

B. Kiforenko, Full Doctor, prof., Ya. Tkachenko, PhD,
S.P. Timoshenko institute of mechanics of NASU, Kyiv
I. Vasil'ev, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

OPTIMIZATION OF TRANSFERS BETWEEN CLOSE ELLIPTIC ORBITS WITH A CONSTANT SMALL THRUST

The problem of the optimal transfers of the orbital transport vehicle (OTV) with a small constant thrust system between close elliptical orbits during one revolution around the gravitational center was solved. The goal of optimization is to obtain the maximum mass of the payload of the OTV at a given initial mass. On the examples of particular maneuvers, the effect of the value of the constant thrust on the value of the payload mass was estimated in comparison with the case of using an ideally controlled propulsion system.

УДК 629.7.076.6

Б. Кіфоренко, д.-р. фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ,
І. Василь'єв, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net, e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

ОПТИМАЛЬНІ ПЕРЕХОДИ МІЖ БЛИЗЬКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОРБИТАМИ З ОБМЕЖЕНОЮ МАЛОЮ ТЯГОЮ

Запропоновано методику знаходження оптимальних програм тяги та мас складових міжорбітального транспортного апарату (МТА), які забезпечують максимальну масу корисного вантажу МТА з електроракетною рушійною системою (ЕРС) обмеженої тяги при виконанні перельотів між близькими еліптичними орбітами. Проведено оцінку впливу обмеженості тяги на величину маси корисного вантажу та на оптимальні програми тяги.

ВСТУП. Міжорбітальний транспортний апарат (МТА) – це космічний апарат призначений для доставки корисного вантажу з заданої початкової орбіти на іншу цільову орбіту. Однією з найважливіших задач сучасної космонавтики є задача про максимальне збільшення відсотку маси корисного навантаження в початковій масі МТА, причому таким чином, щоб переліт між заданими орбітами був здійсненим. Успішне розв'язання задач такого типу вимагає визначення в рамках єдиної варіаційної постановки оптимальних співвідношень між масами компонентів МТА, оптимальних керувань та оптимальних траєкторій перельоту.

Електроракетна рушійна система (ЕРС) складається з двох основних модулів: електроракетного (електрореактивного) двигуна малої тяги та джерела енергії, що живить двигун. Застосування ЕРС в якості маршової рушійної системи дозволяє суттєво збільшити масу корисного вантажу МТА порівняно з випадком традиційної рідинної, або твердопаливної маршової рушійної системи. Також важливою перевагою ЕРС є можливість регулювання в широких межах величини тяги і швидкості реактивного струменя. Це дозволило для теоретичних досліджень використовувати модель ідеально керованої ЕРС, для якої величини тяги і потужності двигуна вважаються незалежними керуваннями, та тяга не обмежена зверху. У даній статті для класу маневрів, що полягають в переміщенні корисних вантажів між близькими еліптичними орбітами, запропоновано методику отримання програм тяги та співвідношень між масами складових МТА, які забезпечують максимізацію маси корисного вантажу при врахуванні обмеженості тяги ЕРС.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Рух МТА моделюємо рухом матеріальної точки змінної маси в центральному ньютонівському гравітаційному полі, на яку окрім гравітаційної сили діє генерована рушійною системою тяга. Поточну орбіту МТА описуватимемо за допомогою оскулюючих параметрів: натурального логарифму кутового моменту $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ (тут a – велика піввісь), ексцентриситету e , кутової відстані перицентра до висхідного вузла ω , кута нахилу площини орбіти I , довготи висхідного вузла Ω . Поточне положення МТА на орбіті визначатимемо величиною ексцентричної аномалії E . Тоді рівняння руху МТА матимуть вигляд [3]

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -q, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$, m – поточна маса МТА, q – поточне значення витрати робочої речовини двигуна, w_k , $k = \overline{1, 3}$, – проекції вектора реактивного прискорення на радіальний, трансверсальний та нормальний до площини орбіти напрямки, а коефіцієнти F_{jk} визначаються формулами

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}; \\ F_{23} &= 0; \quad F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)} \sin E; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= -\operatorname{ctg} I \left(\frac{\sin \omega}{1-e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E \right); \\
 F_{41} = F_{42} &= 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1-e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E; \quad F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33}; \\
 F_{60} &= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\exp(3\vartheta)(1-e \cos E)}; \quad F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1-e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \quad F_{62} = -\frac{2-e \cos E}{e(1-e \cos E)} \sin E; \\
 F_{63} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Рівняння (1) записані у безрозмірній формі: лінійний розмір віднесено до характерної величини r^* , час t віднесено до T^* – періоду обертання по круговій орбіті радіуса r^* , розділеного на 2π , масу m віднесено до початкової маси МТА M_0 . Зазначимо, що надалі безрозмірні маси, потужності, прискорення, тяга та витрата робочої речовини позначаються малими літерами, а їх розмірні величини – відповідними великими літерами.

Величина секундної масової витрати робочої речовини визначається вибором моделі рушійної системи, що складається з джерела енергії масою M_v та безпосередньо двигуна масою M_γ , які пропорційні максимальній потужності джерела N_0 [1]

$$M_v = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_0, \tag{3}$$

де α та γ – їх питомі маси. В моделі ідеально керованого двигуна обмеження на його тягу P не накладаються, а секундна витрата робочої речовини визначається формулою [1]

$$Q = \frac{M^2 \bar{W}^2}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; N_0]. \tag{4}$$

Основною особливістю реальних електроракетних двигунів, яку не враховує модель ідеально керованого двигуна, є обмеженість тяги. Тому, для більш адекватного описування можливостей реальних двигунів, використаємо модель двигуна обмеженої тяги, для якої співвідношення (3) лишається в силі, а (4) набудуть вигляду

$$Q = \frac{p^2}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; N_0], \quad P \in [0; P_{\max}], \tag{5}$$

де P_{\max} – максимальне значення тяги. До наведених вище характерних величин додамо максимальну потужність джерела енергії N_0 та P^* – гравітаційну силу, що діє на матеріальну точку масою M_0 на відстані r^* від гравітаційного центру, та перепишемо формули (5) у безрозмірній формі

$$q = \frac{\zeta}{m_v} \frac{p^2}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad p \in [0; p_{\max}]. \tag{6}$$

Тут ζ – сталий в часі коефіцієнт, який дорівнює $\zeta = r^{*2} \alpha T^{*-3}$. Позначимо $\varepsilon = \gamma / \alpha$. Тоді, як випливає з (3), можемо записати масу двигуна через масу джерела енергії рушійної системи

$$m_\gamma = \varepsilon m_v. \tag{7}$$

У рівняннях руху (1) замінімо компоненти вектора реактивного прискорення їхніми виразами через тягу

$$w_k = p c_k / m, \quad k = \overline{1,3} \tag{8}$$

де c_k , $k = \overline{1,3}$, – напрямні косинуси, для яких має місце рівність

$$\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1. \tag{9}$$

Беручи до уваги співвідношення (1) та (6)–(9), можемо записати математичну постановку задачі про знаходження програм величини $p(t)$ і напрямку тяги $c_k(t)$ та значення безрозмірної маси m_v джерела енергії рушійної системи, які забезпечують максимальну масу корисного вантажу m_π при перельоті з заданого початкового положення E_0 на початковій орбіті з орбітальними параметрами \bar{x}_0 в задане положення E_1 на кінцевій орбіті з параметрами \bar{x}_1 , маємо:

$$\begin{aligned}
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{\zeta}{m_v} \frac{p^2}{2n_\Gamma}, \quad m(0) = 1, \quad m_\pi = (m(T) - m_v(1 + \varepsilon)) \rightarrow \max, \\
 \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p c_k / m, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_1, \\
 \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p c_k / m, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}, E(0) = E_0, \quad E(T) = E_1 \\
 n_\Gamma &\in [0; 1], \quad p \in [0; p_{\max}], \quad \sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Тут безрозмірне значення маси МТА в початковий момент часу дорівнює 1 завдяки вибору характерних величин.

Задача (10) являє собою нелінійну задачу оптимального керування з параметрами. Існуючі підходи пошуку чисельного розв'язку таких задач [2, 8, 9] для успішного отримання результату вимагають задання початкових наближень, доволі близьких до шуканого розв'язку. У загальному випадку не існує алгоритмів знаходження таких початкових наближень. У даній статті для окремого класу маневрів, а саме для перельотів між близькими еліптичними орбітами протягом одного оберту, запропоновано процедуру подолання вказаних недоліків та отримання розв'язку, використовуючи загально відомі чисельні методи.

Очевидно, що в разі перельотів між близькими орбітами компоненти вектора приростів оскулюючих параметрів орбіти $\bar{\Delta} = [\Delta_\vartheta, \Delta_e, \Delta_\omega, \Delta_I, \Delta_\Omega] = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$ будуть малими величинами. Оскільки ЕРС відноситься до класу рушійних систем малої тяги, то малими будуть і величини pc_k/m що дозволяє розкласти в ряд рівняння руху в околиці початкової орбіти, відкинути члени другого і вище порядків малості і перейти від незалежної змінної t до незалежної змінної E [4–6]. Тоді, для однооберткових перельотів співвідношення (10) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_\nu} \frac{p^2}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad m(E_0) = 1, \quad m_\pi = m(E_0 + 2\pi) - m_\nu(1 + \varepsilon) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_j}{dE} &= \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) pc_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \\ n_\Gamma &\in [0; 1], \quad p \in [0; p_{\max}], \quad \sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

де $\hat{F}_E = 1/F_{60}(E, \bar{x}_0)$, $F_E = \exp(\vartheta_0) \hat{F}_E$.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РОБОТОЮ РУШІЙНОЇ СИСТЕМИ. Згідно з принципом максимуму Л.С. Понтрягіна складемо гамільтоніан задачі (11)

$$H = -\psi_m \hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{p^2}{m_\nu 2n_\Gamma} + \frac{pF_E}{m} \sum_{j=1}^5 \psi_j \left[\sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) c_k \right]. \tag{12}$$

Спряжені функції ψ_m та ψ_j визначаються з рівнянь

$$\frac{d\psi_m}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial m}, \quad \frac{d\psi_j}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \tag{13}$$

Як видно з (12), гамільтоніан H не залежить від фазових змінних x_j , тому функції ψ_j є константами, що підлягають визначенню. Рівняння для визначення ψ_m має вигляд

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{pF_E}{m^2} \sum_{j=1}^5 \psi_j \left[\sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) c_k \right]. \tag{14}$$

Вирази для керувань p, n_Γ, c_k знаходимо з умови максимуму функції H (див. формулу (12)), з врахуванням обмежень, які містяться в третьому рядку формул (11)

$$n_\Gamma = 1, \quad c_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad p = \begin{cases} B, & B \leq p_{\max}, \\ p_{\max}, & B > p_{\max}, \end{cases} \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \psi_2 F_{21}(E, \bar{x}_0) + \psi_3 F_{31}(E, \bar{x}_0), \quad A_2 = \psi_1 F_{12}(E, \bar{x}_0) + \psi_2 F_{22}(E, \bar{x}_0) + \psi_3 F_{32}(E, \bar{x}_0), \\ A_3 &= \psi_3 F_{33}(E, \bar{x}_0) + \psi_4 F_{43}(E, \bar{x}_0) + \psi_5 F_{53}(E, \bar{x}_0), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad B = \frac{m_\nu}{\zeta} \frac{1}{\psi_m m} \exp(\vartheta_0) A. \end{aligned} \tag{16}$$

Співвідношення (15) та (16) дозволяють переписати рівняння (14) в значно простішій формі

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{pF_E}{m^2} A. \tag{17}$$

З умов трансверсальності отримуємо кінцеву умову для ψ_m [7]

$$\psi_m(E_0 + 2\pi) = 1. \tag{18}$$

Зафіксуємо значення параметру m_ν . Тепер необхідно знайти шість невідомих сталих, а саме $\psi_j, j = \overline{1, 5}$, та $\psi_m(E_0)$, з крайової задачі, яка впливає з формул (11), (17), (18)

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_\nu} \frac{p^2}{2}, \quad m(E_0) = 1, \\ \frac{dx_j}{dE} &= \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p \frac{A_k}{A}, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \\ \frac{d\psi_m}{dE} &= \frac{pF_E}{m^2} A, \quad \psi_m(E_0 + 2\pi) = 1, \end{aligned} \tag{19}$$

де значення p, A_k, A визначаються згідно зі співвідношеннями (15) та (16). Вказані вище невідомі знаходимо, розв'язуючи задачу (19) методом стрільби, задаючи початкові наближення $\psi_j^0, j = \overline{1, 5}$ та $\psi_m^0(E_0)$.

Отримавши розв'язок задачі (19), знаходимо масу корисного вантажу МТА, як функцію параметра m_v ,

$$m_{\pi}(m_v) = m^{E_0+2\pi}(m_v) - (1+\varepsilon)m_v, \quad (20)$$

де через $m^{E_0+2\pi}(m_v)$ позначено знайдену при розв'язанні крайової задачі (19) кінцеву масу МТА. Оптимальне значення m_v , яке відповідає максимуму функції (20), знаходимо за допомогою чисельних методів оптимізації.

ПОЧАТКОВІ НАБЛИЖЕННЯ. Вказані вище початкові наближення $\psi_{j,j=\overline{1,5}}^0$ та $\psi_m^0(E_0)$, які забезпечують збіжність чисельного процесу пошуку розв'язку можна знайти з задачі, в котрій обмеження на тягу зверху не накладаються. У цьому випадку згідно з формулами (15), (16) тяга p дорівнює

$$p = \frac{m_v}{\zeta} \frac{1}{\psi_m m} \exp(\vartheta_0) A. \quad (21)$$

Зі співвідношення (21) випливає, що

$$A = \frac{\zeta}{m_v} \exp(-\vartheta_0) p \psi_m m. \quad (22)$$

Підставимо значення A , отримане в (22), в диференціальне рівняння для ψ_m (див. останнє рівняння в (19)). Після елементарних перетворень отримуємо

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_v} p^2 \frac{\psi_m}{m}. \quad (23)$$

Порівнюючи праві частини першого рівняння в (19) та рівняння (23), знаходимо

$$\frac{d\psi_m}{dE} = -2 \frac{dm}{dE} \frac{\psi_m}{m}.$$

Це диференціальне рівняння має перший інтеграл

$$\psi_m m^2 = c_m = \text{const}. \quad (24)$$

Згідно з (21) та (24), рівняння зміни орбітальних параметрів в (19) подамо у вигляді

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \sum_{k=1}^3 F_{jk} \frac{A_k}{c_m}, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \quad (25)$$

де $F_E^* = \exp(\vartheta_0) F_E$. Введемо нову систему невідомих сталих $\lambda_j = \psi_j / c_m$. Тоді систему (25) можемо переписати у вигляді

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) \hat{A}_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \lambda_2 F_{21}(E, \bar{x}_0) + \lambda_3 F_{31}(E, \bar{x}_0), \\ \hat{A}_2 &= \lambda_1 F_{12}(E, \bar{x}_0) + \lambda_2 F_{22}(E, \bar{x}_0) + \lambda_3 F_{32}(E, \bar{x}_0), \\ \hat{A}_3 &= \lambda_3 F_{33}(E, \bar{x}_0) + \lambda_4 F_{43}(E, \bar{x}_0) + \lambda_5 F_{53}(E, \bar{x}_0), \\ \hat{A} &= \sqrt{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2}, \end{aligned}$$

У рівняннях (26) праві частини не залежать від фазових змінних, що дозволяє проінтегрувати їх в елементарних функціях, і, врахувавши початкові та кінцеві умови, отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих сталих $\lambda_j, j = \overline{1,5}$,

$$\bar{\lambda}(m_v) = \left(\int_{E_0}^{E_0+2\pi} \Phi(E, \bar{x}_0, m_v) \right)^{-1} \bar{\Delta}, \quad (27)$$

де матриця $\Phi(E, \bar{x}_0, m_v)$ визначається наступним чином

$$\begin{aligned} \Phi(E, \bar{x}_0, m_v) &= \frac{m_v}{\zeta} F_E^*(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}^T(E, \bar{x}_0), \\ \hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) &= \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \bar{x}_0) & F_{22}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \bar{x}_0) & F_{32}(E, \bar{x}_0) & F_{33}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$F_E^*(E, \bar{x}_0) = \exp(\vartheta_0) F_E(E, \bar{x}_0).$$

Легко бачити, що $A_k = c_m \hat{A}_k$. Тоді згідно з (21) та значенням константи c_m тяга дорівнюватиме

$$p = \frac{m_v}{\zeta} m \exp(\vartheta_0) \hat{A}. \quad (28)$$

Підставимо (28) в перше рівняння в співвідношень (19). Тепер рівняння зміни маси набуде вигляду

$$\frac{dm}{dE} = -\frac{1}{2} \frac{m_v}{\zeta} F_E^*(E, \bar{x}_0) m^2 \hat{A}^2. \tag{29}$$

Рівняння (29) – це диференціальне рівняння з розділеними змінними, яке має розв'язок

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m^2} = -\frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \hat{A}^2 dE. \tag{30}$$

Позначимо

$$J_p(m_v) = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \hat{A}^2 dE.$$

Легко бачити, що

$$J_p(m_v) = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \sum_{j=1}^5 \left(\lambda_j \frac{dx_j}{dE} \right) dE.$$

Тому, після визначення вектора невідомих $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]$ величину $J_p(m_v)$ можна обчислити за простою формулою

$$J_p(m_v) = \frac{1}{2} \vec{\lambda} \vec{\Delta}. \tag{31}$$

З рівняння (30) знаходимо кінцеве значення маси МТА

$$m^{E_0+2\pi}(m_v) = \frac{1}{1+J_p}. \tag{32}$$

Тоді у відповідності до (20) маса корисного вантажу дорівнює

$$m_{\pi}(m_v) = \frac{1}{1+J_p(m_v)} - m_v(1+\varepsilon). \tag{33}$$

Оптимальне значення m_v , яке максимізує масу корисного вантажу (29), знаходимо методом золотого перерізу. За допомогою формули (27) обчислюємо оптимальні значення констант $\lambda_j, j = \overline{1,5}$, які виберемо за початкові наближення $\psi_j^0, j = \overline{1,5}$. Для знаходження початкового наближення $\psi_m^0(E_0)$ використаємо формули (24), (32) та граничну умову $\psi_m(E_0 + 2\pi) = 1$. Маємо

$$\psi_m^0(E_0) = \left(\frac{1}{1+J_p} \right)^2. \tag{34}$$

АНАЛІЗ ЗАЛЕЖНОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МТА ВІД ВЕЛИЧИНИ МАКСИМАЛЬНОЇ ТЯГИ ДВИГУНА.

Розглянемо два маневри, які полягають у доставці максимальної маси корисного вантажу з початкової еліптичної орбіти на дві різні орбіти, близькі до початкової орбіти, за один оберт. Параметри початкової орбіти: велика піввісь $a = 6878.245$ км, ексцентриситет $e = 0.1$, кутова відстань перицентра до вузла $\omega = 0$, кут нахилу $I = 57^\circ$, довгота висхідного вузла $\Omega = 0^\circ$. При маневрі 1 відбувається збільшення параметрів початкової орбіти ϑ, e, I на величини: $\Delta\vartheta = 0.001, \Delta e = 0.001$ та $\Delta I = 0.002$. При маневрі 2 збільшуються параметри ϑ та Ω на величини $\Delta\vartheta = 0.002, \Delta\Omega = 0.002$. При розрахунках за характерний лінійний розмір r^* вибрано велику піввісь початкової орбіти. Питомі маси складових рушійних систем вибрано наступними: $\alpha = 20$ кг/КВт, $\gamma = 1.5$ кг/КВт.

На рис. 1–2 представлено оптимальні програми величини тяги при виконанні вказаних маневрів. Штрихові лінії відповідають випадку відсутності обмеження на тягу (ідеально керована рушійна система). Криві 1–3 ілюструють оптимальні програми величини тяги при обмеженнях $p_{\max} = 5.0 \cdot 10^{-4}, p_{\max} = 5.2 \cdot 10^{-4}, p_{\max} = 5.5 \cdot 10^{-4}$.

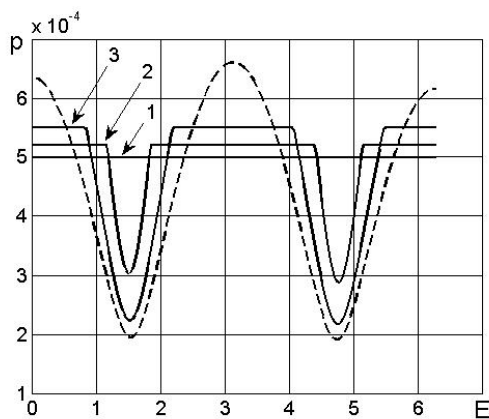


Рис. 1. Програми тяги для маневру 1

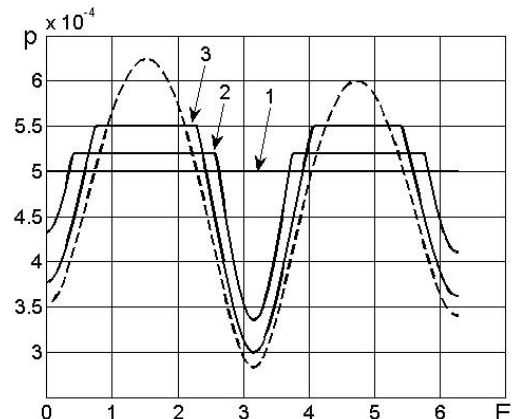


Рис. 2. Програми тяги для маневру 2

Зрозуміло, що для будь-якого маневру існує граничне обмеження на тягу \bar{p}_{\max} , при якому зберігається здійсненість маневру. Іншими словами, для того, щоб маневр залишався здійсненним обмеження на тягу зверху p_{\max} повинно бути більше деякої величини \bar{p}_{\max} .

Як видно з рисунків для маневрів, що розглядаються величина $\bar{p}_{\max} = 5.0 \cdot 10^{-4}$.

Оптимальні параметри МТА для вказаних вище маневрів і рушійних систем подано в таблиці.

Таблиця

Оптимальні параметри МТА

	Маневр 1	Маневр 2
Ідеально керований двигун	$m_{\pi} = 0.937357$ $m_{\nu} = 0.028664$	$m_{\pi} = 0.936036$ $m_{\nu} = 0.029258$
$p_{\max} = 5.0 \cdot 10^{-4}$	$m_{\pi} = 0.934182$ $m_{\nu} = 0.030601$	$m_{\pi} = 0.934181$ $m_{\nu} = 0.030611$
$p_{\max} = 5.2 \cdot 10^{-4}$	$m_{\pi} = 0.934983$ $m_{\nu} = 0.029322$	$m_{\pi} = 0.935250$ $m_{\nu} = 0.029487$
$p_{\max} = 5.5 \cdot 10^{-4}$	$m_{\pi} = 0.936613$ $m_{\nu} = 0.028900$	$m_{\pi} = 0.935829$ $m_{\nu} = 0.029317$

Як і очікувалось, використання моделі ідеально керованої рушійної системи дозволяє отримати верхню оцінку ефективності максимізації маси корисного вантажу МТА при заданому значенні його початкової маси та фіксованих питомих параметрах модулів ЕРС. Результати, що наведені в таблиці, свідчать, що обмеженість тяги рушійної системи, за умови здійсненності маневру, несуттєво впливає на значення максимальної маси корисного вантажу МТА. Проведена оптимізація великої кількості різноманітних переходів між близькими орбітами підтвердила цей факт.

Висновки. При виконанні оптимальних перельотів між близькими еліптичними орбітами модель ідеально керованої ЕРС цілком придатна для оцінки маси корисного навантаження МТА. Також вона необхідна для знаходження початкових наближень, що дозволяють будувати оптимальні програми тяги при використанні ЕРС обмеженої тяги.

Список використаних джерел

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
2. Кифоренко, Б.Н., Васильев И.Ю. Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным // Космические исследования. – 2011 – 49, № 5. – С. 436–452.
3. Кифоренко, Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 62–76.
4. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Некоторые оптимальные околоэллиптические маневры космических аппаратов с двигателем постоянной мощности и аккумулятором энергии // Проблемы управления и информатики. – 2003 – № 1. – С. 84–100.
5. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Оптимизация перелетов космического аппарата между удаленными орбитами // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 11. – С. 93–100.
6. Кифоренко Б.М., Ткаченко Я.В. Метод побудови оптимальних траєкторій перельотів в сильному центральному гравітаційному полі // Збірник праць інституту математики національної академії наук України. – 2015 – 12, № 3. – С. 60–72.
7. Летов А.М. Динамика полета и управления. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
8. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. – 2004. – 42, № 3. – С. 260–279.
9. Улыбышев Ю.П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. – 2008. – 46, № 2. – С. 136–147

Надійшла до редколегії 05.04.18

Б. Кифоренко, д.-р. физ.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко, канд. физ.-мат. наук
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев,
И. Васильев, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ БЛИЗКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ С МАЛОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

Предложена методика нахождения оптимальных программ тяги и масс модулей межорбитального транспортного аппарата (МТА), обеспечивающие максимальную массу полезного груза МТА с электроракетной двигательной системой ограниченной тяги при выполнении перелетов между близкими эллиптическими орбитами. Проведена оценка влияния ограниченности тяги на величину массы полезного груза и на оптимальные программы тяги.

B. Kiforenko, Full Doctor, prof., Ya. Tkachenko PhD,
S. P. Timoshenko, institute of Mechanics of NASU, Kyiv
I. Vasil'ev, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

OPTIMAL TRANSFERS BETWEEN CLOSE ELLIPTIC ORBITS WITH A LOW BOUNDED THRUST

A method for finding the optimal thrust programs and masses of the components of the orbital transport vehicle (OTV), which provide the maximum payload weight of an OTV with an electric propulsion system of bounded thrust when flying between close elliptical orbits is developed. The influence of the thrust limitation on the value of the payload mass and on the optimal thrust programs was evaluated.