

Покладемо $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{v_n(H^*)}{np}}$. Тоді $P\{|S_n - \kappa(H)| \geq \varepsilon_n\} \leq p$, звідки

$$P\{|S_n - \kappa(H)| < \varepsilon_n\} = P\{S_n - \varepsilon_n < \kappa(H) < S_n + \varepsilon_n\} = P\{\beta(S_n - \varepsilon_n) < H < \beta(S_n + \varepsilon_n)\} \geq 1 - p,$$

тобто (a_n, b_n) – довірчий інтервал для параметра Хюрста H із рівнем довіри $1 - p$. Теорему доведено.

Висновки. У цій статті за спостереженнями випадкових величин η_k , $k \geq 0$, у моделі реальних вимірювань побудовано консистентну оцінку параметра Хюрста дробового броунівського руху та неасимптотичний довірчий інтервал (a_n, b_n) для цієї оцінки.

Список використаних джерел

1. Гельфанд И. М. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции. Вып. 4. / И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры. – 1961. – 471 с.
2. Ибрагимов И. А. Гауссовские случайные процессы / И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1970.
3. Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків / О. Г. Кукуш, І. А. Ліхтарьов, С. В. Масюк та ін. – К.: ДІА. – 2015.
4. Курченко О.О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху / О. О. Курченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 88–96.
5. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории / Дж. Ламперти. – К.: Вища шк., 1983.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969, 608 с.
7. Breton J. – C. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion / J. Breton // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
8. Kurchenko O. O. Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM / O. O. Kurchenko // Theory of Stochastic Processes. – 2002. – Vol. 8 (24). – P. 242–248.
9. Prakasa Rao B. L. S. Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes / Rao B. L. S. Prakasa. – John Wiley, Chichester, UK. – 2010.

Надійшла до редколегії 26.09.16

Н. Аюбова, асп., А. Курченко, д-р физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Получена консистентная оценка параметра Хюрста дробного броуновского движения в модели реальных измерений. Построены неасимптотические доверительные интервалы.

N. Aiubova, PhD graduate, O. Kurchenko, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ESTIMATION OF HURST PARAMETER OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION IN MODEL OF REAL OBSERVATION

Consistent estimation of Hurst parameter of fractional Brownian motion in model of real observations is obtained. Nonasymptotic confidence intervals are built.

УДК 539.3: 537.226.86:534.1

О. Безверхий, д-р физ.-мат. наук
Национальный транспортный университет, Київ,
Л. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАНУ, Київ
E-mail: o_bezver@ukr.net, l_grigoryeva@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛІЗМУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРІВ

Система рівнянь електропружності в циліндричній системі координат із застосуванням різницевої апроксимації по поздовжній координаті перетворюється до канонічної системи рівнянь гамільтонового типу відносно радіальної координати. Для інтегрування отриманої крайової задачі застосовується метод дискретної ортогоналізації. Розвинута методика використовується для порівняння гармонічних коливань циліндрів різної довжини, визначення їх резонансних частот, дослідження форм коливань.

Вступ. П'єзокерамічні тіла циліндричної форми широко застосовуються в технічних пристроях для перетворення електричного сигналу на механічний і навпаки, тобто як випромінювачі звуку (ультразвуку) та отримувачі сигналу. Звукові сигнали зазвичай виникають унаслідок навантаження елемента електричним сигналом, що змінюється за гармонічним законом. Максимальна амплітуда коливань (потужність сигналу) виникає на резонансних режимах роботи. У зв'язку з цим виникає необхідність у побудові надійного методу дослідження вимушених коливань п'єзоелементів циліндричної форми для визначення резонансних частот та форм вимушених коливань.

У цій роботі на основі гамільтонового формалізму [2, 3] досліджено гармонічні осесиметричні коливання п'єзокерамічних радіально поляризованих циліндрів обмеженої довжини при електричному навантаженні. Гамільтонів формалізм зіграв істотну роль для глибшого розуміння як математичної структури задач механіки, так і їх фізичного змісту, урахувавши задачі механіки спряжених полів. Застосування гамільтонового формалізму до задач електропружності

проводилось у [5, 8]. У [8] система рівнянь гамільтонового типу застосовувалась для дослідження товщинних коливань п'єзокерамічних тіл із викривленими поверхнями. У [5] пропонується підхід до дослідження усталених коливань п'єзокерамічних циліндрів необмеженої довжини за допомогою процедури розділення змінних та визначено кількість резонансних частот на нижчих модах. У роботі [7] запропоновано наближений метод дослідження осесиметричних вільних коливань однорідних та шаруватих циліндрів на основі методу Рітца з елементами ряду Фур'є як апроксимуючих функцій.

Перевага цього підходу порівняно, скажімо, із варіаційно-різницевим методом [6] полягає в меншій кількості змінних та меншому порядку матриць, що обертаються. Для розв'язання задачі вздовж радіальної координати застосовано метод дискретної ортогоналізації та метод Рунге – Кутти четвертого порядку, тоді як різницеві апроксимації [8] мають лише другий порядок. Ураховуючи зазначене вище, у [1] запропоновано варіаційно-сплайновий метод, який використовувався для тестування запропонованого в роботі методу.

Постановка задачі. Зв'язана система рівнянь електропружності описана в класичній літературі [4, 6]. Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань, $(f(r, z, t) = \text{Re } f^a(r, z) \exp i\omega t)$ у циліндричних координатах при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a = 0, \quad (1)$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r D_r^a}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі r п'єзокераміки

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^a &= c_{11}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \quad \sigma_{zz}^a = c_{21}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\ \sigma_{rr}^a &= c_{31}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{31}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \quad \sigma_{zr}^a = c_{44}^E \left(\frac{\partial u_r^a}{\partial z} + \frac{\partial u_z^a}{\partial r} \right) + e_{42} \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \quad D_z^a = e_{42} \left(\frac{\partial u_z^a}{\partial r} + \frac{\partial u_r^a}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \\ D_r^a &= e_{31} \left(\frac{u_r^a}{r} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial u_r^a}{\partial r} - \varepsilon_{33}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система рівнянь доповнюється граничними умовами для механічних та електричних величин на граничній поверхні S :

$$u_S = u_S \nu \sigma_n = \sigma_n, \quad (4)$$

$$\varphi = \varphi \nu D_n = D_n. \quad (5)$$

Далі верхні індекси "a", "E" і "K" опускатимемо.

Розв'язувальна система рівнянь за типом гамільтонової. Зведемо систему рівнянь (1)–(3) до операторної системи диференціальних рівнянь по радіальній координаті відносно функцій $\bar{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$, $\bar{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$, $\bar{D}_r = rD_r$, u_r , u_z , φ [1]. Після необхідних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right) u_r + (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{r c_{44}^E} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} = -\frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} - \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{u_r}{r} - \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r}, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} &= -\left(c_{12} - \frac{c_{13} c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(c_{11} - \frac{c_{13} c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial z} - \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial z} - \rho \omega^2 r u_z^a, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_r}{r} + \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут використано позначення

$$c_{j3}^* = c_{j3} + e_{j3} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}, \quad e_{j3}^* = e_{j3} - c_{j3} \frac{e_{33}}{c_{33}}, \quad j = 1, 3; \quad \varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11} + \frac{e_{42}^2}{c_{44}}, \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}.$$

Величини $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , D_z , які не увійшли до системи (6), визначаються через основні функції σ_{rr} , u_z , D_r , u_r , σ_{rz} , φ формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{c_{13}}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ D_z &= \frac{e_{42}}{c_{44}} \sigma_{zr} - \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обчислення виконують у безрозмірних змінних

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}, \quad \bar{\rho} = 1, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{33}}, \\ \bar{\sigma}_{rr} &= \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{c_{33}}, \quad \bar{\sigma}_{rz} = \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{R c_{33}}, \quad \bar{D}_r = \frac{\bar{D}_r}{R \sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{R \sqrt{\varepsilon_{33}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

При "обезрозміренні" (8) вигляд рівнянь (6), (7) не зміниться. Надалі знаки безрозмірності будемо опускати.

Система диференціальних рівнянь із частинними похідними (6) не може розв'язуватись аналітично, у зв'язку з чим виникає необхідність застосування певних загальноприйнятих методів зниження розмірності задачі з подальшим застосуванням числових методів: розклад у ряди по зайвих просторових змінних (степеневі, тригонометричні), застосування методів операційного числення (перетворення Лапласа, Фур'є) із застосуванням чисельних обернених перетворень, апроксимації похідних наближеними виразами. Усі ці методи призводять до значного зростання кількості змінних за рахунок кількості членів ряду, що розглядаються, або кількості точок розбиття, і потребують дослідження збіжності та стійкості розв'язку.

У нашому випадку приведемо розв'язувальну систему (6) до системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою різницевих апроксимацій по осевій координаті.

Розглянемо п'єзокерамічний циліндр $r_0 < r < r_1$, $0 < z < L$. Уведемо розбиття відрізка $(0, L)$ по осі z на інтервали точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ і у формулах (6) апроксимуємо похідні по z скінченними різницями. У результаті одержимо систему bn звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}_{rr,i}}{dr} &= \left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right) u_{r,i} + (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} - \frac{e_{13}^* \bar{D}_{r,i}}{\varepsilon_{33}^* r} + \frac{c_{13}^* \bar{\sigma}_{rr,i}}{c_{33}^* r} - \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z}, \\ \frac{du_{z,i}}{dr} &= \frac{\bar{\sigma}_{rz,i}}{r c_{44}} - \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} - \frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta z}, \\ \frac{d\bar{D}_{r,i}}{dr} &= -\frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z} + \varepsilon_{11}^* r \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta z^2}, \quad \frac{du_{r,i}}{dr} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r}, \\ \frac{d\bar{\sigma}_{rz,i}}{dr} &= -(c_{12} - \frac{c_{13}^* c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} - (c_{11}^E - \frac{c_{13}^* c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) r \frac{u_{z,i+1} - 2u_{z,i} + u_{z,i-1}}{\Delta z^2} + \\ &+ \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i+1} - \bar{D}_{r,i-1}}{2\Delta z} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i+1} - \bar{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta z} - \rho \omega^2 r u_{z,i}, \\ \frac{d\varphi_i}{dr} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Для зведення системи (9) до вигляду канонічних рівнянь Гамільтона необхідно розділити змінні на групи p_i, q_i та звести систему до вигляду

$$q_i' = R_{ik}(\xi) q_k + Q_{ik}(\xi) p_k, \quad p_i' = -P_{ik}(\xi) q_k - R_{ki}(\xi) p_k. \quad (10)$$

При цьому функція Гамільтона матиме вигляд

$$H = \frac{1}{2} (P_{ik} q_i q_k + 2R_{ik} p_i q_k + Q_{ik} p_i p_k). \quad (11)$$

Нехай

$$q_i = -\bar{\sigma}_{rr,i}, \quad q_{n+i} = u_{z,i}, \quad q_{2n+i} = -D_{r,i}, \quad p_i = u_{r,i}, \quad p_{n+i} = \sigma_{rz,i}, \quad p_{2n+i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Тоді з (9) маємо матриці R, Q, P , що відповідають (10), (11)

$$\begin{aligned} Q_{ii} &= -\left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right), \quad Q_{i,n+i+1} = \frac{1}{2\Delta z}, \quad Q_{i,n+i-1} = \frac{-1}{2\Delta z}, \quad Q_{n+i,n+i} = \frac{1}{r c_{44}}, \\ Q_{n+i,i+1} &= -\frac{1}{2\Delta z}, \quad Q_{n+i,i-1} = \frac{1}{2\Delta z}, \quad Q_{n+i,2n+i+1} = -\frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \quad Q_{n+i,2n+i-1} = \frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \quad Q_{2n+i,n+i+1} = \frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \\ Q_{2n+i,n+i-1} &= \frac{-e_{42}}{2\Delta z c_{44}}, \quad Q_{2n+i,2n+i+1} = \frac{-\varepsilon_{11}^* r}{\Delta z^2}, \quad Q_{2n+i,2n+i} = 2 \frac{\varepsilon_{11}^* r}{\Delta z^2}, \quad Q_{2n+i,2n+i-1} = \frac{-\varepsilon_{11}^* r}{\Delta z^2}, \\ R_{i,i} &= \frac{c_{13}^*}{r c_{33}^*}, \quad R_{i,n+i+1} = \frac{-1}{2\Delta z} (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}), \quad R_{i,n+i-1} = \frac{1}{2\Delta z} (c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}), \quad R_{i,2n+i} = R_{2n+i,i} = -\frac{e_{13}^*}{r \varepsilon_{33}^*}, \\ R_{n+i,i-1} &= -(c_{12} - \frac{c_{13}^* c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{1}{2\Delta z}, \quad R_{n+i,i+1} = (c_{12} - \frac{c_{13}^* c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) \frac{1}{2\Delta z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{i,i} &= -\frac{1}{rc_{33}^*}, & P_{i,n+i+1} &= \frac{c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, & P_{i,n+i-1} &= -\frac{c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, & P_{i,2n+i} &= P_{2n+i,i} = \frac{e_{33}^*}{re_{33}c_{33}^*}, \\
 P_{n+i,n+i+1} &= P_{n+i,n+i-1} = \left(c_{11} - \frac{c_{13}^*c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}^*e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}\right) \frac{r}{\Delta z^2}, & P_{n+i,n+i} &= -2\left(c_{11} - \frac{c_{13}^*c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31}^*e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}\right) \frac{r}{\Delta z^2} + \rho\omega^2 r, \\
 P_{n+i,2n+i+1} &= \frac{e_{13}^*}{2\Delta z \varepsilon_{33}^*}, & P_{n+i,2n+i-1} &= -\frac{e_{13}^*}{2\Delta z \varepsilon_{33}^*}, & P_{n+i,i+1} &= \frac{-c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, & P_{n+i,i-1} &= \frac{c_{13}^*}{2\Delta z c_{33}^*}, \\
 P_{2n+i,2n+i} &= \frac{-c_{33}^*}{re_{33}c_{33}^*}, & P_{2n+i,n+i+1} &= -\frac{e_{13}^*}{2\Delta z \varepsilon_{33}^*}, & P_{2n+i,n+i-1} &= \frac{e_{13}^*}{2\Delta z \varepsilon_{33}^*}. & i &= 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Матриці (13) мають симетричну блочну структуру, зручну для обчислювального процесу.

Таким чином отримано канонічну систему рівнянь типу Гамільтона, що описує електромеханічний стан п'єзокерамічних циліндрів зі змінними r, q_i, p_i (12), та характеристичною функцією $H(r, q_i, p_i), i = 1, 2, \dots, 3n$ (11).

Канонічні рівняння Гамільтона завдяки їх особливій формі отримали широке застосування в механіці, зокрема завдяки розвитку методу Якобі інтегрування рівнянь із частинними похідними першого порядку.

У задачі двох точок канонічні рівняння Гамільтона можна розв'язати аналітично. У більшості інших задач розв'язати рівняння аналітично не вдається. Однак, використовуючи методи загальної теорії збурень, можна будувати рішення у вигляді рядів. Знайдені таким чином рішення будуть справедливими на деякому інтервалі. При побудові повного рішення методом послідовних наближень можна, проводячи відповідні перетворення, на кожному етапі отримувати диференціальні рівняння, що є за формою, як і попередні, канонічними. У них як змінні виступають так звані постійні інтегрування, отримані в попередньому наближенні. Описана процедура може повторюватися стільки разів, скільки буде потрібно.

У нашому випадку, ураховуючи постановку граничних умов та порядок системи, завдяки сучасному рівню обчислювальних засобів зручніше застосовувати чисельне інтегрування системи. Користуючись формулами (7) і апроксимаціями необхідних величин із матеріальних залежностей (3), із граничних умов знаходять невідомі значення основних функцій на торцях $z = z_0 = 0$ і $z = z_{n+1} = L$. Граничні умови на циліндричних поверхнях записуємо в матричному вигляді, що дає змогу для інтегрування отриманої крайової задачі застосувати метод дискретної ортогоналізації. Порівняння результатів обчислень, отриманих за допомогою запропонованої методики та представлених у [1], де подібна задача розв'язувалася за допомогою варіаційних методів та сплайн апроксимацій, показало відхилення в межах 3%. Порівняння розв'язків на різних сітках розбиття дозволило зупинитися на значеннях $n = 30 \div 100$ залежно від довжини циліндра, кількість ділянок ортогоналізації $k = 10$, на кожній із них бралось 5 точок для методу Рунге – Кутти.

Чисельні результати. Досліджується радіально поляризований попружнистий циліндр із кераміки PZT-4 з матеріальними характеристиками

$$\begin{aligned}
 c_{11}^E &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, & c_{12}^E &= 7,78 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, & c_{13}^E &= 7,43 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, & c_{33}^E &= 11,5 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)}, \\
 e_{31} &= -5,2 \text{ (Кл/м}^2\text{)}, & e_{33} &= 15,1 \text{ (Кл/м}^2\text{)}, & \varepsilon_{33}^S &= 562 \cdot 10^{-11} \text{ (Ф/м)}, & \rho &= 7500 \text{ (кг/м}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

Внутрішній радіус циліндра R_0 , зовнішній R_1 , $R = R_1$, довжина L . При обчисленнях взято $R_0 / R_1 = 0,6$.

Розглянемо циліндр із жорстко зацемленим торцем $z = 0$ та мембранно закріпленим [5] торцем $z = L$, торці електродовані та закорочені:

$$u_r(r,0) = u_z(r,0) = 0, \quad u_r(r,L) = \sigma_{zz}(r,L) = 0, \quad \varphi(r,0) = \varphi(r,L) = 0.$$

Вважаємо, що циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(R_0,z) = \sigma_{rz}(R_0,z) = 0, \quad \sigma_{rr}(R_1,z) = \sigma_{rz}(R_1,z) = 0.$$

До електродів на циліндричних поверхнях прикладено різницю потенціалів, яка змінюється по гармонічному закону із частотою ω й амплітудою $2V_0$: $\varphi(R_0,z,t) = -V_0 \sin \omega t$, $\varphi(R_1,z,t) = V_0 \sin \omega t$.

Аналізуючи результати обчислень для циліндрів різної довжини (рис. 1), визначаємо власні частоти конкретних циліндрів на розглянутому інтервалі кругової частоти ω :

- при $L = R$ $\Omega = (1.33; 1.64)$;
- при $L = 2R$ $\Omega = (0.68; 1.16; 1.36; 1.44; 2.03; 2.21)$;
- при $L = 3R$ $\Omega = (0.45; 1.06; 1.25; 1.37; 1.48; 1.54; 1.76; 1.82; 2.16; 2.246; 2.44)$;
- при $L = 4R$ $\Omega = (0.34; 0.925; 1.111; 1.187; 1.205; 1.27; 1.346; 1.383; 1.64; 1.835; 1.95; 2.03; 2.243; 2.296)$.

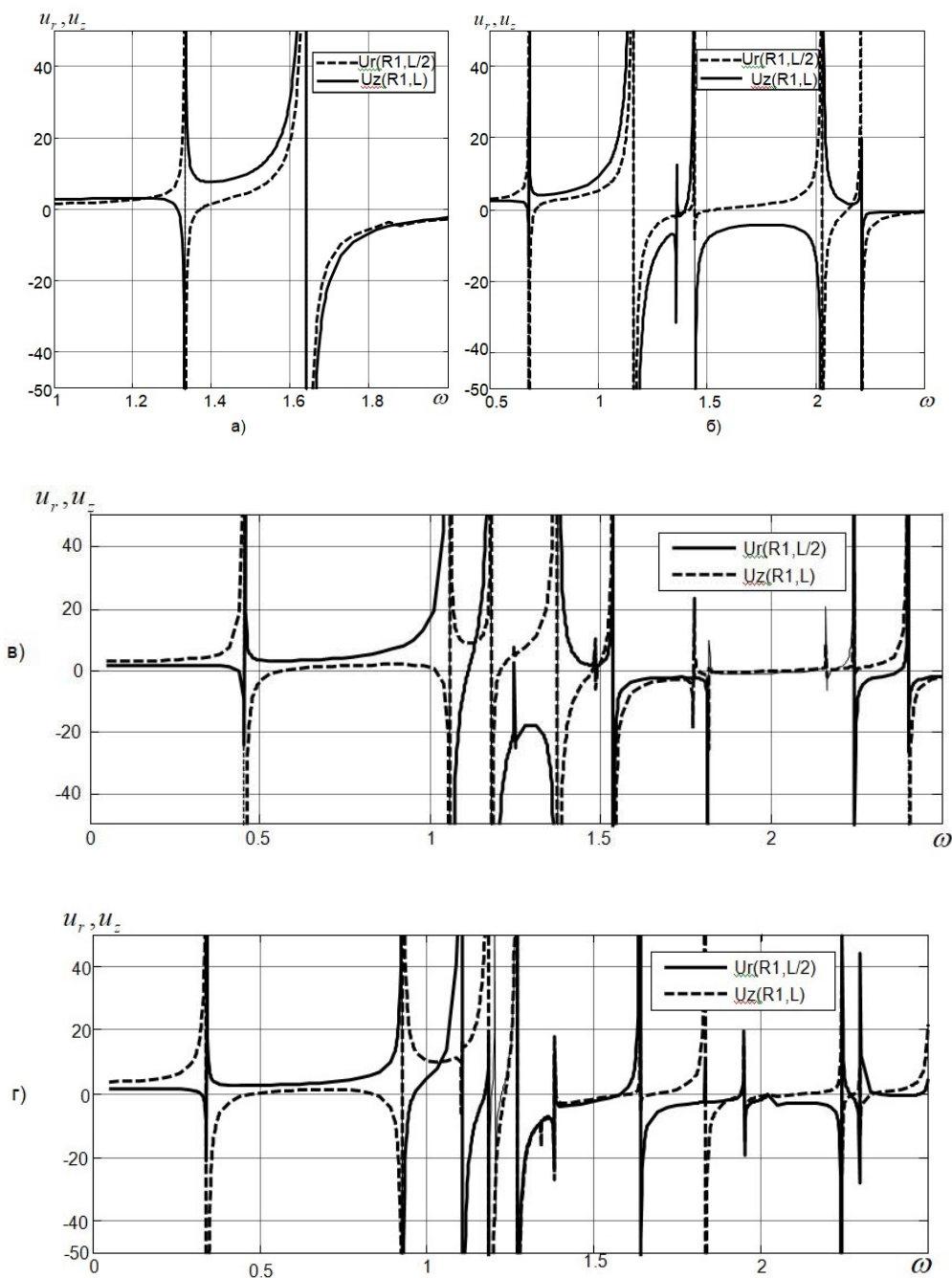


Рис. 1. Амплітудні значення радіальних та поздовжніх переміщень залежно від кругової частоти ω для циліндрів різної довжини: а) $L = R$, б) $L = 2R$, в) $L = 3R$, г) $L = 4R$

Бачимо, що зі зростанням довжини циліндра збільшується кількість резонансних частот на розглянутому інтервалі. Частота першого резонансу при цьому зменшується обернено пропорційно до довжини циліндра. Друга частота зменшується також, але закономірність зміни не настільки очевидна. Завдяки рис. 1 можна виділити сильні та слабкі моди по радіальних та поздовжніх переміщеннях.

Для аналізу форм коливань на першому та другому резонансі розглянемо рис. 2 та 3, на яких зображено криві переміщень, нормовані по максимальному значенню відповідної характеристики. Із рис. 2 (а) бачимо, що максимум по радіальних переміщеннях на зовнішній поверхні зі зростанням довжини зміщується до закріплення. Поздовжні переміщення для циліндра $L = R$ змінюються зі значно більшою кривизною, ніж для інших циліндрів, криві для яких мало відрізняються між собою. Зазначимо, що на внутрішній поверхні на кривих поздовжніх переміщень на першому резонансі з'являється точка перегину, але зі зростанням довжини переміщення на зовнішній та внутрішній поверхнях прямують до однакових значень.

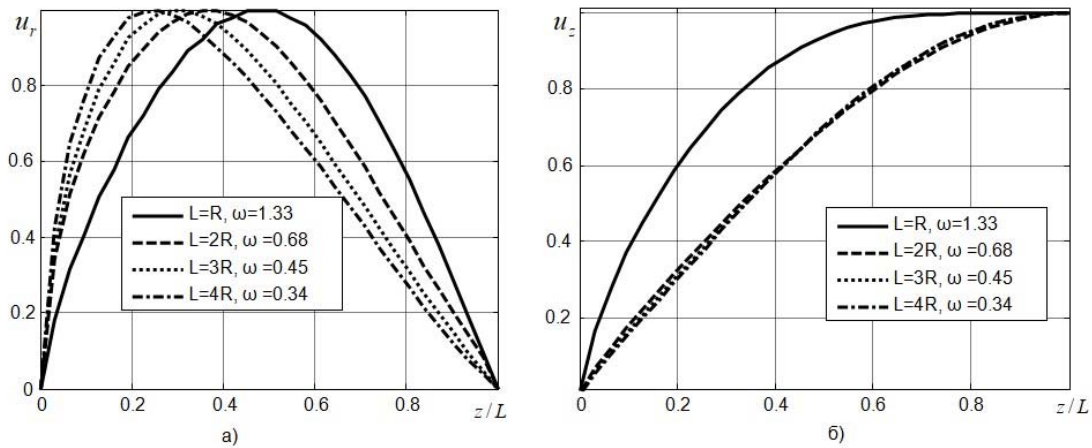


Рис. 2. Форми: а) – радіальних та б) – поздовжніх переміщень на першому резонансі на зовнішній поверхні $r = R_1$ для циліндрів різної довжини

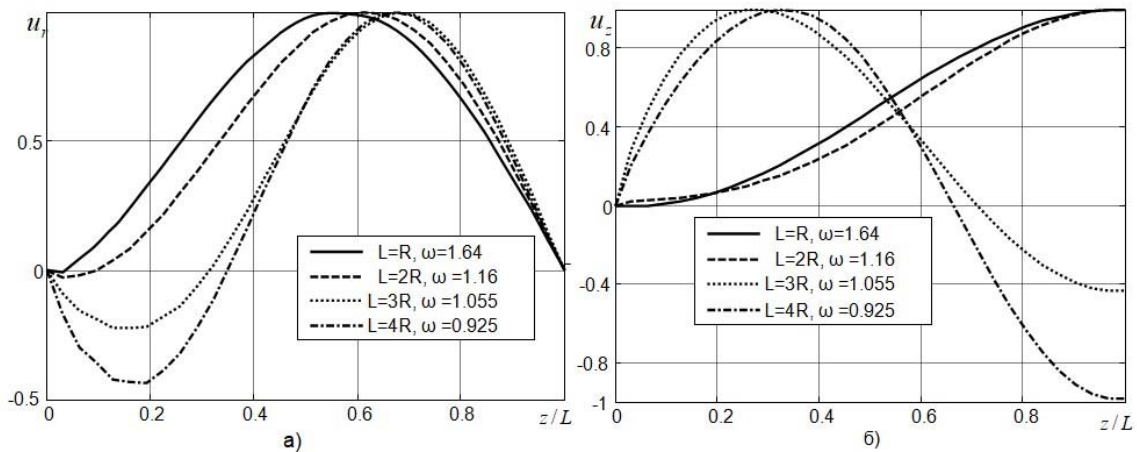


Рис. 3. Форми: а) – радіальних та б) – поздовжніх переміщень на другому резонансі на зовнішній поверхні $r = R_1$ для циліндрів різної довжини

Із рис. 3 (а) бачимо, що максимум по радіальних переміщеннях на другому резонансі міститься ближче до мембранно закріпленого торця, а саме в точках: $z = 0.58R$, $z = 1.23R$, $z = 2.03R$, $z = 2.7R$ для циліндрів $L = R$, $L = 2R$, $L = 3R$, $L = 4R$ відповідно, що збігається з результатами на внутрішній поверхні. Зміна форми і по радіальних, і по поздовжніх переміщеннях суттєвіша для циліндрів більшої довжини, тоді як для циліндрів $L = R$, $L = 2R$ криві практично не мають другого екстремуму, що пояснюється накладанням хвиль у радіальному та поздовжньому напрямках та їх співмірністю з розмірами п'єзоелемента.

Висновки. Система рівнянь електропружності в циліндричній системі координат із застосуванням скінченно-різницевих виразів для похідних по поздовжній координаті зводиться до системи рівнянь гамільтонового типу відносно радіальної координати. Отримана система рівнянь розв'язання задачі описується матрицями симетричної блочної структури, що спрощує обчислювальний процес. Розвинутий метод може бути застосований для дослідження усталених коливань радіально поляризованого циліндра, визначення резонансних частот, побудови форм коливань. Наведені чисельні результати для циліндра із жорстко закріпленим та мембранним торцем ілюструють залежність характеру коливного процесу від довжини циліндра. Установлено, що зі зростанням довжини циліндра кількість резонансів на розглянутому інтервалі зміни частот зростає, причому перший резонанс зменшується обернено пропорційно до довжини циліндра. Аналіз кривих форм переміщень дозволяє зробити висновок, що на першому резонансі зі зростанням довжини циліндра максимум по радіальних переміщеннях зміщується з точки $z = L/2$ до перерізу $z \approx L/4$, кривизна переміщень по поздовжній координаті зменшується. На другому резонансі другий екстремум кривих переміщень стає суттєвим при $L > 2R$.

Список використаних джерел

1. Безверхий О. І. Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл / О. І. Безверхий, Л. О. Григор'єва // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – Вип. 24. – С. 5–17.
2. Бельський І. М. Введение в аналитическую механику / И. М. Бельский. – М.: Высш. шк., 1964. – 324 с.
3. Валле-Пуссен Шарль Жан де ла. Лекции по теоретической механике. Т. 2. – Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссен. – М.: Изд-во иностр. лит.-ры, 1949.
4. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5 томах. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга / под общ. ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
5. Шульга В. М. Неосимметричные электроупругие колебания полого цилиндра с радиальной осью симметрии физико-механических свойств // Прикл. механика. – 2005. – 41. – № 7. – С. 68–72.
6. Шульга Н. А. Колебания пьезокерамических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.

7. Kharouf N. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders / N. Kharouf, P. R. Heyliger // Journal of sound and vibration. – Vol. 174. – Issue 4, 21. – July 1994. – P. 539–561.

8. Shulga M. O Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation / M. O. Shulga, L. O. Grigoryeva // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2010. – P. 179–204.

Надійшла до редколегії 15.12.16

О. Безверхий, д-р физ.-мат. наук
Национальный транспортный университет, Киев, Украина,
Л. Григорьева, канд. физ.-мат. наук
Институт механики имени С. П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Система уравнений электроупругости в цилиндрической системе координат при применении разностных аппроксимаций по продольной координате сводится к канонической системе уравнений гамильтонова типа относительно радиальной координаты. Для интегрирования полученной краевой задачи применяется метод дискретной ортогонализации. Развита методика используется для сравнения гармонических колебаний цилиндров разной длины, определения их резонансных частот, исследования форм колебаний.

O. Bezverhyi, Full Doctor
National Transport University, Kyiv, Ukraine,
L. Grigoryeva, PhD
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

TWO-DIMENSIONAL HARMONIC OSCILLATIONS OF POLARIZED BY THICKNESS PIEZOCERAMIC CYLINDERS UNDER ELECTRICAL LOADS

We study two-dimensional harmonic oscillations of polarized by thickness piezoceramic cylinders under electrical loads. The system of equations of electroelasticity in cylindrical coordinate system using difference approximations on the longitudinal coordinate is converted to canonical hamiltonian system of equations with respect to the radial coordinate. The resulting boundary value problem is integrated by discrete orthogonalization method. The developed methodology is used for comparing of harmonic oscillation of cylinders of different lengths, founding of their resonant frequencies, modes investigation.

УДК 539.3

О. Григоренко, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Єфімова, канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАН України, Київ,
Ю. Коротких, асист.
Київський національний університет будівництва та архітектури, Київ

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНККИХ ЦИЛИНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ НЕПЕРЕРВНО НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НЕСИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ

На базі уточненої теорії Тимошенка – Міндліна досліджуються вільні коливання нетонких циліндричних оболонок із неперервно неоднорідних матеріалів із несиметричною будовою відносно серединної поверхні. Вивчається вплив різних законів зміни механічних властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при осесиметричних вільних коливаннях.

Постановка проблеми. Поява нових технологій в матеріалознавстві дозволила створити нові матеріали з прогнозованими властивостями, серед яких важливе місце займають функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) [5], які мають механічні властивості, що плавно змінюються в деякому напрямку. При цьому механічною моделлю таких матеріалів обирається модель ізотропного неоднорідного в напрямку зміни пружних властивостей матеріалу. Градієнтні матеріали можна використовувати в машинобудуванні, радіопромисловості, приладобудуванні, медицині тощо.

Загальні задачі теорії пружності тіл із гіпотетичних градієнтних матеріалів розглянуто у [2, 3]. Коливання товстотинних циліндрів із полімерних композиційних матеріалів із застосуванням тривимірної теорії пружності досліджувалися в [1]. Однак у зв'язку з суттєвою неоднорідністю матеріалу застосування тривимірної теорії пружності для задач динаміки тіл із ФГМ є проблематичним. У [4, 6–11] досліджувалися вільні коливання тіл циліндричної форми на базі різних теорій оболонок.

У цій роботі досліджуються питання можливості застосування уточненої теорії оболонок Тимошенка – Міндліна до задач про вільні коливання циліндричних оболонок із механічними параметрами, що плавно змінюються вздовж товщини, а також вплив різних законів зміни властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при радіально-поздовжніх осесиметричних коливаннях.

Вихідні співвідношення. Розглянемо задачу про вільні коливання кругових циліндричних оболонок із функціонально градієнтного матеріалу із градієнтом зміни пружних властивостей у напрямку, перпендикулярному до серединної поверхні оболонки. Застосуємо уточнену модель Тимошенка – Міндліна, яка базується на гіпотезі прямої лінії. Сутність цієї гіпотези полягає в тому, що прямолінійний елемент нормалі вихідної координатної поверхні при малих деформаціях зберігає свою довжину та прямолінійність, але не залишається перпендикулярним координатній поверхні. Згідно з прийнятою гіпотезою в системі координат γ, θ, z , пов'язаній із серединною поверхнею оболонки (γ – координата в напрямку нормалі серединної поверхні, $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$), малі переміщення точок можна записати у вигляді

$$u_\gamma(\gamma, \theta, z, t) = w(\theta, z, t), \quad u_\theta(\gamma, \theta, z, t) = v(\theta, z, t) + \gamma \psi_\theta(\theta, z, t), \quad u_z(\gamma, \theta, z, t) = u(\theta, z, t) + \gamma \psi_z(\theta, z, t). \quad (1)$$

де $u(\theta, z, t)$, $v(\theta, z, t)$, $w(\theta, z, t)$ – переміщення координатної поверхні, $\psi_\theta(\theta, z, t)$, $\psi_z(\theta, z, t)$ – функції, що характеризують незалежний повний поворот нормалі.