

УДК 539.3

І. Киричок, д-р фіз.-мат. наук
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ,
 Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф., С. Круць, аспірант
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
 y.zhuk@i.ua

ВРАХУВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ПРИ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАННЯХ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРОМ І АКТУАТОРОМ

На основі уточнених рівнянь електромеханіки в'язкопружних шаруватих балок представлена постановка і числовий розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання гнучкої в'язкопружної балки та їх активне демпфірування п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні деформації поперечного зсуву. Досліджено вплив умов механічного закріплення країв балки, геометричної нелінійності та деформації поперечного зсуву на амплітудно-частотні характеристики та електричні показники сенсора при вимушених коливаннях балки та можливість активного демпфірування згинної моди коливань за допомогою п'єзоелектричних актуатора і сенсора.

Вступ. У даній статті на основі уточнених рівнянь електромеханічної поведінки шаруватих балок, які враховують ефекти деформації поперечного зсуву, інерції обертання нормального елемента й геометричної нелінійності, розв'язано задачу про вимушені резонансні коливання балки з пасивного (без п'єзо ефекту) в'язкопружного матеріалу з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при різних умовах закріплення країв. Досліджено вплив крайових умов, поперечного зсуву і геометричної нелінійності на електромеханічні частотні характеристики системи.

Постановка задачі. Розглянемо тришарову гнучку балку ширини b і довжини ℓ . Середній шар товщини h_0 виготовлено з пасивного трансверсально-ізотропного в'язкопружного матеріалу, а нижній та верхній шари товщини h_1 і h_2 – з однакової п'єзокераміки з протилежною товщинною поляризацією. Вважаємо, що п'єзощар h_1 характеризується п'єзомодулем $+d_{31}$ і виконує роль актуатора, а п'єзощар h_2 – п'єзомодулем $-d_{31}$ і є сенсором. Балку віднесено до прямокутної системи координат xuz , таким чином, що $0 \leq \delta \leq \ell$, $|y| \leq b/2$, $|z| \leq h_0/2$. Поверхні п'єзощарів покриті нескінченно тонкими електродами. На внутрішніх електродах задано електричні потенціали $\phi_{1,2}(\pm h_0/2) = 0$, а їх зовнішні поверхні електродовані на ділянках $s = b\Delta_x$, $\Delta_x = x_1 - x_0$, $x_0 \geq 0$, $x_1 \leq \ell$. При цьому на зовнішній поверхні п'єзосенсора h_2 виконуються наступні електричні граничні умови:

$$\iint_S^2 D_z ds = 0, \quad (x_0 \leq x \leq x_1); \quad {}^2D_z = 0 \quad (0 \leq x \leq x_0, x_1 \leq x \leq \ell), \quad (1)$$

де D_z – нормальна складова вектора електричної індукції в п'єзощарі.

Балку навантажено поверхневим тиском $q_z = q'_0 \cos \omega t$, який змінюється в часі за гармонічним законом з амплітудою q'_0 і коловою частотою ω , що є близькою до резонансної частоти. Для підсилення або гасіння механічних коливань з тією самою частотою у фазі чи у протифазі відповідно до електродованої ділянки S актуатора підводиться різниця електричних потенціалів з амплітудою $V_a = \phi_1(-h_0/2 - h_1) - \phi_1(-h_0/2)$. Через гармонічне деформування балки на розімкнених електродах ділянки S сенсора виникає різниця електричних потенціалів $V_s = \phi_2(h_0/2 + h_2) - \phi_2(h_0/2)$, яка обчислюється на основі розв'язку задачі електромеханіки та крайових умов (1) або визначається експериментально. Торці балки шарнірно або жорстко закріплені.

Для моделювання електромеханічної поведінки балки вважаємо справедливими гіпотези С.П. Тимошенка про механічні змінні по всьому пакету шарів. Ці гіпотези враховують деформацію поперечного зсуву та інерцію повороту нормального елемента [2]. Відносно електричних величин вважаємо, що складовими ${}^{1,2}D_x$ і ${}^{1,2}D_y$ вектора електричної індукції можна знехтувати, а нормальна складова $D_z = \text{const}$ в п'єзощарах не залежить від товщинної координати [3]. При цьому рівняння електростатики задовольняються тотожно, а складові ${}^{1,2}E_x$ і ${}^{1,2}E_y$ вектора електричної напруженості знаходяться з визначальних рівнянь ${}^{1,2}D_x = 0$, ${}^{1,2}D_y = 0$. Геометричну нелінійність враховуємо збереженням квадрату кута повороту у співвідношеннях Коші й нелінійної складової в рівняннях руху. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [4], які у випадку гармонічного деформування матеріалу зводяться до множення комплексних величин $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$.

Тоді тривимірні визначальні рівняння поляризованої вздовж осі z п'єзокераміки [3] для п'єзощарів актуатора h_1 і сенсора h_2 можна записати у такому вигляді

$$\begin{aligned} {}^m\sigma_x &= c_{11}^E * \varepsilon_x \mp b_{31} * {}^mE_z; \quad {}^m\sigma_{xz} = c_{44}^E * e_{xz}; \quad {}^mD_z = \mp b_{31} * \varepsilon_x + b_{33} * {}^mE_z; \quad {}^mE_z = -d\phi_m / dz; \\ c_{11}^E &= 1 / s_{11}^E; \quad b_{31} = d_{31} / s_{11}^E; \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2 / s_{11}^E; \quad c_{44}^E = 1 / (s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T); \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

де $s_{kk}^E = s'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^s)$, $d_{ik} = d'_{ik} (1 - i\delta_{ik}^d)$, $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^e)$ – в'язкопружні податливості, п'єзомодулі та діелектричні проникності п'єзокераміки; mE_z – нормальна складова електричної напруженості в п'єзощарах. Для в'язкопружного

матеріалу пасивного шару h_0 виконуються перші два співвідношення з (2), в яких необхідно покласти $c_{11}^E = E$, $c_{44}^E = G_{13}$, $b_{31} = 0$ (E і G_{13} – в'язкопружні модулі Юнга і поперечного зсуву). Далі знак * опускаємо.

Нелінійні співвідношення Коші записуються так:

$$\varepsilon_x = e_x + z\kappa_x, \quad e_x = \partial u / \partial x + \vartheta_x^2 / 2, \quad \kappa_x = \partial \psi_x / \partial x, \quad e_{xz} = \psi_x - \vartheta_x, \quad \vartheta_x = -\partial w / \partial x \quad (3)$$

де u і w – поздовжнє і поперечне переміщення, ψ_x – кут повороту початково недеформованого нормального елемента.

Інтегруючи третю і четверту рівності в (2) за змінною z , з урахуванням прийнятих електростатичних крайових умов, отримуємо

$${}^m\sigma_x = (c_{11}^E + \gamma_{33})\varepsilon_x \mp \gamma_{31} {}^mD_z; \quad {}^m\sigma_{xz} = c_{44}^E(\psi_x - \vartheta_x); \quad {}^mD_z = -b_{33}V_{a,s} / h_{1,2} \pm b_{31}(e_x \mp \tilde{h}_{1,2}\kappa_x) \quad (4)$$

$$(\gamma_{31} = b_{31} / b_{33}; \gamma_{33} = \gamma_{31}b_{31}; \tilde{h}_{1,2} = (h_0 + h_{1,2}) / 2; m = 1, 2).$$

Задовольняючи 2D_z з (4) електричній інтегральній умові (1) на електродованих поверхнях сенсора, знаходимо амплітуду різниці електричних потенціалів

$$V_s = -\frac{\gamma_{31}h_2}{\Delta_x} \int_{x_0}^{x_1} (e_x + \tilde{h}_2\kappa_x) dx. \quad (5)$$

Підстановка V_s з (5) в перше співвідношення (4) для сенсора приводить до інтегро-диференціального виразу для ${}^2\sigma_x$, що значно ускладнює побудову співвідношень для зусиль і моментів досліджуваної балки. Тому для їх побудови в залежностях (4) для ${}^2\sigma_x$ приймаємо другу умову з (1), яка на ділянці Δ_x виконується наближено.

Вводячи замість напружень статично еквівалентні зусилля й моменти $(N_x, Q_x, M_x) = b \int (\sigma_x, \sigma_{xz}, z\sigma_x) dz$ по всьому пакету шарів балки з врахуванням (3) і (4), отримуємо співвідношення

$$N_x = C_{11}e_x + K_{11}\kappa_x + N_E; \quad Q_x = k_s C_{44}(\psi_x - \vartheta_x); \quad M_x = K_{11}e_x + D_{11}\kappa_x + M_E, \quad (6)$$

в яких

$$C_{11} = bh_0 [E + c_{11}^E(\delta_1 + \delta_2) + \gamma_{33}\delta_2]; \quad C_{44} = bh_0 [G_{13} + c_{44}^E(\delta_1 + \delta_2)];$$

$$K_{11} = bh_0 \left[(c_{11}^E + \gamma_{33})(1 + \delta_2)\delta_2 - c_{11}^E(1 + \delta_1)\delta_1 \right] / 2; \quad \delta_k = h_k / h_0;$$

$$D_{11} = bh_0^3 \left[E + c_{11}^E(\delta_{13} + \delta_{23}) + \gamma_{33}(\delta_{23} + \delta_1^3) \right] / 12;$$

$$N_E = bb_{31}V_a; \quad M_E = -bh_0(1 + \delta_1)b_{31}V_a/2; \quad \delta_{k3} = 4\delta_k^3 + 6\delta_k^2 + 3\delta_k, \quad k = 1, 2;$$

k_s – коефіцієнт зсуву [2].

Рівняння коливальних гнучкої балки мають вигляд

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} + Fq_z - \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - \tilde{Q}_x - N_x\vartheta_x - \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

з граничними умовами при шарнірному закріпленні країв балки

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, l) \quad (8)$$

– при жорсткому їх защемленні

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \psi_x = 0 \quad (x = 0, l). \quad (9)$$

У рівняннях (7) використано такі позначення: $\tilde{Q}_x = Q_x - N_x\vartheta_x$, $F = bH$, $H = h_0(1 + \delta_1 + \delta_2)$, $\rho_1 = bh_0(\rho_0 + \rho_1\delta_1 + \rho_1\delta_2)$, $\rho_2 = bh_0^3(\rho_0 + \rho_1\delta_{13} + \rho_1\delta_{23}) / 12$; ρ_0 і ρ_1 – питомі густини матеріалів.

Побудова розв'язку задачі. При побудові розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння (3), (6) і (7) відносно шуканих u , w , ψ_x , N_x , \tilde{Q}_x , M_x з точністю до квадратичних членів запишемо у наступному вигляді:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} = -Fq_z + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \tilde{Q}_x + N_x\psi_x - J_{SD}(\tilde{Q}_x N_x) + \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J_{CK}(N_x - N_E) - J_{DK}(M_x - M_E) - \frac{1}{2}\psi_x^2 + J_{SD}(\psi_x \tilde{Q}_x); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = -J_{DK}(N_x - N_E) + J_D(M_x - M_E); \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_x + J_{SD}\tilde{Q}_x,$$

де $J_C = 1/C_{11}$; $J_D = 1/[D_{11}(1 - \nu_{KC}\nu_{KD})]$; $J_{CK} = J_C + J_D\nu_{KC}^2$; $J_{DK} = J_D\nu_{KC}$; $\nu_{KC} = K_{11}/C_{11}$; $\nu_{KD} = K_{11}/D_{11}$; $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$.

При гармонічних навантаженнях вигляду $q_z = q'_0 \cos \omega t - q''_0 \sin \omega t$ ($q'_0 = 0$), нехтуючи перехідними процесами, наближений розв'язок нелінійних рівнянь (10) будемо у вигляді гармонічних рядів за часовою змінною [3]. Обмежимося побудовою розв'язку в одночастотному наближенні для змінних $A = \{w, \psi_x, \tilde{Q}_x, M_x\}$, що характеризують згин балки, утримуючи в рядах члени розвинення до другої гармоніки включно для змінних $B = \{u, N_x\}$ плоского деформування балки. Тоді маємо

$$A = A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t, \quad B = B + \sum_{k=1}^2 (B' \cos k\omega t - B'' \sin k\omega t). \quad (11)$$

На основі підходу [3] й припущень (11) диференціальні рівняння (10) з частинними похідними зводяться до системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь порядку $n=18$ відносно коефіцієнтів розвинення (11). Лінеаризуючи отриману систему рівнянь методом квазілінеаризації [3], з врахуванням крайових умов (8) і (9) приходимо до послідовності лінійних крайових задач

$$\frac{d\bar{Y}^{n+1}}{dx} = A(J(k\omega), \bar{Y}^n) \bar{Y}^{n+1} + \bar{F}(q, N_E, M_E, \bar{Y}^n), \quad (12)$$

$$B_1 \bar{Y}^{n+1}(0) = 0, \quad B_2 \bar{Y}^{n+1}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де $\bar{Y} = \{u', u'', u', u'', w', w'', \psi'_x, \psi''_x, N'_x, N''_x, N'_x, N''_x, \tilde{Q}'_x, \tilde{Q}''_x, M'_x, M''_x, u, N_x\}$ – вектор-стовпчик шуканих функцій; A і \bar{F} – квадратна матриця n -го порядку системи диференціальних рівнянь і вектор-стовпчик її правих частин відповідно, елементи яких тут не записуємо через їх громіздкість; B_1, B_2 – прямокутні матриці, які визначаються крайовими умовами (8) або (9).

Розв'язок лінійної крайової задачі (12) на кожному наближенні виконано за допомогою стійкого числового методу дискретної ортогоналізації [2] із використанням процедури продовження за параметром частоти навантаження і стандартної програми розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. В якості початкового наближення ($n=0$) використано розв'язок геометрично лінійної задачі.

Для активного демпфірування вимушених коливань балки розглянемо два способи визначення величини амплітуди електричного потенціалу актуатора V_a , що компенсує такі коливання [6]. Згідно першого способу, коли тиск сталої амплітуди відомо $q'_0 = q_0$, то маємо

$$|V_a| = k_a(\Delta_x) q_0. \quad (13)$$

За невідомого механічного навантаження показник V_a визначається на основі показника сенсора V_s через залежність оберненого зв'язку

$$|V_a| = G_{as} |V_s|. \quad (14)$$

У рівностях (13), (14) величини k_a, G_{as} є коефіцієнтами керування. Значення k_a, G_{as} , що відповідають максимальному гасінню коливань балки, визначаються формулами $k_a = \left| w^1_{q \max} \right| / \left| w^1_{E \max} \right|$ і $G_{as} = \left| V^1_a \right| / \left| V^1_s \right|$, де $\left| w^1_{q \max} \right|$ і $\left| w^1_{E \max} \right|$ – максимальні амплітуди прогину, які отримано при розв'язанні еталонних задач на частоті лінійного резонансу при $q_0 = 1$ Па, $V_a = 0$ В і при $q = 0$ Па, $V_a = 1$ В відповідно. Величини $\left| V^1_a \right|$ і $\left| V^1_s \right|$ визначаються із розв'язку задачі при $q_0 = 1$ Па на основі формул (14) і (5). Протифазність підведеного до актуатора електричного потенціалу для демпфірування коливань балки враховується за законом $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$.

Результати розрахунків та їх аналіз. Числові розрахунки проведено для балки з пасивного полімера з такими комплексними характеристиками [5]: $\overset{k}{E} = \overset{k}{E}' + i \overset{k}{E}''$; $\overset{k}{E}' = E(k\omega)^p$, $\overset{k}{E}'' = E' \beta(k\omega)^q$, $G_{13} = 0,025 E$, ($k = 1, 2$); $\overset{0}{E} = 0,308 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\beta = 0,16$; $q = -0,145$, $p = 0,076$; $\rho_0 = 2770$ кг/м³, $\lambda = 0,45$ Вт/(м² °К). П'єзошари актуатора і сенсора виготовлено з п'єзокераміки ЦТСтБС – 2 [1] з параметрами $s'_{11} = 12,5 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $s'_{44} = 39,7 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $d'_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10}$ Кл/м, $\epsilon'_{33} = 2100 \epsilon_0$, $d'_{15} = 4,5 \cdot 10^{-10}$ Кл/м, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\epsilon'_{11} = 18,5 \cdot 10^2 \epsilon_0$, $\rho_1 = \rho_2 = 7520$ кг/м³, $\delta^s_{11} = 0,0016$, $\delta^s_{44} = 0,0014$, $\delta^d_{31} = 0,004$, $\delta^d_{15} = 0,0035$, $\delta^e_{33} = 0,0035$, $\delta^e_{11} = 0,005$, $\lambda = 0,47$ Вт/(м² °К). Товщина п'єзошарів $h_1 = h_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м. Коефіцієнт поперечного зсуву $k_s = 5/6$ [2].

З огляду на вид навантаження в балці реалізуються переважно згинні коливання. Тому розрахунки проведено для частот навантаження, що близькі до першого резонансу згинної моди коливань. На рис. 1 і рис. 2, відповідно, для шарнірного та жорсткого закріплення торців балки з параметрами $\ell = 0,04$ м, $h_0 = b = 0,02$ м представлено залежності амплітуди максимальних прогинів $\tilde{w}_q = \left| w^1_{q \max} \right| \cdot 10^7$ м і електричного показника сенсора $\tilde{V}_s = \left| V^1_s \right| \cdot 10^3$ В при пове-

рхневому тиску з амплітудою $q_0 = 1$ Па ($V_{\dot{a}} = 0$ В), а також амплітуди прогинів $\tilde{w}_E = |w_{E\max}^1| \cdot 10^5$ м при підводі до актуатора різниці електричного потенціалу $V_{\dot{a}} = 1$ В ($q_0 = 0$ Па) і компенсуючого одиничне механічне навантаження показника актуатора $\tilde{V}_{\dot{a}} = |V_{\dot{a}}^1| \cdot 10^2$ В від параметру п'єзоактивної області $\tilde{\Delta}_x = \Delta_x / \ell$ з центром в точці максимальних прогинів $x = 0,5\ell$. Тут суцільні криві відповідають розв'язку задачі при класичній постановці на резонансних частотах $\omega_r = 532$ с⁻¹ (рис. 1) і $\omega_r = 1236$ с⁻¹ (рис. 2), а штрихові – при врахуванні деформації поперечного зсуву на частотах $\omega_r = 518$ с⁻¹ і $\omega_r = 1096$ с⁻¹.

З аналізу кривих на рис. 1, 2 випливає, що врахування деформації зсуву призводить до зменшення першої резонансної частоти згинних коливань балки і підвищення еталонних динамічних характеристик при механічному і електричному навантаженнях. Умови закріплення країв балки якісно трансформують наведені на рис. 1, 2 характеристики і суттєво змінюють оптимальні розміри п'єзоактуатора, що реалізує при електричному навантаженні найбільші прогини балки а, отже, й максимальне гасіння її механічно збуджуваних коливань. Найбільш ефективними є актуатори з параметром електродування поверхні п'єзосарів $\tilde{\Delta}_x = 1$ при шарнірному (рис. 1) і $\tilde{\Delta}_x = 0,55$ при жорсткому закріпленні країв балки. Врахування деформації поперечного зсуву практично не впливає на параметр $\tilde{\Delta}_x$.

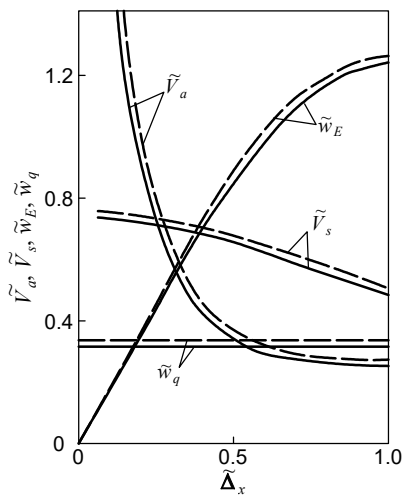


Рис. 1

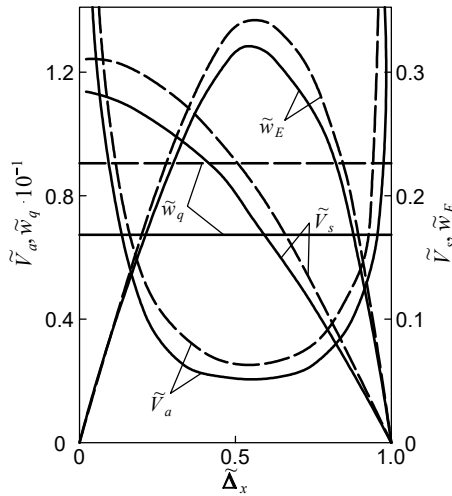


Рис. 2

На рис. 3а,б і рис. 4а,б представлено графіки частотних залежностей параметру максимальних амплітуд прогину \tilde{w} і електричного показника сенсора $|V_s|$ при шарнірному (рис. 3а, 4а) і жорсткому (рис. 3б, 4б) закріпленні країв балки з геометричними розмірами $\ell = 0,2$ м, $h_0 = b = 0,01$ м для найбільш ефективних параметрів Δ_x сенсора і актуатора. Криві 1–4 розраховані з врахуванням деформації поперечного зсуву для амплітуд навантаження $q_0 = (0,25; 0,5; 1,0; 1,5) \cdot 10^6$ Па, відповідно. Штрих-пунктирні криві 1, 2 розраховані при спільній протифазній дії на балку механічного q_0 і компенсуючого його електричного V_a навантаження з амплітудами $q_0 = 0,25 \cdot 10^6$ Па, $V_a = 165,3$ В (крива 1) і $q_0 = 0,5 \cdot 10^6$ Па, $V_a = 322,3$ В (крива 2). При цьому компенсуюче значення показників V_a розраховувалось згідно формул (13) і (14). Їх співпадіння підтверджує правомірність використання формули (14) за невідомого механічного навантаження.

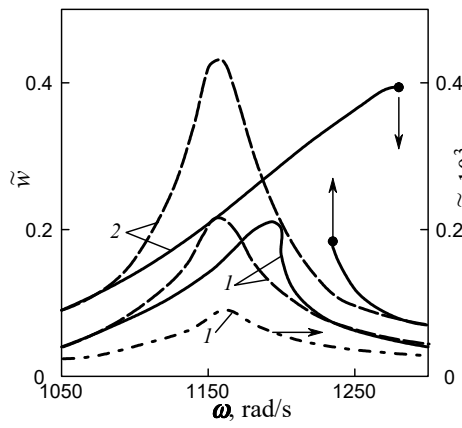


Рис. 3а

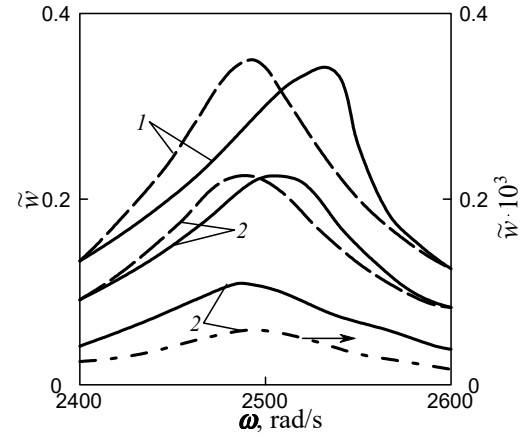


Рис. 3б

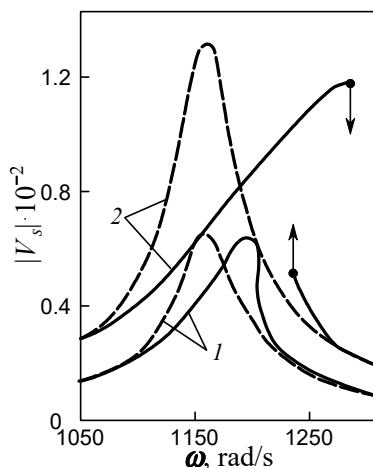


Рис. 4а

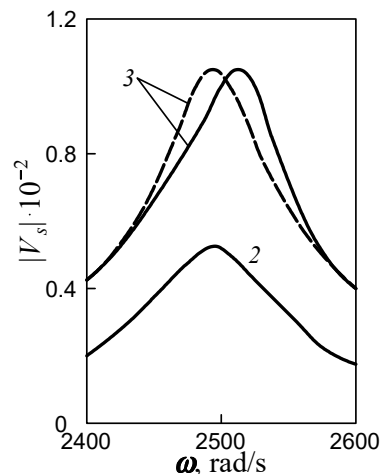


Рис. 4б

Аналіз суцільних кривих на рис. 3, 4 показує, що врахування геометричної нелінійності, що супроводжується формуванням амплітудно-частотних характеристик жорсткого типу, проявляється більшою мірою при коливаннях шарнірно опертої (рис. 3а, 4а), ніж жорстко защемленої балки (рис. 3б, 4б). Так, наприклад, з порівняння кривих 2 випливає, що при навантаженні $q_0 = 0,5 \cdot 10^6$ Па врахування геометричної нелінійності призводить до трансформації лінійних частотних характеристик в нелінійні для шарнірно опертої балки і не змінює їх при жорсткому защемленні її країв. Штрих-пунктирні криві на рис. 3 показують, що амплітуди механічних коливань балки при поданні на електроди актуатора компенсуючих електричних потенціалів зменшуються майже на три порядки. При цьому вплив геометричної нелінійності не проявляється.

Висновки. Розглянуто постановку і числове розв'язання задачі про вимушені резонансні коливання в'язкопруної балки з п'єзоелектричним сенсором і актуатором при врахуванні деформації поперечного зсуву і геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. Для найбільш енергомісткої першої моди згинних коливань балки досліджено вплив умов механічного закріплення, деформації зсуву і геометричної нелінійності на частотні залежності максимальних амплітуд прогину, електричні показники сенсора при моногармонічному навантаженні. Показано, що умови закріплення балки суттєво впливають на розміри ефективного п'єзоактуатора, який здійснює максимальне гасіння вимушених коливань. Врахування деформації поперечного зсуву зменшує резонансну частоту балки і не впливає на розміри ефективного актуатора. Геометрична нелінійність проявляється при навантаженнях, що викликають відносні прогини $\bar{w} \geq 0,1$, і спричиняє трансформацію частотних лінійних характеристик в нелінійні жорсткого типу. Показано можливість активного демпфірування балки п'єзоактуатором з використанням електричного показника сенсора за невідомого навантаження.

Список використаних джерел

1. Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – Том 20, № 7. – С. 70–74.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка. – 1981. – 516 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка. – 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Стивенс К. Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы / Прикл. механика, сер. Е. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – М.: Мир. 1969. – № 4. – С. 168–173.
6. Karnaukhov V.G., Kyrychok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // International Applied Mechanics. – 2017. – Volume 53, 1. – P. 9–74.

Надійшла до редколегії 07.11.18

И. Киричок, д-р физ.-мат. наук
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев,
Я. Жук, д-р физ.-мат. наук, проф., С.Круць, аспирант
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРОМ И АКТУАТОРОМ

На основании уточненных уравнений электромеханики вязкоупругих слоистых балок представлена постановка и численное решение задачи о вынужденных резонансных колебаниях гибкой вязкоупругой балки и их активном демпфировании пьезоэлектрическим сенсором и актуатором при учете деформации поперечного сдвига. Исследовано влияние условий механического закрепления краев балки, геометрической нелинейности и деформации поперечного сдвига на амплитудно-частотные характеристики и электрические показатели сенсора при вынужденных колебаниях балки и возможность активного демпфирования изгибной моды колебаний с помощью пьезоэлектрических актуатора и сенсора.

I. Kirichok, Full Doctor
Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv
Y. Zhuk, Full Doctor, Prof., S.Kruts, PhD Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ACCOUNTING FOR SHEAR DEFORMATION FOR FORCED VIBRATIONS OF FLEXIBLE VISCOELASTIC BEAM WITH PIEZOELECTRIC SENSOR AND ACTUATOR

Statement of the problem on forced resonance vibration and active control of flexible viscoelastic beam containing piezoelectric sensor and actuator with taking account for shear deformation is elaborated on the base of refined theory of electromechanics. Influence of mechanical end fixing conditions, shear deformation accounting and geometrical nonlinearity on frequency characteristics and electric parameter of sensor are investigated for the case of forced vibration of the beam. Possibility of active damping of the beam flexural vibration mode by means of piezoelectric sensor and actuator is studied.

УДК: 517.53

М. Сухорольський, докт. фіз.-мат. наук, проф.,
В. Достойна, магістр прикладної математики та інформатики,
О. Веселовська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Національний університет "Львівська політехніка", Львів

СИСТЕМА ФУНКЦІЙ, БІОРТОГОНАЛЬНА З МНОГОЧЛЕНАМИ, СПОРІДНЕНИМИ З МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБИШОВА

Для многочленів комплексної змінної, які споріднені з многочленами Чебишова, побудовано асоційовані функції, біортогональні з ними на замкнених кривих комплексної площини. Встановлено умови, за яких аналітичні функції розкладаються в ряди за розглядуваною системою многочленів. Розглянуто приклади таких розкладів. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першою похідною многочленів Чебишова першого роду в комплексних областях.

ВСТУП. Властивості ортогональних систем многочленів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними достатньо ґрунтовно вивчено в науковій літературі, зокрема, у [4, 5, 6]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексних областях. У [4] розглянуто деякі властивості многочленів Чебишова у комплексній площині, а також розвинення аналітичних функцій за системою многочленів Чебишова першого роду у комплексних областях. Властивості многочленів Лежандра та їхніх похідних, а також розвинення аналітичних функцій у ряди за ними в комплексних областях вивчалися в [7], [8], відповідно.

У даній статті досліджується система многочленів комплексної змінної, які споріднені з многочленами Чебишова. Побудовано функції, що біортогональні з ними на замкнених кривих комплексної площини, та розглянуто клас аналітичних функцій, які розкладаються в ряди за цією системою многочленів. Розглянуто також приклади таких розкладів. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першою похідною многочленів Чебишова першого роду в комплексних областях.

Позначимо через $T_n(z)$, $U_n(z)$ многочлени Чебишова комплексної змінної першого та другого роду відповідно. Ці функції можна явно записати за допомогою формул [1, с.186]:

$$T_0(z) = 1, \quad T_n(z) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k}{n-k} z^{n-2k} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k z^{n-2k} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

Нехай $Q_n(z)$ – многочлени комплексної змінної, які визначаються співвідношенням

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (z + t\sqrt{z^2 - 1})^n dt. \quad (3)$$

У [9] знайдено явні вирази для многочленів $Q_n(z)$ вигляду

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_k^n z^{n-2k} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (4)$$

де $A_k^n = \frac{(-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k}{n+1}$.

Із (4) легко можна отримати формули для многочленів $Q_n(z)$ у випадках парних і непарних значень n :

$$Q_{2n}(z) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^k z^{2n-2k} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} 2^{2j} C_{n+j}^{2j} z^{2j}, \quad (5)$$