T. Petrova, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON POINTWISE ESTIMATES FOR CONVEX POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF ARBITRARY ORDER $r \in (3,4)$

In this paper the question of approximation of convex function in Sobolev space by convex algebraic polynomial is consider. It is proved, that for convex functions in Sobolev space estimate (1) is not true, generally speaking.

УДК 511.72+517.5+517.13

С. Сербенюк, мол. наук. співроб.
Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: *simon6@ukr.net*

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА В ТЕРМІНАХ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ КАНТОРА

Стаття присвячена вивченню задання раціональних чисел рядами Кантора. Критерій раціональності для випадку довільної послідовності (q_k) сформульовано, деякі його наслідки розглянуто.

Вступ. *Знакододатним рядом Кантора* називається сума вигляду

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_k}{q_1q_2\ldots q_k}+\ldots, \tag{1}$$

де $Q\equiv(q_k)$ – фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, (Θ_k) – послідовність множин $\Theta_k\equiv\{0,1,\ldots,q_k-1\}$, $\varepsilon_k\in\Theta_k$.

Факт запису дійсного числа $x\in[0;1]$ у вигляді розкладу в ряд (1) позначається $x=\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}$ і називається *зображенням числа x знакододатним рядом Кантора* (далі – зображенням).

Уперше поняття представлення чисел знакододатним рядом Кантора зустрічається в опублікованій у 1869 р. статті [1] Георга Кантора. У цій статті він починає досліджувати проблему задання раціональних чисел рядом (1), зокрема, формулює відповідний критерій для випадку періодичної послідовності (q_k). У подальшому задачі знаходження критеріїв зображення раціональних чисел рядом Кантора (1) присвячено чимало праць багатьох учених з різних країн. Зокрема, відмітимо внесок таких учених у дослідженні цієї проблеми, як Diananda P. A., Oppenheim A., Erdös P., Hančl J., Straus E. G., Rucki P., Tijdeman R., Kuhapatanakul P., Laohakosol V., Mance B., Marques D., Pingzhi Yuan.

Зазначимо, що чимало праць [16, 5–8] присвячено дослідженню умов раціональності чи ірраціональності розкладів дійсних чисел у ряд Кантора вигляду (1), для якого послідовності (ε_k), (q_k) є послідовностями цілих чисел (у деяких працях, наприклад, [7, 16, 4, 6, 13] на (q_k) накладається обмеження про те, що для всіх $n\in N$ справджується умова $1<q_k\in Z$), але досить багато статей присвячено дослідженню відповідної задачі як для розглядуваних у цій статті знакододатних рядів Кантора [1, 2, 12, 14], так і для рядів Кантора спеціального вигляду [9–11, 7], зокрема, – рядів Ахмеса [2, 3, 8].

У [2, 4–9, 14, 16] досліджувалися критерії раціональності (ірраціональності) зображення чисел розкладами в ряд Кантора, а в [4, 2, 7, 12, 14, 16] – достатні умови раціональності (ірраціональності). Зокрема, проблему задання раціональних та ірраціональних чисел за певних умов, що накладаються на послідовності (q_k) і (ε_k), розглянуто в [1, 4–7, 12, 14, 16], у той час як результатів дослідження цієї задачі для випадку довільності послідовності (q_k) дуже мало [2, 7, 16].

До результатів інших вчених, найбільш схожих з отриманими в цій статті, можна віднести результати із [12, 6] (результати, подібні до твердження теореми 2 та із [2, 7, 16], в яких фігурує умова $\frac{\varepsilon_k}{q_k-1}=\mathrm{const}$ для всіх n, більших деякого n_0. На особливу увагу заслуговує стаття [2], в якій P. H. Diananda, A. Oppenheim довели такий критерій, формулювання якого є подібним до формулювання теореми 5 цієї статті.

Теорема 1. *Необхідною і достатньою умовою того, що число x, представлене у вигляді розкладу в ряд (1), було раціональним, є існування чисел h,k, де $(h,k)=1$, $0\le h\le k$ та $N\in Z$ таких, що умова $A_i=\frac{h}{k}(B_i-1)$ виконується для всіх $i\ge N$.*

У цій теоремі $x=X=A_0+\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_1B_2}+\ldots+\frac{A_n}{B_1B_2\ldots B_n}+\ldots$, де $A_0=\varepsilon_0$ – ціла частина числа x, $B_1=q_1q_2\ldots q_{i_1}$, $B_2=q_{i_1+1}q_{i_2+1}\ldots q_{i_1+i_2}$, …, $B_i\ge 2$, $0\le A_i\le B_i-1$, $\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_{i_1}}{q_1q_2\ldots q_{i_1}}=\frac{A_1}{B_1}$.

Таким чином, задача формулювання критеріїв зображення раціональних чисел у вигляді розкладів у ряд (1) вважається відкритою з 1869 р. донині. Ця стаття присвячена формулюванню і доведенню критеріїв раціональності для випадку довільної послідовності (q_k).

Оператор зсуву цифр. *Оператором зсуву цифр представлення числа x знакододатним рядом Кантора (1)* називається відображення σ, для якого виконується рівність:

$$\sigma(x)=\sigma\left(\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_k\ldots}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{q_2q_3\ldots q_k}\equiv q_1\Delta^{Q}_{0\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n\ldots}.$$

Зауважимо, що n-кратне застосування оператора σ до числа x веде до оператора σ^n, для якого

$$\sigma^n(x)=\sigma^n\left(\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{q_{n+1}q_{n+2}\ldots q_k}\equiv q_1q_2\ldots q_n\Delta^{Q}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\ldots}. \quad (2)$$

З останнього слідує, що

$$x=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{q_1q_2\ldots q_i}+\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n}\sigma^n(x). \quad (3)$$

Детально поняття оператора зсуву вивчено в [15] для випадку знакозмінного ряду Кантора.

Критерій існування двох різних зображень раціонального числа. У цьому пункті йтиметься про задання чисел спеціального вигляду, а саме – чисел, які мають скінченне зображення рядом (1). Такі числа мають два різні зображення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{q_1q_2\ldots q_i}\equiv\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m000\ldots}=\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}[\varepsilon_m-1][q_{m+1}-1][q_{m+2}-1]\ldots}.$$

Теорема 2. *Раціональне число $\frac{p}{r}\in(0;1)$ має два різні зображення тоді й тільки тоді, коли існує такий номер n_0, що $q_1q_2\ldots q_{n_0}\vdots r$.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай

$$\frac{p}{r}=\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n-1}}{q_1q_2\ldots q_{n-1}}+\frac{\varepsilon_n}{q_1q_2\ldots q_n}=\frac{\varepsilon_1q_2q_3q_n+\varepsilon_2q_3\ldots q_n+\ldots+\varepsilon_{n-1}q_n+\varepsilon_n}{q_1q_2\ldots q_n},$$

тоді

$$\varepsilon_n=\frac{pq_1q_2\ldots q_n-r\left(\varepsilon_1q_2q_3\ldots q_n+\varepsilon_2q_3q_4\ldots q_n+\ldots+\varepsilon_{n-1}q_n\right)}{r}.$$

Оскільки в останній рівності $\varepsilon_n\in N$, то вираз у правій частині також є натуральним числом. Ураховуючи, що $(p,r)=1$, отримуємо $q_1q_2\ldots q_n\vdots r$.

Достатність. Нехай $(p,r)=1$, $p<r$, та існує такий номер n_0, що $q_1q_2\ldots q_{n_0}\vdots r$. Тоді

$$\frac{p}{r}=\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n_0}}{q_1q_2\ldots q_{n_0}}+\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{q_1\ldots q_{n_0}q_{n_0+1}}+\ldots=\sum_{i=1}^{n_0}\frac{\varepsilon_i}{q_1q_2\ldots q_i}+t_{n_0},$$

де t_{n_0} – залишок ряду,

$$\frac{p}{r}=\frac{\varepsilon_1q_2q_3\ldots q_{n_0}+\varepsilon_2q_3\ldots q_{n_0}+\ldots+\varepsilon_{n_0}}{q_1q_2\ldots q_{n_0}}+t_{n_0}.$$

Позначивши $\theta=\frac{q_1q_2\ldots q_{n_0}}{r}$, отримаємо $p\theta=\left(\varepsilon_1q_2q_3\ldots q_{n_0}+\varepsilon_2q_3\ldots q_{n_0}+\ldots+\varepsilon_{n_0}\right)+q_1q_2\ldots q_{n_0}t_{n_0}$. Оскільки ліва частина останньої рівності є натуральним числом, то і права частина також натуральне число. Звідси слідує, що $q_1q_2\ldots q_{n_0}t_{n_0}=0$ або $q_1q_2\ldots q_{n_0}t_{n_0}=1$. Тобто, $x=\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n_0-1}\varepsilon_{n_0}000\ldots}$ у першому випадку і $x=\Delta^{Q}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n_0-1}[\varepsilon_{n_0}-1][q_{n_0+1}-1][q_{n_0+2}-1]\ldots}$ у другому. Теорему доведено.

Критерій раціональності. Основним результатом цієї статті є таке твердження.

Теорема 3. *Число x, представлене у вигляді розкладу в ряд (1), є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують такі $n\in Z_0$, $m\in N$, що виконується є рівність $\sigma^n(x)=\sigma^{n+m}(x)$.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай маємо раціональне число $x=\frac{u}{v}$, де $u<v$, $(u,v)=1$. Розглянемо послідовність $\left(\sigma^n(x)\right)$, що породжена оператором зсуву цифр представлення (1) числа x:

$$\sigma^0(x)=x,$$
$$\sigma(x)=q_1x-\varepsilon_1,$$
$$\sigma^2(x)=q_2\sigma(x)-\varepsilon_2=q_1q_2x-q_2\varepsilon_1-\varepsilon_2,\quad \ldots,$$
$$\sigma^n(x)=q_n\sigma^{n-1}(x)-\varepsilon_n=x\prod_{i=1}^{n}q_i-\left(\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_jq_{j+1}q_{j+2}\ldots q_n\right)-\varepsilon_n,\ \ldots.$$

Із (3) слідує рівність

$$\sigma^n(x)=\frac{uq_1q_2...q_n-v\left(\varepsilon_1q_2q_3...q_n+\varepsilon_2q_3...q_n+...+\varepsilon_{n-1}q_n+\varepsilon_n\right)}{v}=\frac{u_n}{v}. \quad (4)$$

Оскільки $v=\mathrm{const}$ та при $n\to\infty$ справджується умова $0<\frac{u_n}{v}<1$, то $u_n\in\{0,1,...,v-1\}$. Отже, існує таке $m\in N$, що $u_n=u_{n+m}$. Більше того, існує така підпослідовність (n_k) натуральних чисел, що $u_{n_k}=\mathrm{const}$ для всіх $k\in N$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують такі $n\in Z_0$, $m\in N$, що $\sigma^n(x)=\sigma^{n+m}(x)$. Тоді із (2) отримуємо

$$x\equiv\Delta^Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n 000...}+\frac{q_{n+1}...q_{n+m}}{q_{n+1}...q_{n+m}-1}\Delta^Q_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+m}000...}.$$

Таким чином, можна сформулювати таке твердження.

Лема 1. *Якщо існують такі $n\in Z_0$, $m\in N$, що $\sigma^n(x)=\sigma^{n+m}(x)$, то число x є раціональним і виконується рівність*

$$\sigma^n(x)=\frac{q_1q_2...q_nq_{n+1}...q_{n+m}}{q_{n+1}...q_{n+m}-1}\Delta^Q_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+m}000...}.$$

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Число x, представлене у вигляді розкладу в ряд (1), є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують такі $n\in Z_0$, $m\in N$, що виконується рівність*

$$\Delta^Q_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...}=q_{n+1}...q_{n+m}\Delta^Q_{\underbrace{0...0}_{n+m}\varepsilon_{n+m+1}\varepsilon_{n+m+2}...}.$$

Твердження теорем 3 і 4 є еквівалентними.

Деякі наслідки. Розглянемо простий випадок умови $\sigma^n(x)=\sigma^{n+m}(x)$, коли $\sigma^n(x)=\mathrm{const}$ для всіх $n\in Z_0$. Остання умова може справджуватися і для чисел x, відмінних від 0 та 1. Наприклад,

$$x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{3}{3\cdot5\cdot7}+...+\frac{n}{3\cdot5\cdot...\cdot(2n+1)}+...=\sigma^n(x)=\frac{1}{2}.$$

Сформулюємо критерій виконання умови $\sigma^n(x)=\mathrm{const}$.

Лема 2. *Якщо $\sigma^n(x)=x$ для всіх $x\in N$, то* $\frac{\varepsilon_n}{q_n-1}=\mathrm{const}=x$.

Доведення. Нехай $\sigma^n(x)=\sigma^{n+1}(x)=\mathrm{const}$. Тоді $\sigma^n(x)=q_{n+1}\sigma^n(x)-\varepsilon_{n+1}$. Звідки

$$\sigma^n(x)=\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}-1}=\mathrm{const}. \quad (5)$$

Тобто, $x=\frac{\varepsilon_1}{q_1-1}=\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1(q_2-1)}=\frac{\varepsilon_1}{q_1}+\frac{\varepsilon_2}{q_1q_2}+\frac{\varepsilon_3}{q_1q_2(q_3-1)}=...=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_i}{q_1...q_i}+\frac{\varepsilon_n}{q_1...q_{n-1}(q_n-1)}=....$

Лему доведено.

Зауваження 1. Якщо $\sigma^n(x)=\mathrm{const}$ для всіх $n\ge n_0$, де n_0 – фіксоване натуральне число, то з (3) слідує, що умова $\frac{\varepsilon_n}{q_n-1}=\mathrm{const}$ виконується для всіх $n>n_0$. Крім того $x=\sum_{i=1}^{n_0}\frac{\varepsilon_i}{q_1q_2...q_i}+\frac{1}{q_1q_2...q_{n_0}}\cdot\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{q_{n_0+1}-1}$.

Лема 3. *Нехай n_0 – фіксоване натуральне число. Умова $\sigma^n(x)=\mathrm{const}$ виконується для всіх $n\ge n_0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\varepsilon_n}{q_n-1}=\mathrm{const}$ для всіх $n>n_0$.*

Доведення. *Необхідність* випливає з останньої леми.

Достатність. Нехай для всіх $n>n_0$ маємо $\mathrm{const}=p=\frac{\varepsilon_n}{q_n-1}=\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}-1}=...=\frac{\varepsilon_{n+i}}{q_{n+i}-1}=...$ Тоді, скориставшись рівністю $\frac{\varepsilon_n}{q_n}=\frac{\varepsilon_n}{q_n-1}-\frac{\varepsilon_n}{q_n(q_n-1)}$, отримаємо

$$\sigma^n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{q_{n+1}...q_i}=\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}-1}-\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}(q_{n+1}-1)}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\varepsilon_{n+i+1}}{q_{n+i+1}-1}-\frac{\varepsilon_{n+i+1}}{q_{n+i+1}(q_{n+i+1}-1)}\right)\prod_{j=n+1}^{n+i}\frac{1}{q_j}\right)=$$

$$=p\left(1-\frac{1}{q_{n+1}}\right)+p\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{q_{n+i+1}}\right)\prod_{j=n+1}^{n+i}\frac{1}{q_j}\right)=p.$$

Лему доведено.

Очевидним наслідком наведених вище міркувань є таке твердження.

Твердження 1. *Множина* $\left\{x:\sigma^n\left(x\right)=x\forall n\in N, x=\Delta^Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}\right\}$ *є скінченною множиною порядку* $\min\limits_n q_n$, *причому* $x=\dfrac{\varepsilon}{q-1}$, *де* $q=\min\limits_n q_n$ *та* $\varepsilon\in\left\{0,1,\ldots,q-1\right\}$.

Далі покажемо, що можна доволі легко обчислити значення елементів послідовності $\left(\varepsilon_k\right)$ цифр числа $x=\Delta^Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}$, яке має властивість $\sigma^n\left(x\right)=x$ для $n=1,2,\ldots$

Лема 4. *Нехай маємо* $q=\min\limits_n q_n$ *та фіксоване* $\varepsilon\in\left\{0,1,\ldots,q-1\right\}$. *Умова* $\sigma^n\left(x\right)=x=\dfrac{\varepsilon}{q-1}$ *виконується тоді і тільки тоді, коли для зображення числа* x *знакододатним рядом Кантора справедлива умова* $\dfrac{q_n-1}{q-1}\varepsilon=\varepsilon_n\in Z_0$ *для всіх* $n\in N$.

Доведення. *Необхідність* випливає із твердження 1 і рівності (5).

Достатність. Справді, нехай $\varepsilon_n=\dfrac{q_n-1}{q-1}\varepsilon$, тоді $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\frac{q_n-1}{q-1}\varepsilon}{q_1q_2\ldots q_n}=\dfrac{\varepsilon}{q-1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q_n-1}{q_1q_2\ldots q_n}=\dfrac{\varepsilon}{q-1}$.

Лему доведено.

Наслідок 1. *Нехай* n_0 *– фіксоване натуральне число і* $q_0=\min\limits_{n>n_0} q_n$, ε_0 *– чисельник звичайного дробу* $\dfrac{\varepsilon_{n_0+k}}{q_1q_2\ldots q_{n_0}q_{n_0+1}\ldots q_{n_0+k}}$ *в розкладі числа* x *у знакододатний ряд Кантора за умови, що* $q_{n_0+k}=q_0$.

Рівність $\sigma^n\left(x\right)=\mathrm{const}$ *виконується для всіх* $n\geq n_0$ *тоді і тільки тоді, коли для кожного* $n>n_0$ *виконується умова* $\dfrac{q_n-1}{q_0-1}\varepsilon_0=\varepsilon_n\in Z_0$.

Повернемося до рівностей (4). Розглянемо питання про існування послідовності $\left(n_k\right)$ такої, що $u_{n_k}=\mathrm{const}$ для всіх $k\in N$ у (4). Нехай у розкладі раціонального числа $x\in\left[0;1\right]$ існує послідовність $\left(n_k\right)$ така, що $\sigma^{n_k}\left(x\right)=\mathrm{const}$. Останню умову можна записати таким чином:

$$\mathrm{const}=\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{q_{n_1+1}\ldots q_i}=\sum_{i=n_2+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{q_{n_2+1}\ldots q_i}=\ldots=\sum_{i=n_k+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{q_{n_k+1}\ldots q_i}=\ldots$$

Очевидно, можна звести ряд Кантора (1) до ряду Кантора, для якого умова $\sigma^{n_k}\left(x\right)=\mathrm{const}$ еквівалентна умові $\sigma^k\left(x\right)=\mathrm{const}, k=0,1,\ldots$ Тобто,

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{q_1q_2\ldots q_k}=\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\varepsilon_j}{q_1q_2\ldots q_j}+\frac{1}{q_1\ldots q_{n_1}}x',$$

$$x'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{n_k+1}q_{n_k+2}q_{n_k+3}\ldots q_{n_{k+1}}+\varepsilon_{n_k+2}q_{n_k+3}\ldots q_{n_{k+1}}+\ldots+\varepsilon_{n_{k+1}-1}q_{n_{k+1}}+\varepsilon_{n_{k+1}}}{\left(q_{n_1+1}\ldots q_{n_2}\right)\left(q_{n_2+1}\ldots q_{n_3}\right)\ldots\left(q_{n_k+1}\ldots q_{n_{k+1}}\right)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\left(\mu_1+1\right)\ldots\left(\mu_k+1\right)}. \qquad (6)$$

Саме для ряду Кантора (6) і виконується умова $\sigma^k\left(x'\right)=\mathrm{const}$ для всіх $k=0,1,\ldots$

Підсумовуючи отримані результати, сформулюємо таке твердження.

Теорема 5. *Число* x, *представлене у вигляді розкладу в ряд Кантора (1), є раціональним тоді і тільки тоді, коли існує така підпослідовність* $\left(n_k\right)$ *натуральних чисел, що для всіх* $k=1,2,\ldots$ *виконуються умови:*

1. $\dfrac{\lambda_k}{\mu_k}=\dfrac{\varepsilon_{n_k+1}q_{n_k+2}\ldots q_{n_{k+1}}+\varepsilon_{n_k+2}q_{n_k+3}\ldots q_{n_{k+1}}+\ldots+\varepsilon_{n_{k+1}-1}q_{n_{k+1}}+\varepsilon_{n_{k+1}}}{q_{n_k+1}q_{n_k+2}\ldots q_{n_{k+1}}-1}=\mathrm{const};$

2. $\lambda_k=\dfrac{\mu_k}{\mu}\lambda$, *де* $\mu=\min\limits_{k\in N}\mu_k$ *та* λ *– число в чисельнику звичайного дробу із суми (6), знаменник якого дорівнює* $\left(\mu_1+1\right)\left(\mu_2+2\right)\ldots\left(\mu+1\right)$.

Нехай існують такі $n\in Z_0$, $m\in N$, що виконується теорема 2. Тоді

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{q_1q_2\ldots q_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{q_1q_2\ldots q_i}+\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_1q_2\ldots q_{n+1}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n+m}}{q_1q_2\ldots q_nq_{n+1}\ldots q_{n+m}}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{n+m+j}}{q_1q_2\ldots q_{n+m+j}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{q_1q_2\ldots q_i}+\frac{\varepsilon_{n+1}q_{n+2}\ldots q_{n+m}+\ldots+\varepsilon_{n+m-1}q_{n+m}+\varepsilon_{n+m}}{q_1q_2\ldots q_n\left(q_{n+1}q_{n+2}\ldots q_{n+m}\right)}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{n+m+j}}{q_1q_2\ldots q_{n+m+j}}.$$

Для заданого початкового ряду (у першому рядку) справджується рівність $\sigma^n(x)=\sigma^{n+m}(x)$, водночас для останнього ряду (у другому рядку) виконується умова $\sigma^n(x)=\sigma^{n+1}(x)$. Із теореми 3 слідує, що

$$\sigma^n(x)=\sigma^{n+m}(x)=\frac{\varepsilon_{n+1}q_{n+2}...q_{n+m}+...+\varepsilon_{n+m-1}q_{n+m}+\varepsilon_{n+m}}{q_{n+1}q_{n+2}...q_{n+m}-1}.$$

Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 6. *Якщо число x, представлене у вигляді розкладу в ряд Кантора (1), є раціональним ($x=\frac{u}{v}$), то існують такі $n\in Z_0$, $m\in N$, що $q_1q_2...q_n(q_{n+1}q_{n+2}...q_{n+m}-1)\vdots v$.*

Висновки. У цій статті наведено критерій володіння раціональним числом двома різними зображеннями знакододатним рядом Кантора. Достатня умова була доведена Г. Кантором, але мала більш громіздке доведення й інше формулювання.

Доведено критерій раціональності чисел, представлених у термінах знакододатних рядів Кантора. У доведенні цієї теореми та її наслідків використовується поняття оператора зсуву цифр представлення числа знакододатним рядом Кантора. Цей оператор неявно фігурував у спробах різних учених сформулювати критерій раціональності, але чіткого результату для ряду (1) у випадку довільної послідовності (q_k) у цих роботах так і не отримано.

Список використаних джерел

1. *Cantor G.* Ueber die einfachen Zahlensysteme / G. Cantor // Z. Math. Phys. – 1869. – Bd. 14. – S. 121–128.
2. *Diananda P. A.* Criteria for irrationality of certain classes of numbers II / P. H. Diananda, A. Oppenheim // Amer. Math. Monthly. – 1955. – 62, № 4. – P. 222–225.
3. *Erdös P.* On the irrationality of certain Ahmes series / P. Erdös, E. G. Straus // J. Indian. Math. Soc. – 1968. – 27. – P. 129–133.
4. *Erdös P.* On the irrationality of certain series / P. Erdös, E. G. Straus // Pacific J. Math. – 1974. – 55. – № 1. – P. 85–92.
5. *Hančl J.* A note to the rationality of infinite series I / J. Hančl // Acta Math. Inf. Univ. Ostr. – 1997. – 5. – № 1. – P. 5–11.
6. *Hančl J.* A note on a paper of Oppenheim and Šalát concerning series of Cantor type / J. Hančl // Acta Math. Inf. Univ. Ostr. – 2002. – 10. – P. 35–41.
7. *Hančl J.* On the irrationality of Cantor series / J. Hančl, R. Tijdeman // J. Reine Angew. Math. – 2004. – 571. – P. 145–158.
8. *Hančl J.* On the irrationality of Cantor and Ahmes series / J. Hančl, R. Tijdeman // Publ. Math. Debrecen. – 2004. – 65. – № 3–4. – P. 371–380.
9. *Hančl J.* On the irrationality of factorial series / J. Hančl, R. Tijdeman // Acta Arith. – 2005. – 118. – P. 383–401.
10. *Hančl J.* On the irrationality of factorial series III / J. Hančl, R. Tijdeman // Indag. Mathem., N. S. – 2009. – 20. – № 4. – P. 537–549.
11. *Hančl J.* On the irrationality of factorial series II / J. Hančl, R. Tijdeman // J. Number Theory. – 2010. – 130. – № 3. – P. 595–607.
12. *Kuhapatanakul P.* Irrationality of some series with rational terms / P. Kuhapatanakul, V. Laohakosol // Kasetsart J. (Natural Science). – 2001. – 35. – P. 205–209.
13. *Mance B.* Normal numbers with respect to the Cantor series expansion / B. Mance. – Dissertation. – The Ohio State University, 2010. – 290 p.
14. *Oppenheim A.* Criteria for irrationality of certain classes of numbers / A. Oppenheim // Amer. Math. Monthly. –1954. – 61. – № 4. – P. 235–241.
15. *Serbenyuk S.* Representation of real numbers by the alternating Cantor series / S. Serbenyuk // arXiv:1602.00743v1. Режим доступу : http://arxiv.org/pdf/1602.00743v1.pdf
16. *Tijdeman R.* On the rationality of Cantor and Ahmes series / R. Tijdeman, Yuan Pingzhi // Indag. Math. (Natural Science). – 2002. – 13. – № 3. – P. 407–418.

Надійшла до редколегії 29.10.16

С. Сербенюк, мл. науч. сотр.
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ТЕРМИНАХ ЗНАКОПОЗИТИВНЫХ РЯДОВ КАНТОРА

Статья посвящена изучению представления рациональных чисел рядами Кантора. Критерий рациональности для случая произвольной последовательности (q_k) сформулирован, некоторые его следствия рассмотрены.

S. Serbenyuk, junior researcher
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

RATIONAL NUMBERS IN TERMS OF POSITIVE CANTOR SERIES

The article is devoted to the investigation of representation of rational numbers by Cantor series. Criteria of rationality are formulated for the case of an arbitrary sequence (q_k) and some its corollaries are considered.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський
E-mail: *gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua*

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРІ З ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною.

Вступ. Різноманітні прикладні задачі сучасної теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових і початково-крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не лише в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й у неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7, 14].