УДК 517.9

Ф. Асроров, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email:far@ukr.net

ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОЖИН ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

В термінах власних чисел матриці правої частини системи та параметрів, що задають імпульсні збурення доведено існування функції Гріна-Самойленка та асимптотичної стійкості інтегральної множини систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

ВСТУП. Багатьом еволюційним процесам у фізиці, техніці, біології, економіці протягом свого розвитку властивіі короткочасні впливи. При математичному описі таких процесів часто тривалістю збурення зручно знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями або як їх ще називають, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Зростання інтересу до таких систем останнім часом пов'язано насамперед із запитами новітньої техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи зайняли дуже помітне місце і інтенсивно розвиваються, розширюючи коло своїх додатків в різнорідних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних завдань. Математичною моделлю еволюційних процесів з короткочасними збуреннями може служити система диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотніх коливань [1, 3, 7] та диференціальними рівняннями з імпульсними збуреннями [2, 4, 6, 8].

У даній роботі досліджуються в термінах власних чисел матриці правої частини системи та параметрів, що задають імпульсні збурення, доведено існування функції Гріна-Самойленко та асимптотичної стійкості інтегральної множини системи.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi), \quad t \neq \tau_i, \Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \tag{1}$$

де $t \in R$, $x \in R^n$, $\varphi \in \Im^m$, $\Im^m - m -$ вимірний тор; $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) за t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π -періодичні за φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, обмежені при всіх $t \in R$, $\varphi \in \Im^m$. Матричні і векторні функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по $i \in Z$ і $\det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \Im^m$. Послідовність моментів імпульсного збурення $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $\tau_i \to +\infty.$ Вважаємо також, що рівномірно по $t \in R$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t,t+T)}{T} = p < \infty. \tag{2}$$

Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця по φ, рівномірно відносно $t \in R,$ тобто

$$\|a(t,\varphi_1) - a(t,\varphi_2)\| \leq l\|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{3}$$

Припустимо також, що функції $f(t,\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ задовольняють рівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi)\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi)\| = m.$$

Використовуючи [1,3,4,8], вводимо поняття функції Гріна-Самойленка задачі про інтегральні множини диференціальних рівнянь для імпульсних систем і вкажемо достатні умови існування інтегральної множини.

Умова (3) гарантує, що система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi)$$

породжує неавтономну динамічну систему на торі $\Im^m$, яку розв'язки якої будемо позначати $\varphi_t(\tau,\varphi)$.

Поряд із системою (1) розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned} \tag{5}$$

Нехай $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ – матрицант відповідної однорідної системи. З неперервної залежності $\varphi_t(\tau,\varphi)$ від параметрів $\tau \in R$ и $\varphi \in \Im^m$ випливає, що матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ від цих параметрів залежить неперервним чином.

Лемма. Для будь-яких $t,s,\tau,\sigma \in R$ і $\varphi \in \Im^m$ справедливо $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = \Omega_s^t(\sigma,\varphi).$

Нехай $C(t,\varphi)$ – неперервна 2π – періодична по кожній компоненті $\varphi_\nu, \nu=\overline{1,m}$, кусково-неперервна по $t\in R$, з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t,s,\varphi)=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s\le t\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E-C(s,\varphi_s(t,\varphi))\right], & s>t\end{cases} \tag{6}$$

і назвемо $G(t,s,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко даної задачі, якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|G(t,s,\varphi)\|ds+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\|G(t,\tau_i+0,\varphi)\|\le K \tag{7}$$

для всіх $t,s\in R$, $\varphi\in\Im^m$ і деяких $K\ge 1.$

Припустимо, що моменти імпульсного впливу τ_i такі, що для всіх $i\in Z$ виконується нерівність

$$\tau_{i+1}-\tau_i>\theta>0\ . \tag{8}$$

Розглянемо вираз

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)).$$

Враховуючи (8) і (7), одержимо

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))\right\|\le\frac{2\mathrm{K}}{\gamma}\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi)\|+\frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi\|.$$

Покладемо

$$u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)). \tag{9}$$

Функція $u(t,\varphi)$ -2π-періодична за $\varphi_\nu, \nu=\overline{1,m}$ неперервна за $\varphi\in\Im^m$ і кусково-неперервна за $t\in R$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$.

Теорема 1. Нехай в системі рівнянь (1) функції $a(t,\varphi),$ $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ – неперервні за t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π– періодичні за $\varphi_\nu, \nu=\overline{1,m},$ обмежені при всіх $t\in R, \varphi\in\Im^m.$ Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця за φ рівномірно відносно $t\in R.$ Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені за i матриці і вектори, $\det(E+B_i(\varphi))\ne 0$ для будь-якого $\varphi\in\Im^m.$ Для послідовності моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ виконується оцінка (8). Нехай також існує функція Гріна-Самойленка $G(t,s,\varphi).$ Тоді система рівнянь (1) має інтегральну множину

$$x=u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)),\quad t\in R,\quad \varphi\in\Im^m,$$

причому

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im^m}\|u(t,\varphi)\|\le\frac{2K}{\gamma}\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im^m}\|f(t,\varphi)\|+\frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im^m}\|I_i(\varphi\|. \tag{10}$$

У цьому випадку, коли матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (6) задовільняє оцінку

$$\left\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)\right\|\le Ke^{-\gamma(t-s)} \tag{11}$$

для будь-яких $t\ge s\in R, \tau\in R,$ $\varphi\in\Im^m$ і деяких $K\ge 1, \gamma>0,$ існує функція Гріна-Самойленка наступного вигляду

$$G(t,s,\varphi)=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi), & s<t,\\ 0, & s\ge t.\end{cases} \tag{12}$$

((12) випливає з (6), якщо в (6) покласти $G(s,\varphi_s(\tau,\varphi))=E$). Інтегральну множину системи рівнянь (1) подамо у вигляді

$$x=u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{t}G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds+\sum_{\tau_{i<t}}G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)),\quad t\in R,\quad \varphi\in\Im^m. \tag{13}$$

Теорема 2. Припустимо, що система рівнянь (1) задовольняє умови теореми 1. Нехай також матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (6) задовольняє нерівності (11). Тоді система рівнянь (1) має асимптотично стійку інтегральну множину (13) і ця множина задовольняє оцінку

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im^m}\|u(t,\varphi)\|\le K_0\left[\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im^m}\|f(t,\varphi)\|+\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im^m}\|I_i(\varphi\|\right], \tag{14}$$

де

$$K_0=\frac{K}{\gamma}+K\sup_{t\in R}\sum_{\tau_i<t}e^{-\gamma(t-\tau_i)}.$$

Відмітимо, що в припущенні існування кінцевої границі (3) величина $\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ обмежена.

Вкажемо деякі умови, які забезпечують матрицанту $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ оцінку (11). Ці умови можна отримати з наступного твердження, яке являє собою аналог нерівності Важевського для диференціальних рівнянь з імпульсним впливом [4].

Теорема 3. Для будь-якого розв'язку $x(t,x_0),\, x(\tau,x_0)=x_0,$ лінійної системи з імпульсним впливом (6) при $t\ge\tau$ виконується нерівність

$$\prod_{\tau<\tau_i<t}\lambda_i e^{\int_\tau^t \lambda(\sigma)d\sigma}\|x_0\|\le\|x(t,x_0)\|\le\prod_{\tau<\tau_i<t}\Lambda_i e^{\int_\tau^t \Lambda(\sigma)d\sigma}\|x_0\|, \tag{15}$$

де λ_i та Λ_i – відповідно найменше та найбільше власні числа матриці

$$\widehat{P}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))=\frac{1}{2}\Big(P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+P^T(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\Big),$$

P^T – транспонована по відношенню до $P(t)$ матриця, λ_i^2 і Λ_i^2 – відповідно найменше та найбільше з власних чисел матриці

$$(E+B_i^T(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi_0)))(E+B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))),\quad i=1,2,\ldots\quad \|x\|^2=\langle x,x\rangle.$$

Доведення. Якщо $x(t,x_0)=0,$ то нерівність (15) виконується. Нехай $x(t,x_0)=x(t)$ – нетривіальний розв'язок системи рівнянь (6). Тоді при $t\ne\tau_i$ маємо

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2=\frac{d}{dt}\langle x(t),x(t)\rangle=2\left\langle\frac{dx}{dt},x(t)\right\rangle=2\langle P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x(t),x(t)\rangle=2\left\langle\hat{P}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x(t),x(t)\right\rangle. \tag{16}$$

Оскільки матриця $\hat{P}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ симетрична, то

$$\lambda(t)\langle x(t),x(t)\rangle\le\left\langle\hat{P}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x(t),x(t)\right\rangle\le\Lambda(t)\langle x(t),x(t)\rangle, \tag{17}$$

де $\lambda(t)$ та $\Lambda(t)$ – відповідно найменше та найбільше з власних чисел матриці $\hat{P}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$. Тому з (16) при $t\ne\tau_i$ маємо

$$2\lambda(t)\|x(t)\|^2\le\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2\le2\Lambda(t)\|x(t)\|^2. \tag{18}$$

Таким чином, якщо $\tau_i<t\le\tau_{i+1},$ то з (18) випливають нерівності

$$e^{2\int_{\tau_i}^t\lambda(\sigma)d\sigma}\|x(\tau_i+0)\|^2\le\|x(t)\|\le e^{2\int_{\tau_i}^t\Lambda(\sigma)d\sigma}\|x(\tau_i+0)\|^2. \tag{19}$$

Оскільки $x(\tau_i+0)=(E+B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)))x(\tau_i),$ то

$$\lambda_i^2\|x(\tau_i)\|^2\le\|x(\tau_i+0)\|^2=\left\langle(E+B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)))x(\tau_i),(E+B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)))x(\tau_i)\right\rangle=$$
$$=\left\langle(E+B_i^T(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))),(E+B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)))x(\tau_i),x(\tau_i)\right\rangle\le\Lambda_i^2\|x(\tau_i)\|^2.$$

Враховуючи цю нерівність, з (19) при $\tau_i<t\le\tau_{i+1}.$ отримуємо оцінку

$$\lambda_i^2 e^{2\int_{\tau_i}^t\lambda(\sigma)d\sigma}\|x(\lambda_i)\|^2\le\|x(t)\|^2\le\Lambda_i^2 e^{2\int_{\tau_i}^t\Lambda(\sigma)d\sigma}\|x(\lambda_i)\|^2, \tag{20}$$

За допомогою методу математичної індукції з (20) при всех $i=1,2,\ldots$ отримуємо співвідношення

$$\prod_{\tau<\tau_i<t}\lambda_i^2 e^{2\int_\tau^t\lambda(\sigma)d\sigma}\|x_0\|^2\le\|x(t,x_0)\|^2\le\prod_{\tau<\tau_i<t}\Lambda_i^2 e^{2\int_\tau^t\Lambda(\sigma)d\sigma}\|x_0\|^2. \tag{21}$$

З цієї нерівності випливає оцінка (15). Теорему доведено.

З цієї теореми легко вивести наступне твердження.

Теорема 4. Нехай у системі рівнянь (6) для матриць B_i виконується співвідношення

$$\inf_i\left|\det(E+B_i)\right|\ge\delta>0, \tag{22}$$

а моменти часу τ_i такі, що існує межа скінченні границя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{i(\tau,t)}{t}=p. \tag{23}$$

Нехай найбільше з власних чисел матриці

$$\widehat{P}(t,\varphi)=\frac{1}{2}\Big(P(t,\varphi)+P^T(t,\varphi)\Big)$$

задовольняє нерівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\mathfrak{I}^m}\Lambda(t,\varphi)\le\alpha, \tag{24}$$

а найбільше з власних чисел матриці $(E+B_i^T(\varphi))(E+B_i(\varphi))$ – нерівність

$$\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im^m}\Lambda_i^2(\varphi)\le\beta^2.$$

Якщо

$$\alpha+p\ln\beta<0, \tag{25}$$

то матрицант системи рівнянь (6) допускає оцінку (11).

Доведення. При виконанні нерівності (25) будь-який розв'язок рівнянь (6) відповідно до попередньої теореми задовольняє оцінку вигляду

$$\|x(t,x_0)\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x_0\|,\quad t\ge\tau,$$

де як γ можна взяти будь-яке додатне число, для якого виконується нерівність $0<\gamma<|\alpha+p\ln\beta|$. Отже, і матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ рівнянь (6) можна оцінити так само, тобто нерівністю (11).

Аналогично можна впевнитись, що справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Нехай матриці $\mathrm{P(t,\varphi)}$ та $B_i(\varphi)$ такі, що

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im^m}\max_{\|x\|=1}<P(\mathrm{t},\varphi)\,\mathrm{x},\mathrm{x}>\le\alpha,$$

$$\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im^m}\max_{\|x\|=1}<(\mathrm{E}+\mathrm{B}_i(\varphi))\,\mathrm{x},(\mathrm{E}+\mathrm{B}_i(\varphi))\,\mathrm{x}>\le\beta^2,$$

і число p визначено, згідно рівності

$$\lim_{T\to\infty}\frac{i(t,t+T)}{T}=p.$$

Якщо $\alpha+p\ln\beta<0,$ то матрицант системи рівнянь (6) задовольняєнерівність (11).

ВИСНОВКИ. Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудовано інтегральну інваріантну множину з використанням функції Гріна-Самойленка. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

Список використаних джерел

1. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. К.: ИМ НАН Украины, 2007.
3. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
5. Фекета П.В., Асроров Ф.А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. Ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип. 23. С. 125–132.
6. Perestyuk N.O., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
7. Samoilenko A.M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Надійшла до редколегії 05.04.18

Ф. Асроров, канд.физ.-мат.наук, ст.науч. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В терминах собственных чисел матрицы правой части системы и параметров, задающие импульсные возмущения доказано существование функции Грина-Самойленко и асимптотической устойчивости интегрального множества систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

F. Asrorov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

EXISTENCE OF INTEGRAL QUANTITIES OF ONE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSIVE EFFECTS

In terms of eigenvalues of the matrix of the right-hand side of the system and parameters that give impulse disturbances the existence of the Green-Samoilenko function and the asymptotic stability of the integral set of systems of differential equations with impulse action are proved.

УДК 517.927

К. Геселева, асп.
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський
geseleva1702@gmail.com

КОЛОКАЦІЙНИЙ ТА КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто наближені методи розв'язання крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь, серед яких метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи. Досліджено умови збіжності цих методів. Запропоновано обчислювальні схеми методів.