > 0$ при $x \in [0,b) \cup (b,1]$.

Оскільки $f^{(4)}(x) > 0$ при $x \in [0,b) \cup (b,1]$, то f''' зростає на кожному із проміжків $[0,b)$ та $(b,1]$, і з огляду на те, що $f'''(0) < 0, f'''(b) < 0$ і $f'''(1) < 0$, то $f'''(x) < 0$ при $x \in [0,1]$. Тоді f'' спадає і нерівності $f'' > 0$ і $f''(1) > 0$ спричиняють $f''(x) > 0, x \in [0,1].$ Отже $f \in W^m[0,1] \bigcap \Delta^2$.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^4 \cdot f(x).$ Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2$. Спочатку покажемо, що $F \in \Delta^2$. Нехай $x \in [b,1].$ Оскільки f' зростає і $f'(b) > 0,$ то $\forall x \in [b,1]: f'(x) \ge 0.$ Тоді, урахувавши, що $f''(x) \ge 0$ і $f(x) \ge 0, x \in [b,1],$ отримаємо $F''(x) = 8x^3 f'(x) + 12x^2 f(x) + x^4 f''(x) \ge 0$.

Нехай $x \in [0,b].$ З огляду на те, що $f'(0) < 0$ і $f'(b) > 0$, маємо $\exists x_0 \in (0,b): f'(x_0) = 0.$ Тоді точка $x = x_0$ є точкою мінімуму функції $f(x).$ Зауважимо, що $\forall x \in [0,b] f(x) \ge b.$ Таким чином отримаємо оцінку

$$F''(x) = 8x^3 f'(x) + 12x^2 f(x) + x^4 f^4(x) > -8x^3 \frac{b^3}{12} + 12x^2 f(x_0) = x^2(-\frac{2}{3}xb^3 + 12f(x_0)) >$$
$$> x^2(-\frac{2}{3}b^4 + 12b^4) = x^2 \frac{34}{3}b^4 \ge 0, x \in [0,b].$$

Ми довели, що $\forall x \in [0,1]: F''(x) \geq 0$. З останньої нерівності випливає, що $F \in \Delta^2$. За теоремою 2.3 із [6] маємо $D_{0+}^r F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \sum_{k=0}^{3} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$ майже скрізь на $[0,1]$.

Оскільки $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0,1,2,3,$ то $D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$ майже скрізь на $[0,1]$. Очевидно, що $\exists c > 0, c \in \mathbb{R}$, така, що $\forall x \in [0,1]: |F^{(4)}(x)| \leq c.$ Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)| = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-3}} = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \frac{x^{4-r}}{4-r} \leq \frac{c}{(4-r)\Gamma(4-r)} .$$

Таким чином, $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$ і при цьому

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

є абсолютно неперервною. Отже $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$.

Нехай існує поліном q_N, який опуклий вниз і для якого умова (2) не виконується. Тоді для деякої сталої B маємо

$$|F(x) - q_N(x)| \leq B\varphi^r(x) \leq Bx^{r/2}, 0 \leq x \leq b .$$

Звідси випливає, що $q_N(0) = F(0) = 0$ і $q'_N(0) = F'(0) = 0$. Тоді поліном q_N має вигляд $q_N(x) = x^2 \cdot h_{N_1}(x),$ де h_{N_1} поліном степеня $\leq N_1, N_1 \leq N$.

Розглянемо поліном $\tilde{q}_N(x) = q_N(x) + f'(0)x + f(0)$. Помітимо, що умова $\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{|f(x) - \tilde{q}_N(x)|}{\varphi^4(x)} = \infty$ не виконується і $\tilde{q}_N(0) = f(0), \tilde{q}'_N(0) = f'(0).$ За нерівністю Маркова маємо

$$\frac{b^3}{18} < \frac{b^3}{12} - 38b^4 = |f'(0)| = |\tilde{q}'_N(0)| \leq 2n^2 \|\tilde{q}_N\| .$$

Очевидно, що $\|\tilde{q}_N\| = \max\{\tilde{q}_N(0), \tilde{q}_N(1)\}$. Нехай $\|\tilde{q}_N\| = \tilde{q}_N(1)$. Тоді

$$\frac{b^3}{18} \leq 2n^2 q_N(1) \quad \text{або} \quad q_N(1) > \frac{b^3}{36n^2} . \tag{4}$$

З іншого боку,

$$f(1) \leq \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} 9bn^2 = \frac{45b^3}{36n^2} 9 \frac{1}{468n^2} n^2 < \frac{45b^3}{36n^2} . \tag{5}$$

Із нерівностей (4) і (5) маємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_N(1)$, більш того, $f(1) < \tilde{q}_N(1).$ Якщо $\|\tilde{q}_N\| = \tilde{q}_N(0)$, то маємо $\tilde{q}_N(1) \leq \tilde{q}_N(0) = f(0) < f(1)$ і також отримуємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_N(1)$. Ми припускаємо, що $\tilde{q}_N(1) > 0,$ бо у протилежному випадку твердження $f(1) \neq \tilde{q}_N(1)$ очевидне. Далі розглянемо $\tilde{q}_N(1) = q_N(1) + f'(0) + f(0)$. Припустимо, що $q_N(1) = f(1)$. Тоді

$$\tilde{q}_N(1) = f(1) + f'(0) + f(0) > f(1) \Leftrightarrow f(0) > -f'(0) \Leftrightarrow \frac{b^3}{12} < 42b^4 .$$

Маємо суперечність. Таким чином $\tilde{q}_N(1) \neq f(1) = F(1)$.

Теорему доведено.

Висновки. У роботі побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не може поширюватися на клас функцій $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r \in (3,4)$.

Список використаних джерел

1. *Петрова Т. О.* Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова // Пр. Інституту математики НАН України "Математика та її застосування. Теорія наближення функцій". – 2005. – № 35. – С. 107–112.
2. *Петрова Т. О.* Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісн. Київ. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2006. – № 4. – С. 113–118.
3. *DeVore R. A.* Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / R. A. DeVore, X. M. Yu // Constr. Approx. – 1985. – № 1. – P.323-331.
4. *Gonska H. H.* Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H. J. Wenz // Constr. Approx. – 2000. – № 16. – P. 603–629.
5. *Gopengauz A. I.* Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A. I. Gopengauz // J. Approx. Theoty. – 1994. – Vol. 77. – P. 31–41.
6. *Samko S. G.* Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev // Sci. Publ. – London, 1987.

Надійшла до редколегії 25.05.17

Т. Петрова, канд. физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

О ПОТОЧЕЧНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ОЦЕНКАХ ВЫПУКЛОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА $r \in (3,4)$

Исследуется вопрос приближения выпуклых функций из пространства Соболева алгебраическими полиномами. Построен контрпример, который показывает, что для выпуклых функций из пространства Соболева оценка (1) не выполняется.

T. Petrova, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON POINTWISE ESTIMATES FOR CONVEX POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF ARBITRARY ORDER $r \in (3,4)$

In this paper the question of approximation of convex function in Sobolev space by convex algebraic polynomial is consider. It is proved, that for convex functions in Sobolev space estimate (1) is not true, generally speaking.

УДК 511.72+517.5+517.13

С. Сербенюк, мол. наук. співроб.
Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: *simon6@ukr.net*

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА В ТЕРМІНАХ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ КАНТОРА

Стаття присвячена вивченню задання раціональних чисел рядами Кантора. Критерій раціональності для випадку довільної послідовності (q_k) сформульовано, деякі його наслідки розглянуто.

Вступ. *Знакододатним рядом Кантора* називається сума вигляду

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{q_1q_2\ldots q_k}+\ldots, \tag{1}$$

де $Q\equiv(q_k)$ – фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, (Θ_k) – послідовність множин $\Theta_k\equiv\{0,1,\ldots,q_k-1\}$, $\varepsilon_k\in\Theta_k$.

Факт запису дійсного числа $x\in[0;1]$ у вигляді розкладу в ряд (1) позначається $x=\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}$ і називається *зображенням числа x знакододатним рядом Кантора* (далі – зображенням).

Уперше поняття представлення чисел знакододатним рядом Кантора зустрічається в опублікованій у 1869 р. статті [1] Георга Кантора. У цій статті він починає досліджувати проблему задання раціональних чисел рядом (1), зокрема, формулює відповідний критерій для випадку періодичної послідовності (q_k). У подальшому задачі знаходження критеріїв зображення раціональних чисел рядом Кантора (1) присвячено чимало праць багатьох учених з різних країн. Зокрема, відмітимо внесок таких учених у дослідженні цієї проблеми, як Diananda P. A., Oppenheim A., Erdös P., Hančl J., Straus E. G., Rucki P., Tijdeman R., Kuhapatanakul P., Laohakosol V., Mance B., Marques D., Pingzhi Yuan.

Зазначимо, що чимало праць [16, 5–8] присвячено дослідженню умов раціональності чи ірраціональності розкладів дійсних чисел у ряд Кантора вигляду (1), для якого послідовності (ε_k), (q_k) є послідовностями цілих чисел (у деяких працях, наприклад, [7, 16, 4, 6, 13] на (q_k) накладається обмеження про те, що для всіх $n\in N$ справджується умова $1<q_k\in Z$), але досить багато статей присвячено дослідженню відповідної задачі як для розглядуваних у цій статті знакододатних рядів Кантора [1, 2, 12, 14], так і для рядів Кантора спеціального вигляду [9–11, 7], зокрема, – рядів Ахмеса [2, 3, 8].

У [2, 4–9, 14, 16] досліджувалися критерії раціональності (ірраціональності) зображення чисел розкладами в ряд Кантора, а в [4, 2, 7, 12, 14, 16] – достатні умови раціональності (ірраціональності). Зокрема, проблему задання раціональних та ірраціональних чисел за певних умов, що накладаються на послідовності (q_k) і (ε_k), розглянуто в [1, 4–7, 12, 14, 16], у той час як результатів дослідження цієї задачі для випадку довільності послідовності (q_k) дуже мало [2, 7, 16].

До результатів інших вчених, найбільш схожих з отриманими в цій статті, можна віднести результати із [12, 6] (результати, подібні до твердження теореми 2 та із [2, 7, 16], в яких фігурує умова $\frac{\varepsilon_k}{q_k-1}=\text{const}$ для всіх n, більших деякого n_0. На особливу увагу заслуговує стаття [2], в якій P. H. Diananda, A. Oppenheim довели такий критерій, формулювання якого є подібним до формулювання теореми 5 цієї статті.

Теорема 1. *Необхідною і достатньою умовою того, що число x, представлене у вигляді розкладу в ряд (1), було раціональним, є існування чисел h,k, де $(h,k)=1$, $0\le h\le k$ та $N\in Z$ таких, що умова $A_i=\frac{h}{k}(B_i-1)$ виконується для всіх $i\ge N$.*

У цій теоремі $x=X=A_0+\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_1B_2}+\ldots+\frac{A_n}{B_1B_2\ldots B_n}+\ldots$, де $A_0=\varepsilon_0$ – ціла частина числа x, $B_1=q_1q_2\ldots q_{i_1}$, $B_2=q_{i_1+1}q_{i_2+1}\ldots q_{i_1+i_2}$, …, $B_i\ge 2$, $0\le A_i\le B_i-1$, $\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_{i_1}}{q_1q_2\ldots q_{i_1}}=\frac{A_1}{B_1}$.

Таким чином, задача формулювання критеріїв зображення раціональних чисел у вигляді розкладів у ряд (1) вважається відкритою з 1869 р. донині. Ця стаття присвячена формулюванню і доведенню критеріїв раціональності для випадку довільної послідовності (q_k).