I. Kirichok, Full Doctor
Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv
Y. Zhuk, Full Doctor, Prof., S.Kruts, PhD Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ACCOUNTING FOR SHEAR DEFORMATION FOR FORCED VIBRATIONS OF FLEXIBLE VISCOELASTIC BEAM WITH PIEZOELECTRIC SENSOR AND ACTUATOR

Statement of the problem on forced resonance vibration and active control of flexible viscoelastic beam containing piezoelectric sensor and actuator with taking account for shear deformation is elaborated on the base of refined theory of electromechanics. Influence of mechanical end fixing conditions, shear deformation accounting and geometrical nonlinearity on frequency characteristics and electric parameter of sensor are investigated for the case of forced vibration of the beam. Possibility of active damping of the beam flexural vibration mode by means of piezoelectric sensor and actuator is studied.

УДК: 517.53

М. Сухорольський, докт. фіз.-мат. наук, проф.,
В. Достойна, магістр прикладної математики та інформатики,
О. Веселовська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Національний університет "Львівська політехніка", Львів

СИСТЕМА ФУНКЦІЙ, БІОРТОГОНАЛЬНА З МНОГОЧЛЕНАМИ, СПОРІДНЕНИМИ З МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБИШОВА

Для многочленів комплексної змінної, які споріднені з многочленами Чебишова, побудовано асоційовані функції, біортогональні з ними на замкнених кривих комплексної площини. Встановлено умови, за яких аналітичні функції розкладаються в ряди за розглядуваною системою многочленів. Розглянуто приклади таких розкладів. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першою похідною многочленів Чебишова першого роду в комплексних областях.

ВСТУП. Властивості ортогональних систем многочленів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними достатньо ґрунтовно вивчено в науковій літературі, зокрема, у [4, 5, 6]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексних областях. У [4] розглянуто деякі властивості многочленів Чебишова у комплексній площині, а також розвинення аналітичних функцій за системою многочленів Чебишова першого роду у комплексних областях. Властивості многочленів Лежандра та їхніх похідних, а також розвинення аналітичних функцій у ряди за ними в комплексних областях вивчалися в [7], [8], відповідно.

У даній статті досліджується система многочленів комплексної змінної, які споріднені з многочленами Чебишова. Побудовано функції, що біортогональні з ними на замкнених кривих комплексної площини, та розглянуто клас аналітичних функцій, які розкладаються в ряди за цією системою многочленів. Розглянуто також приклади таких розкладів. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першою похідною многочленів Чебишова першого роду в комплексних областях.

Позначимо через $T_n(z)$, $U_n(z)$ многочлени Чебишова комплексної змінної першого та другого роду відповідно. Ці функції можна явно записати за допомогою формул [1, с.186]:

$$T_0(z)=1, \qquad T_n(z)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\,2^{n-2k}\,C_{n-k}^{k}}{n-k}\,z^{n-2k}\ \ (n=1,2,...), \tag{1}$$

$$U_n(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,2^{n-2k}\,C_{n-k}^{k}\,z^{n-2k}\ \ (n=0,1,...), \tag{2}$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

Нехай $Q_n(z)$ – многочлени комплексної змінної, які визначаються співвідношенням

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(z+t\sqrt{z^2-1}\right)^n dt. \tag{3}$$

У [9] знайдено явні вирази для многочленів $Q_n(z)$ вигляду

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A_k^n z^{n-2k} \quad (n=0,1,...), \tag{4}$$

де $A_k^n=\dfrac{(-1)^k\,2^{n-2k}\,C_{n-k}^{k}}{n+1}$.

Із (4) легко можна отримати формули для многочленів $Q_n(z)$ у випадках парних і непарних значень *n*:

$$Q_{2n}(z)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,2^{2n-2k}\,C_{2n-k}^{k}z^{2n-2k}=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,2^{2j}\,C_{n+j}^{2j}z^{2j}, \tag{5}$$

$$Q_{2n+1}(z)=\frac{1}{2n+2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,2^{2j+1}C_{n+j+1}^{2j+1}z^{2j+1}. \tag{6}$$

Враховуючи співвідношення (1), (2) та (4) маємо такі рекурентні співвідношення

$$U_n(z)=(n+1)Q_n(z), \tag{7}$$

$$T'_{n+1}(z)=(n+1)^2\,Q_n(z). \tag{8}$$

Функції, що асоційовані з многочленами $Q_n(z)$

Розглянемо однозначну аналітичну у крузі $|z|<R,\quad 1<R\le\infty$, функцію $f(z)$ комплексної змінної. Її можна зобразити рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n. \tag{9}$$

Знайдемо формальне розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Для цього підставимо у рівність (9) вирази для степенів z^n через многочлени $Q_n(z)$ [9]. Маємо:

$$z^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\alpha_k^n Q_{n-2k}(z), \tag{10}$$

$$z^{2n}=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{n-j}^{2n}Q_{2j}(z), \tag{11}$$

$$z^{2n+1}=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{n-j}^{2n+1}Q_{2j+1}(z), \tag{12}$$

де $\alpha_k^n=\frac{1}{2^n}\frac{(n-2k+1)^2C_n^k}{n-k+1}$, $\alpha_{n-j}^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2j+1)^2C_{2n}^{n-j}}{n+j+1}$, $\alpha_{n-j}^{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{(2j+2)^2C_{2n+1}^{n-j}}{n+j+2}$. Тоді

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\alpha_k^nQ_{n-2k}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{n-j}^{2n}Q_{2j}(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{n-j}^{2n+1}Q_{2j+1}(z).$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}Q_{2j}(z)\sum_{n=j}^{\infty}\alpha_{n-j}^{2n}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}+\sum_{j=0}^{\infty}Q_{2j+1}(z)\sum_{n=j}^{\infty}\alpha_{n-j}^{2n+1}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}Q_{2j}(z)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{2k+2j}\frac{f^{(2k+2j)}(0)}{(2k+2j)!}+\sum_{j=0}^{\infty}Q_{2j+1}(z)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{2k+2j+1}\frac{f^{(2k+2j+1)}(0)}{(2k+2j+1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}Q_m(z)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{2k+m}\frac{f^{(2k+m)}(0)}{(2k+m)!}.$$

Позначимо

$$L_m(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{2k+m}\frac{f^{(2k+m)}(0)}{(2k+m)!}. \tag{13}$$

Врахувавши співвідношення (13), отримаємо розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}L_m(f)Q_m(z).$$

Розглянемо функції $\omega_n(z)$, що асоційовані з многочленами $Q_n(z)$ [3, c.120],

$$\omega_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{2k+n}\frac{1}{z^{2k+n+1}}, \tag{14}$$

де $\alpha_k^{2k+n}=\frac{(n+1)^2C_{2k+n}^k}{2^{2k+n}(k+n+1)}$.

Використовуючи означення (14), запишемо функції $\omega_n(z)$ для випадку парних і непарних значень індексів *n*:

$$\omega_{2m}(z)=(2m+1)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k+2m}^k}{2^{2k+2m}(k+2m+1)}\frac{1}{z^{2k+2m+1}}=(2m+1)^2\sum_{l=m}^{\infty}\frac{C_{2l}^{l-m}}{2^{2l}(l+m+1)}\frac{1}{z^{2l+1}}, \tag{15}$$

$$\omega_{2m+1}(z)=(2m+2)^2\sum_{l=m}^{\infty}\frac{C_{2l+1}^{l-m}}{2^{2l+1}(l+m+2)}\frac{1}{z^{2l+2}}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Функції* $\omega_m(z)$*, що асоційовані з многочленами* $Q_n(z)$*, аналітичні в області* $|z|>1$.

Доведення. Використовуючи асимптотичну формулу $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$, $n \to \infty$, знайдемо асимптотичну оцінку для коефіцієнтів ряду (14):

$$\alpha_k^{2k+n} = \frac{(n+1)^2(2k+n)!}{2^{2k+n}(k+n+1)k!(k+n)!} \sim \frac{(n+1)^2(2k+n)^{2k+n}}{2^{2k+n}k^k(k+n)^{k+n}(k+n+1)} = \frac{(n+1)^2\left(1+\frac{n}{2k}\right)^{2k+n}}{(k+n+1)\left(1+\frac{n}{k}\right)^{k+n}} \sim \frac{(n+1)^2}{k+n+1} \quad (17)$$

Звідси випливає, що для довільного фіксованого значення n існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\alpha_k^{2k+n}} = 1,$$

тому ряд в (14) збігається в області $|z|>1$.

Зауважимо, що коефіцієнти $L_m(f)$ можна подати у вигляді контурних інтегралів

$$L_m(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\omega_m(z)dz,$$

де γ – додатно орієнтоване коло $|z| = q\ (1<q<R)$.

Наслідок 1. *Функції* $\overline{\omega_n}(z)$, $\overline{\overline{\omega_n}}(z)$*, що асоційовані з многочленами* $U_n(z)$ *та* $T'_{n+1}(z)$ *відповідно, аналітичні в області* $|z|>1$ *і мають вигляд*

$$\overline{\omega_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)C_{2k+n}^k}{2^{2k+n}(k+n+1)}\frac{1}{z^{2k+n+1}},\quad \overline{\overline{\omega_n}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n}(k+n+1)}\frac{1}{z^{2k+n+1}}.$$

Нехай $\delta_{nm} = \begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m\end{cases}$ – символ Кронекера.

Означення 1. *Система асоційованих функцій* $\{\omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *називається біортогональною із системою много членів* $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$*, якщо справджуються умови*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma V_n(z)\omega_k(z)dz = \delta_{nk},$$

де γ *– додатно орієнтований замкнений контур, що охоплює особливі точки функції* $\omega_k(z)$.

Теорема 2. *Система асоційованих функцій* $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *біортогональна із системою многочленів* $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *вздовж замкненого контура* γ*, що охоплює круг* $|z|\le 1$*, тобто виконуються рівності*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q_n(z)\omega_m(z)dz = \delta_{nm}, \quad (18)$$

де функції $\omega_m(z)$ *визначені співвідношенням (14).*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок парних значень індексів *m*, *n*. Підставивши вирази (5) та (15) у ліву частину рівності (18), отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q_{2n}(z)\omega_{2m}(z)dz = \frac{(2m+1)^2}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}2^{2j}C_{n+j}^{2j}\sum_{l=m}^{\infty}\frac{C_{2l}^{l-m}}{2^{2l}(l+m+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z^{2l-2j+1}}.$$

Звідси, на підставі відомого результату [2, с. 81–82]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$$

де L – довільний замкнений додатно орієнтований контур, що охоплює точку *a*, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q_{2n}(z)\omega_{2m}(z)dz = \frac{(2m+1)^2}{2n+1}\sum_{j=m}^{n}(-1)^{n-j}\frac{C_{n+j}^{2j}C_{2j}^{j-m}}{j+m+1}.$$

Аналогічно, враховуючи вирази (6) та (16), для непарних значень індексів *m, n* знаходимо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q_{2n+1}(z)\omega_{2m+1}(z)dz = \frac{(2m+2)^2}{2n+2}\sum_{j=m}^{n}(-1)^{n-j}\frac{C_{n+j+1}^{2j+1}C_{2j+1}^{j-m}}{j+m+2}.$$

Використавши комбінаторні тотожності [9]

$$\frac{(2m+1)^2}{2n+1}\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k}C_{n+k}^{2k}C_{2k}^{k-m}}{k+n+1}=\delta_{nm}, \quad \frac{(2m+2)^2}{2n+2}\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k}C_{n+k+1}^{2k+1}C_{2k+1}^{k-m}}{k+n+2}=\delta_{nm},$$

отримаємо рівності (18).

Твердження 1. *Система многочленів* $Q_n(z)$ *ортогональна з вагою* $\omega(x)=\sqrt{1-x^2}$ *на відрізку* $[-1;1]$*, тобто виконуються рівності*

$$\frac{2}{\pi(n+1)^2}\int_{-1}^{1}Q_n(x)Q_m(x)\omega(x)dx=\delta_{nm}. \tag{19}$$

Доведення випливає з ортогональності многочленів $U_n(z)$ та співвідношення (7).

Теорема 3. *Асоційовані функції* $\omega_n(z)$ *мають інтегральне зображення*

$$\omega_n(z)=\frac{2}{\pi(n+1)^2}\int_{-1}^{1}Q_n(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{z-x}dx. \tag{20}$$

Доведення. Запишемо для многочлена $Q_n(x)$ інтегральну формулу Коші

$$Q_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{Q_n(z)}{z-x}dz,$$

де γ – контур, який є межею області, що містить відрізок $[-1;1]$. Підставивши дану формулу у співвідношення (19), одержимо

$$\frac{2}{\pi(n+1)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{Q_n(z)}{z-x}dz\right)Q_m(z)\sqrt{1-x^2}dx=\delta_{nm}.$$

Змінюючи у лівій частині останньої рівності порядок інтегрування, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}Q_n(z)\frac{2}{\pi(n+1)^2}\left(\int_{-1}^{1}\frac{Q_m\sqrt{1-x^2}}{z-x}dx\right)dz=\delta_{nm}.$$

Звідси на підставі співвідношень (18) приходимо до зображення (20).

Позначимо через D_R – область, межею якої є еліпс Γ_R, що визначається рівнянням

$$z=\frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi}+R^{-1}e^{-i\varphi}\right)(R>1,\ 0\le\varphi<2\pi). \tag{21}$$

Теорема 4. *Має місце розвинення*

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)\,\omega_n(t), \tag{22}$$

яке рівномірно збігається для $t\in\overline{D}_\rho^\infty,\ z\in\overline{D}_r^0$, *де* ρ, r *– будь-які числа, що задовольняють умови* $0<r<\infty,\ \rho>\max\{1,r\},\ \overline{D}_\rho^\infty$ *– замикання області, що містить нескінченно віддалену точку, межею якої є еліпс* Γ_ρ, $\overline{D}_r^0$ *– замикання області, що містить нульову точку, межею якої є еліпс* Γ_r.

Доведення. Підставивши у праву частину рівності (22) вирази (15) та (16) для асоційованих функцій, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)\,\omega_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2Q_{2n}(z)\sum_{l=n}^{\infty}\frac{C_{2l}^{l-n}}{2^{2l}(l+n+1)}\frac{1}{t^{2l+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)^2Q_{2n+1}(z)\sum_{l=n}^{\infty}\frac{C_{2l+1}^{l-n}}{2^{2l+1}(l+n+2)}\frac{1}{t^{2l+2}}.$$

Змінивши в двох останніх сумах порядок сумування та врахувавши співвідношення (11) та (12), матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)\,\omega_n(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2l+1}}\frac{1}{2^{2l}}\sum_{n=0}^{l}\frac{(2n+1)^2C_{2l}^{l-n}}{n+l+1}Q_{2n}(z)+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2l+2}}\frac{1}{2^{2l+1}}\sum_{n=0}^{l}\frac{(2n+2)^2C_{2l+1}^{l-n}}{n+l+2}Q_{2n+1}(z)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l}}{t^{2l+1}}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l+1}}{t^{2l+2}}=\frac{1}{t}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^m=\frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}}=\frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд в (22) рівномірно збіжний для $t\in\overline{D}_\rho^\infty,\ \ z\in\overline{D}_r^0$, де ρ, r – будь-які числа, що задовольняють умови $0<r<\infty,\ \ \rho>\max\{1,r\}$.

Врахувавши оцінку

$$|Q_n(z)|\le R^n,\ z\in\overline{D_R}, \tag{23}$$

для многочленів $Q_n(z)$ з [9], отримаємо

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)\,\omega_n(t)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|Q_n(z)\right|\left|\omega_n(t)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\, r^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k+n}^{k}}{2^{2k+n}(k+n+1)}\frac{1}{|t|^{2k+n+1}}. \tag{24}$$

На підставі асимптотичних рівностей (17) ряд у правій частині нерівності (24) еквівалентний ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\, r^n \sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{(k+n+1)|t|^{2k+n+1}}.$$

Останній ряд оцінюється рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{|t|}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|t|^{2k+1}} = \frac{|t|}{|t|^2-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{|t|}\right)^n < \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{|t|}\right)^n,$$

який збігається при $r<\rho$. Звідси випливає, що ряд (22) збігається рівномірно у зазначених множинах.

Розвинення аналітичних функцій за системою многочленів $Q_n(z)$

Теорема 5. *Нехай функція $f(z)$ комплексної змінної однозначна та аналітична в області D_R, межею якої є еліпс Γ_R $(1<R\le\infty)$ з рівнянням (21), і обмежена на Γ_R. Тоді*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(f)Q_n(z) \tag{25}$$

і ряд в (25) рівномірно збіжний в замиканні області $\overline{D}_\rho$, що обмежена еліпсом Γ_ρ, де $1\le\rho<R$.

Доведення. Оскільки степеневий ряд (9) рівномірно збігається в крузі $\{z:|z|\le r\}$, $r<R$, то

$$\frac{\left|f^{(2j+m)}(0)\right|}{(2j+m)!}\le\frac{K}{r^{2j+m}},\quad K=\mathrm{const}. \tag{26}$$

Врахувавши співвідношення (13) та нерівності (23), (26), отримаємо оцінку

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}L_n(f)Q_n(z)\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\left|L_n(f)\right|\left|Q_n(z)\right|\le K\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k+n}^{k}}{2^{2k+n}(k+n+1)}\frac{1}{r^{2k}}.$$

Останній ряд на підставі асимптотичних рівностей (17) еквівалентний ряду

$$K\sum_{m=s}^{\infty}(n+1)^2\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k+n+1}\frac{1}{r^{2k}}.$$

Мажорантним рядом для останнього є збіжний при $R<r$ ряд $K\dfrac{r^2}{r^2-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\dfrac{R}{r}\right)^n$. Звідси випливає рівномірна збіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(f)Q_n(z)$ у зазначеній області.

Нехай a позначає комплексну сталу.

Приклад 1. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{a-z}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $f^{(s)}(0)=\dfrac{s!}{a^{s+1}}$, то із співвідношення (13) одержимо

$$L_n(f)=(n+1)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k+n}^{k}}{2^{2k+n}(k+n+1)}\frac{1}{a^{2k+n+1}}=\omega_n(a).$$

Підставляючи вираз для $L_n(f)$ в (25), маємо

$$\frac{1}{a-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)Q_n(z)\quad(|a|>|z|).$$

Приклад 2. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{a}{a^2-z^2}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки для многочленів $Q_n(z)$ виконується співвідношення $Q_n(-z)=(-1)^n Q_n(z)$ і має місце рівність

$$\frac{1}{(a-z)(a+z)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a+z}\right),$$

то, використовуючи приклад 1, знаходимо

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)Q_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\omega_n(a)Q_n(z)\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\omega_n(a)Q_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки при $n = 2k$, тому

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_{2k}(a) Q_{2k}(z) \quad (|a| > |z|).$$

Приклад 3. Розкласти функцію $\frac{z}{a^2 - z^2}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Використовуючи рівність $\frac{z}{a^2 - z^2} = \frac{a + z - a}{a^2 - z^2} = \frac{1}{a - z} - \frac{a}{a^2 - z^2}$, приклади 1 та 2, матимемо

$$\frac{z}{a^2 - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a) Q_n(z) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right) \omega_n(a) Q_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^n\right) \omega_n(a) Q_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки при $n = 2k + 1$, тому

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k+1}(a) Q_{2k+1}(z) \quad (|a| > |z|).$$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(z) = e^{az}$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $f^{(s)}(0) = a^s$, то із співвідношення (13) знаходимо

$$L_n(f) = (n+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+n}^k}{2^{2k+n}(k+n+1)} \frac{a^{2k+n}}{(2k+m)!} = (n+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n} =$$

$$= \frac{2(n+1)^2}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+n+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2j+n+1} = \frac{2(n+1)^2}{a} I_{n+1}(a),$$

де $I_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ – модифіковані функції Бесселя першого роду. Тому

$$e^{az} = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 I_{n+1}(a) Q_n(z). \tag{27}$$

Із (27) можна отримати розвинення за многочленами $Q_n(z)$ тригонометричних, а також гіперболічних функцій.

Приклад 5. Розкласти функцію $f(z) = \sin az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $\sin az = \frac{1}{2i}\left(e^{iaz} - e^{-iaz}\right)$, то

$$\sin az = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^n\right)(n+1)^2 I_{n+1}(ia) Q_n(z) = -\frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^2 I_{2k+2}(ia) Q_{2k+1}(z).$$

Враховуючи, що

$$I_n(ia) = iJ_n(a), \tag{28}$$

де $J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ - функції Бесселя першого роду, знаходимо

$$\sin az = -\frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^2 i^{2k+2} J_{2k+2}(ia) Q_{2k+1}(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2)^2 J_{2k+2}(a) Q_{2k+1}(z).$$

Приклад 5. Розкласти функцію $f(z) = \cos az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.
Маємо

$$\cos az = \frac{1}{2}\left(e^{iaz} + e^{-iaz}\right) = \frac{1}{ia} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right)(n+1)^2 I_{n+1}(ia) Q_n(z) = \frac{2}{ia} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^2 I_{2k+1}(ia) Q_{2k}(z).$$

Враховуючи співвідношення (28), одержимо

$$\cos az = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^2 J_{2k+1}(a) Q_{2k}(z).$$

Приклад 6. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{sh} az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Оскільки $\operatorname{sh} az = \frac{1}{2}\left(e^{az} - e^{-az}\right)$, то

$$\operatorname{sh} az = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^n\right)(n+1)^2 I_{n+1}(a) Q_n(z) = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)^2 I_{2k+2}(a) Q_{2k+1}(z).$$

Приклад 7. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{ch} az$ в ряд за многочленами $Q_n(z)$.

Маємо

$$\operatorname{ch} az = \frac{1}{2}\left(e^{az} + e^{-az}\right) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)(n+1)^2 I_{n+1}(a)\,Q_n(z) = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2 I_{2k+1}(a)\,Q_{2k}(z).$$

Зауважимо, що на основі співвідношень (7) та (8) можна отримати наступні розклади:

$$e^{az} = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)I_{n+1}(a)\,U_n(z) = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}I_{n+1}(a)\,T'_{n+1}(z),$$

$$\sin az = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+2)J_{2k+2}(a)\,U_{2k+1}(z) = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+2}(a)\,T'_{2k+2}(z),$$

$$\cos az = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)J_{2k+1}(a)\,U_{2k}(z) = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(a)\,T'_{2k+1}(z),$$

$$\operatorname{sh} az = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)I_{2k+2}(a)\,U_{2k+1}(z) = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}I_{2k+2}(a)\,T'_{2k+2}(z),$$

$$\operatorname{ch} az = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)I_{2k+1}(a)\,U_{2k}(z) = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}I_{2k+1}(a)\,T'_{2k+1}(z).$$

ВИСНОВКИ. Методи розвинення функцій у степеневі ряди та в ряди за ортогональними многочленами і іншими ортогональними функціями однієї чи декількох змінних широко використовують при вивченні математичних моделей у фундаментальних та прикладних науках. Не менш перспективним є метод розкладу функцій за біортогональними системами функцій у комплексних областях. За певних умов для будь-якої незалежної і повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею. Відшукання коефіцієнтів рядів ґрунтується на властивості біортогональності і вони виражаються через похідні функцій, які розкладаються в ці ряди. Актуальною задачею є розвиток математичного апарату побудови та дослідження властивостей біортогональних систем функцій стосовно до розвинення функцій у ряди за цими системами.

У даній роботі побудовано асоційовані функції, біортогональні на замкнених кривих комплексної площини з многочленами, що споріднені з многочленами Чебишова. Встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти в ряди за цією системою многочленів. Розглянуто приклади розкладів функцій в ряди за даною системою многочленів у комплексних областях. Отримано розклади в ряди деяких функцій за многочленами Чебишова другого роду та першими похідними многочленів Чебишова першого роду комплексних змінних.

Список використаних джерел

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
2. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А.Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.
3. Маркушевич А.И. Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч.1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
6. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.
7. Сухорольський М.А. Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній області // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 643. – С. 3–14.
8. Сухорольський М.А., Достойна В.В. Розклад аналітичних у крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 687. – С. 105–121.
9. Сухорольський М.А., Достойна В.В., Веселовська О.В. Многочлени. споріднені з многочленами Чебишова // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – 15. – С. 35-41.

Надійшла до редколегії 07.04.18

$\boxed{\text{М. Сухорольский}}$, докт. физ.-мат. наук, проф.,
В. Достойная, магистр прикладной математики и информатики,
О. Веселовская, канд. физ.-мат. наук, доцент.
Национальный университет "Львівська політехніка", Львов

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ, БИОРТОГОНАЛЬНЫХ С МНОГОЧЛЕНАМИ, РОДСТВЕННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШОВА

Для многочленов комплексной переменной, родственных с многочленами Чебышова, построены ассоциированные функции, биортогональные с ними на замкнутых кривых комплексной плоскости. Получены условия, при которых аналитические функции представимы в виде рядов по рассматриваемой системе многочленов. Рассмотрены примеры таких разложений. Получены разложения в ряды некоторых функций по многочленам Чебышова второго рода и первым производным многочленов Чебышова первого рода в комплексных областях.

$\boxed{\text{M. Sukhorolsky}}$, Full Doctor. Professor,
V. Dostoyna, Master in Applied Mathematics and Informatics,
O. Veselovska, PhD in Mathematics and Physics, Associate Professor
National University "Lvivska Politechnika", Lviv

THE SYSTEM OF FUNCTIONS BIORTOGONAL TO POLYNOMIALS RELATED TO THE CHEBYSHOV POLYNOMIALS

For polynomials of a complex variable that are related to the Chebyshov polynomials, associate functions biorthogonal with them on closed curves of the complex plane are constructed. The conditions of expansion of analytical functions into series by polynomials under consideration are established. The examples of such expansions are given. Expansions of some functions into the series by Chebyshov polynomials of the second genus and the first derivatives of Chebyshov polynomials of the first genus of complex variables are obtained.