а найбільше з власних чисел матриці $(E+B_i^T(\varphi))(E+B_i(\varphi))$ – нерівність

$$\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im^m}\Lambda_i^2(\varphi)\le\beta^2.$$

Якщо

$$\alpha+p\ln\beta<0, \tag{25}$$

то матрицант системи рівнянь (6) допускає оцінку (11).

Доведення. При виконанні нерівності (25) будь-який розв'язок рівнянь (6) відповідно до попередньої теореми задовольняє оцінку вигляду

$$\|x(t,x_0)\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x_0\|,\quad t\ge\tau,$$

де як γ можна взяти будь-яке додатне число, для якого виконується нерівність $0<\gamma<|\alpha+p\ln\beta|$. Отже, і матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ рівнянь (6) можна оцінити так само, тобто нерівністю (11).

Аналогично можна впевнитись, що справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Нехай матриці $\mathrm{P}(t,\varphi)$ та $B_i(\varphi)$ такі, що

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im^m}\max_{\|x\|=1}<P(t,\varphi)x,x>\le\alpha,$$

$$\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im^m}\max_{\|x\|=1}<(E+B_i(\varphi))x,(E+B_i(\varphi))x>\le\beta^2,$$

і число p визначено, згідно рівності

$$\lim_{T\to\infty}\frac{i(t,t+T)}{T}=p.$$

Якщо $\alpha+p\ln\beta<0,$ то матрицант системи рівнянь (6) задовольняєнерівність (11).

ВИСНОВКИ. Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудовано інтегральну інваріантну множину з використанням функції Гріна-Самойленка. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

Список використаних джерел

1. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. К.: ИМ НАН Украины, 2007.
3. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
5. Фекета П.В., Асроров Ф.А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. Ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип. 23. С. 125–132.
6. Perestyuk N.O., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
7. Samoilenko A.M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Надійшла до редколегії 05.04.18

Ф. Асроров, канд.физ.-мат.наук, ст.науч. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В терминах собственных чисел матрицы правой части системы и параметров, задающие импульсные возмущения доказано существование функции Грина-Самойленко и асимптотической устойчивости интегрального множества систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

F. Asrorov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

EXISTENCE OF INTEGRAL QUANTITIES OF ONE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSIVE EFFECTS

In terms of eigenvalues of the matrix of the right-hand side of the system and parameters that give impulse disturbances the existence of the Green-Samoilenko function and the asymptotic stability of the integral set of systems of differential equations with impulse action are proved.

УДК 517.927

К. Геселева, асп.
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський
geseleva1702@gmail.com

КОЛОКАЦІЙНИЙ ТА КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто наближені методи розв'язання крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь, серед яких метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи. Досліджено умови збіжності цих методів. Запропоновано обчислювальні схеми методів.

ВСТУП. Крайові задачі для диференціально-функціональних рівнянь ще недостатньо вивчені. У сучасній літературі відчувається необхідність у дослідженнях методів розв'язання таких задач. Побудувати точні розв'язки даних задач можна лише в окремих випадках [1,3]. Тому актуальним є питання дослідження наближених методів розв'язання цих задач. У цій статті до одного типу задачі для диференціально-функціонального рівняння застосовуються метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи та розглянуто умови їх збіжності.

Нехай потрібно знайти функцію $y(x)$, що задовольняє рівняння

$$(Ly)(x) = y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) + p(x)y''(h(x)) + r(x)y'(h(x)) + s(x)y(h(x)) = f(x), x \in [a,b], \tag{1}$$

та крайові умови

$$U_1[y] = \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, U_2[y] = \gamma y'(b) + \delta y(b) = 0, \tag{2}$$

$$y(x) = 0, x \in (h(a), a). \tag{3}$$

До крайової задачі (1)–(3) заміною

$$f(x) = \begin{cases} g(x) - p(x)\varphi''(h(x)), x \in (a,c), c = h^{-1}(a), \\ g(x), x \in (c,b), \end{cases}$$

зводиться крайова задача

$$(Ly)(x) = g(x), x \in (a,b),$$
$$U_1[y] = U_2[y] = 0,$$
$$y(x) = \varphi(x), x \in (h(a), a).$$

Надалі вважаємо, що:

Коефіцієнти $c(x), d(x), p(x), r(x), s(x)$ – визначені й обмежені на відрізку $[a,b], g(x) \in L_2(a,b)$, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0, \gamma^2+\delta^2 \neq 0$, $h(x)$ – диференційовна на (a,b) функція і $h'(x) \geq l, x - h(x) \geq \sigma > 0$, та $p(x) \neq 0$ при $x \in (a,c), c = h^{-1}(a)$;

Крайову задачу (1)-(3) за допомогою заміни

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = u(x), \ U_1[y] = U_2[y] = 0, \tag{4}$$

можна звести до інтегро-функціонального рівняння таким чином.

Коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$ підбираються так, щоб крайова задача (4) мала єдиний розв'язок при кожній функції $u(x) \in L_2(a,b)$. Його можна знайти в явному вигляді порівняно легко, при цьму виконуються рівності

$$p(x)a(h(x)) - r(x) = 0, p(x)b(h(x)) - s(x) = 0, x \in (a,c). \tag{5}$$

Тоді запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\begin{aligned} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + p(x)\{y''(h(x)) + a(h(x))y'(h(x)) + b(h(x))y(h(x))\} = \\ = f(x) + g(x)y'(x) + k(x)y(x) + l(x)y'(h(x)) + m(x)y(h(x)), \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$a(x) - g(x) = c(x), b(x) - k(x) = d(x),$$
$$l(x) = p(x)a(h(x)) - r(x), m(x) = p(x)b(h(x)) - s(x).$$

При вказаному вище виборі коефіцієнтів $a(x)$ і $b(x)$, по-перше, існує функція $G(x,t)$ така,що єдиний розв'язок задачі (4) записується формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)u(t)dt, x \in (a,b), \tag{7}$$

і, по-друге, враховуючи умови (5), маємо

$$\begin{aligned} (By)(x) = g(x)y'(x) + k(x)y(x) + l(x)y'(h(x)) + m(x)y(h(x)) = \\ = g(x)y'(x) + k(x)y(x) + \begin{cases} 0, x \in (a,c), \\ l(x)y'(h(x)) + m(x)y(h(x)), \ x \in (c,b). \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

На основі формул (4), (7), (8) рівняння (6) можна записати у наступному вигляді

$$u(x) + p(x)u(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \ x \in (a,b),$$

де, очевидно

$$\begin{aligned} K(x,t) = (BG)(x,t) = g(x)G'_x(x,t) + k(x)G(x,t) + \\ + \begin{cases} 0, x \in (a,c), c = h^{-1}(a), \\ l(x)G'_x(h(x),t) + m(x)G(h(x),t), x \in (c,b), t \in (a,b), \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

Причому, за умов (3) і (5) при $x \in (h(x), a)$

$$u(x) = y''(x) + \frac{r(h^{-1}(x))}{p(h^{-1}(x))} y'(x) + \frac{s(h^{-1}(x))}{p(h^{-1}(x))} y(x) = 0. \tag{10}$$

Таким чином, ми показали, що крайова задача (1)-(3) рівносильна інтегро-функціональному рівнянню

$$\begin{gathered} u(x) + p(x)u(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt,\ x \in (a,b), \\ u(x) = 0, x \in (h(a),a). \end{gathered} \tag{11}$$

Рівносильність розуміється у наступному сенсі: якщо $y(x)$ – розв'язок задачі (1)-(3), то функція $u(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ – розв'язок рівняння (11), і навпаки, якщо $u(x)$ – розв'язок рівняння (11), то функція $y(x)$, знайдена з задачі (4) є, розв'язок крайової задачі (1)-(3).

Слід зазначити, що при зроблених припущеннях 1, 2 та властивостях функції Гріна з формули (9) випливає справедливість співвідношення

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt = K^2 < \infty,$$

а отже інтегральний оператор K

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt, \forall v(x) \in L_2(a,b),$$

відображає простір $L_2(a,b)$ в себе і є цілком неперервним.

Таким чином, крайова задача (1)-(3) еквівалентна інтегро-функціональному рівнянню (11), розв'язок якого можна знайти [4]. Зі сказаного вище випливає твердження.

Теорема 1. Крайова задача (1)-(3) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли рівняння (11) має єдиний розв'язок для довільної функції $\forall f(x) \in L_2(a,b)$.

Рівняння (11) заміною $v(x) = (G^{-1}Su)(x)$, де оператори G, S відповідно мають вигляд [5]

$$(Gy)(x) = \begin{cases} y(x), x \in (a,c), c = h^{-1}(a), \\ y(x) - q(x)y(h(x)), x \in (c,b), \end{cases} \quad (Sv)(x) = \begin{cases} v(x), x \in (a,c), c = h^{-1}(a), \\ v(x) - q(x)v(h(x)), x \in (c,b), \end{cases}$$

зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором $T = G^{-1}KS^{-1}G$, де

$$(Tv)(x) = \int_a^b T(x,t)v(t)dt,$$

тоді, якщо одиниця – регулярне значення цього інтегрального оператора, то крайова задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $y^*(x) \in L_2(a,b)$.

Метод послідовних наближень

Суть методу стосовно задачі (1)-(3) полягає в тому, що маючи деяке початкове наближення, наступні наближення шукаємо з крайової задачі

$$(Ay_k)(x) = f(x) + (Ay_{k-1})(x) - (Ly_{k-1})(x), x \in (a,b), \tag{12}$$

$$U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, y_k(x) = 0, x \in (h(a),a), \tag{13}$$

де

$$(Ay)(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + p(x)\{y''(h(x)) + a(h(x))y'(h(x)) + b(h(x))y(h(x))\}, \tag{14}$$

причому коефіцієнти $a(x)$ і $b(x)$, як вже зазначалось вище, підбираються таким чином, щоб задача (4) мала єдиний розв'язок для кожної функції $u(x) \in L_2(a,b)$.

Нехай

$$y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, . \tag{15}$$

Тоді з умови однозначного визначення розв'язку задачі маємо

$$y_k(x) = \int_a^b G(x,t)u_k(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{16}$$

$$y_k(h(x)) = \int_a^b G(h(x),t)u_k(t)dt, \quad x \in [c,b]. \tag{17}$$

Оскільки співвідношення (16), (17) виконується при будь-якому k, то підставляючи їх у (12), (13) і враховуючи формули (15), (14), (9), отримаємо

$$\begin{gathered} u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_{k-1}(t)dt, \quad x \in (a,b), \\ u_k(x) = 0, x \in (h(a),a). \end{gathered} \tag{18}$$

Звідси випливає, що метод послідовних наближень (12), (13) розв'язання крайової задачі зводиться до методу послідовних наближень(18) розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11) [3].

Теорема 2. Метод послідовних наближень (12), (13) збігається, тоді і тільки тоді, коли власні значення інтегрального оператора $(Tv)(x)$ лежать в середині одиничного круга з центром в початку координат.

Зауважимо, що ця теорема має місце, якщо $\rho < 1$, де $\rho^2 = \int_a^b\int_a^b T^2(x,t)dxdt < \infty$.

Колокаційний метод

Згідно колокаційного методу, наближений розв'язок задачі (1)-(3) будемо шукати з допоміжної задачі

$$(Ly_n)(x) = f(x), U_1[y_n] = U_2[y_n] = 0, x \in (a,b), \tag{19}$$

$$y_n(x) = 0, x \in (h(a), a), \tag{20}$$

де

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \eta_j(x). \tag{21}$$

Невідомі коефіцієнти $a_j = a_j(n)$ знаходимо з умови

$$f(x_i) - (Ly)(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \tag{22}$$

де оператор L знаходиться з формули (1), а $x_i \in [a,b]$ – вузли колокації.

В описаному алгоритмі система функцій $\{\eta_i(x)\}$ задовольняє рівняння

$$\begin{cases} (A\eta_i)(x) = \xi_i(x), \quad x \in (a,b), \quad i = \overline{1,n}, \\ U_1[\eta_i] = U_2[\eta_i] = 0, \quad \eta_i(x) = 0, \quad x \in (h(a), a), \end{cases} \tag{23}$$

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), x \in (a,c), \quad i = \overline{1,n}, \\ \varphi_i(x) + q(x)\varphi_i(h(x)), \quad x \in (c,b), \end{cases} \tag{24}$$

де оператор A має вигляд (14), $|q(x)| \le \bar{q} < \infty$, – задана система лінійно незалежних функцій і $c = h^{-1}(a)$.

Підставляючи вираз (21) в формулу (22) і виконавши нескладні перетворення, для визначення коефіцієнтів a_j отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j = b_i, \ i = \overline{1,n},$$

в якій

$$\beta_{ij} = (L\eta_j)(x_i), \quad i, j = \overline{1,n}, \qquad b_i = f(x_i), \ i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

Алгоритм (19)-(22) можна звести до колокаційного методу розв'язування интегро-функціонального рівняння (11) [2]. Дійсно, введемо нову систему функцій $\{\xi_i(x)\}$, які можна знайти з наступних формул

$$\eta_i''(x) + a(x)\eta_i'(x) + b(x)\eta_i(x) = \xi_i(x), U_l[\eta_i] = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad l = 1,2. \tag{26}$$

На основі даної заміни з урахуванням формули (21) неважко переконатися в виконанні співвідношення

$$y_n''(x) + a(x)y_n'(x) + b(x)y_n(x) = u_n(x), U_l[y_n] = 0, \quad l = 1,2, \tag{27}$$

де

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j(x). \tag{28}$$

Беручи до уваги ці заміни, за допомогою формул (21), (14) отримати ріності

$$(Ay_n)(x) = u_n(x) + p(x)u_n(h(x)), \quad x \in (a,b), \tag{29}$$

$$y_n(x) = \int_a^b G(x,t)u_n(t)dt. \tag{30}$$

Оскільки, з формул (1), (14), (8) випливає наступна рівність

$$(Ay_n)(x) - (Ly_n)(x) = (By_n)(x), \quad x \in (a,b), \tag{31}$$

то підставивши (30), (27) у співвідношення (19), (22) і враховуючи при цьому формули (14), (31), (10), (29) і (28), отримаємо

$$\begin{gathered} u_n(x) + p(x)u_n(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt, \quad x \in (a,b), \\ u_n(x) = 0, \quad x \in (h(a), a), \end{gathered} \tag{32}$$

$$r_n(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \tag{33}$$

$$r_n(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt - u_n(x) - p(x)u_n(h(x)). \tag{34}$$

Тепер видно, що співвідношення (32)-(34) характеризують колокаційний метод розв'язання інтегро-функціонального рівняння (11).

Колокаційно-ітеративний метод

Суть методу стосовно задачі (1)-(3) полягає в тому, що виходячи з початкового наближення, наступні наближення шукаються з допоміжної задачі

$$(Ay_k)(x) = f(x) + (Ay_k)(x) - (Lz_k)(x), \quad x \in (a,b), \tag{35}$$

$$U_1[y_k] = U_2[y_k] = 0, \quad y_k(x) = 0, \quad x \in (h(a), a), \tag{36}$$

в якій

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x), \tag{37}$$

а невідомі параметри $a_j = a_j(n)$ визначаються з умови

$$f(x_i) - (Lz_k)(x_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}.. \tag{38}$$

В описаному алгоритмі оператор A має вигляд (14), а система функцій $\{\eta_i(x)\}$ знаходиться з формули (23), де як і раніше, $|q(x)| \le \overline{q} < \infty$, – задана система лінійно незалежних функцій і $c = h^{-1}(a)$.

На основі формул (37) та (38) для визначення невідомих параметрів отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, \quad i = \overline{1,n}, \tag{39}$$

де β_{ij} мають вигляд (25),

$$b_i^k = f(x_i) - (Ly_{k-1})(x_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{40}$$

Алгоритм (35)-(38) можна звести до колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11). Дійсно, якщо здійснити заміну

$$y_k''(x) + a(x)y_k'(x) + b(x)y_k(x) = u_k(x), \quad U_l[y_k] = U_2[y_k] = 0, \tag{41}$$

і ввести нову систему функцій $\{\xi_i(x)\}$, визначену за допомогою формули (26), неважко переконатися у виконанні наступного співвідношення

$$w_k''(x) + a(x)w_k'(x) + b(x)w_k(x) = \alpha_k(x), \quad U_l[w_k] = U_2[w_k] = 0, \tag{42}$$

де

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \xi_i(x). \tag{43}$$

Врахувавши ці заміни, за допомогою формул (37), (14) довести істенність наступних співвідношень

$$(Az_k)(x) = u_{k-1}(x) + p(x)u_{k-1}(h(x)) + \alpha_k(x) + p(x)\alpha_k(x), \tag{44}$$

$$y_k(x) = \int_a^b G(x,t)u_k(t)dt, \quad w_k(x) = \int_a^b G(x,t)\alpha_k(t)dt. \tag{45}$$

Звідси випливає, що функцію $z_k(x)$, яка визначається формулою (37), можна записати у вигляді

$$z_k(x) = \int_a^b G(x,t)\{u_{k-1}(t) + \alpha_k(t)\}dt.$$

Позначимо

$$v_k(x) = u_{k-1}(x) + \alpha_k(x), . \tag{46}$$

Тоді

$$z_k(x) = \int_a^b G(x,t)v_k(t)dt. \tag{47}$$

Оскільки, з формул (1), (14), (8) випливає, що

$$(Az_k)(x) - (Lz_k)(x) = (Bz_k)(x), \quad x \in (a,b), \tag{48}$$

і відповідно

$$r_k(x) = f(x) - (Lz_k)(x) = f(x) + (Bz_k)(x) - (Az_k)(x), \tag{49}$$

то підставляючи заміни (41), (45), (47) у співвідношення (35), (38) і враховуючи при цьому формули (14), (48), (10), (45), (49) та (46), отримуємо

$$u_k(x) + p(x)u_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x,t)v_k(t)dt, \quad x \in (a,b), \tag{50}$$

$$r_k(x_i)=0, \quad i=\overline{1,n}, \tag{51}$$

$$r_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)v_k(t)dt-v_k(x)-p(x)v_k(h(x)). \tag{52}$$

Якщо врахувати початкову умову $u_k(x)=0$, $x\in\left(h(a),a\right)$, то можна побачити, що алгоритм (50)–(52), (46) та (43) характеризує колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціонального рівняння (11).

Очислювальна схема

Безпосередньо обчислювати за допомогою формул (35)-(38) дещо незручно, тому пропонується одна із можливих обчислювальних схем, рівносильна початковому алгоритму. Перед тим, як описати схему, зауважимо, що в процесі обчислень за формулами (25) і (40) слід користуватися очевидними співвідношеннями

$$(L\eta_i)(x)=(A\eta_i)(x)-(B\eta_i)(x), \tag{53}$$

$$f(x)-(Ly_{k-1})(x)=f(x)+(By_{k-1})(x)-(Ay_{k-1})(x), \tag{54}$$

а систему рівнянь (39) доцільно записати у векторному вигляді $\Lambda a_k=b_k$. Обчислення, як завжди, можна розділити на допоміжні й основні.

Допоміжні обчислення: задаємо систему лінійно незалежних функцій $\left\{\varphi_i(x)\right\}, i=\overline{1,n}$, розв'язуємо допоміжні рівняння (24), (23), у результаті отримуємо системи функцій $\left\{\eta_j(x)\right\},\left\{\xi_j(x)\right\}$, будуємо нову систему функцій

$$K_j(x)=(B\eta_j)(x), j=\overline{1,n}, \tag{55}$$

далі знаходимо елементи матриці Λ з формули

$$\beta_{ij}=\xi_j(x_i)-K_j(x_i)i\,, \;\; j=\overline{1,n}. \tag{56}$$

Знаходимо обернену матрицю Λ^{-1}, а початкове наближення визначаємо з рівнянь

$$\begin{gathered} u_0(x)+p(x)u_0(h(x))=s_0(x), \quad x\in\left(a,b\right), \\ u_0(x)=0, \quad x\in\left(h(a),a\right), \end{gathered} \tag{57}$$

$$\begin{cases} y_0''(x)+a(x)y_0'(x)+b(x)y_0(x)=u_0(x), \quad x\in\left(a,b\right), \\ U_l\left[y_0\right]=U_2\left[y_0\right]=0, \end{cases} \tag{58}$$

де s_0 – деяка задана функція з $L_2(a,b)$.

Основні обчислення: виходячи з відомих функцій $y_{k-1}(x)$ та $s_{k-1}(x)$ знаходимо функцію

$$v_k(x)=f(x)+(By_{k-1})(x), \tag{59}$$

та нев'язку

$$\varepsilon_k(x)=v_k(x)-s_{k-1}(x), \tag{60}$$

обчислюємо вектор $b_k=\left\{b_1^k,b_2^k,...,b_n^k\right\}$, де

$$b_i^k=\varepsilon_k(x_i), i=\overline{1,n}, \tag{61}$$

складаємо рівняння $\Lambda a_k=b_k$ і знаходимо його розв'язок

$$a_k=\Lambda^{-1}b_k=\left\{a_1^k,a_2^k,...,a_n^k\right\}, \tag{62}$$

утворюємо функцію

$$s_k(x)=v_k(x)+\sum_{j=1}^{n}a_j^kK_j(x)\,. \tag{63}$$

Наближення $y_k(x)$ знаходимо з рівняння

$$\begin{gathered} u_k(x)+p(x)u_k(h(x))=s_k(x), \quad x\in\left(a,b\right), \\ u_k(x)=0, \quad x\in\left(h(a),a\right), \end{gathered} \tag{64}$$

$$\begin{cases} y_k''(x)+a(x)y_k'(x)+b(x)y_k(x)=u_k(x), \quad x\in\left(a,b\right), \\ U_l\left[y_k\right]=U_2\left[y_k\right]=0. \end{cases} \tag{65}$$

Беручи до уваги формули (14), (48), (53) і (54) можна встановити рівносильність обчислювальної схеми (56)–(65) й алгоритму (35)–(38).

ВИСНОВКИ. До одного типу крайової задачі для диференціально-функціонального рівняння застосовано методи побудови наближених розв'язків, такі як метод послідовних наближень, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вайникко Г.М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г.М. Вайникко // Диференц. уравнения. – 1965. –1, № 2. – С. 244–254.
2. Геселева К.Г. Колокаційний та колокаційно-ітеративний методи розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з малою не лінійністю // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кмянецъ-Подільський: Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 19–26. – ISSN 2308-5878.

3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А.Ю. Лучка. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
4. Лучка А.Ю. Крайова задача для диференціальних рівнянь з імпульсною дією і побудова іі розв'язку проекційним методом / А.Ю. Лучка // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 11–16.
5. Поселюжна В.Б., Колокаційно-ітеративний метод розв׳язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В.Б. Поселюжна, Л.М. Семчишин – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 203 с.

Надійшла до редколегії 30.10.17

К. Геселева, аспирант
Каменец-Подольський национальный университет имени Ивана Огиєнка, Камянець-Подільський

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОНН-ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассмотрены приближенные методы решения краевых задач для дифференциально-функциональных уравнений, метод последовательных приближений, коллокационный и коллокационно-итеративный методи. Исследованы условия сходимости этих методов. Предложено вычислительные схемы методов.

K. Geseleva, PhD graduate
Kamyanets-Podilskyi Ivan Ogienko National University, Kamyanets-Podilsky

COLLOCATION AND COLOCATION-ITERATIVE METHODS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS

Approximate methods for solving boundary value problems for differential-functional equations are considered in this paper, method of successive approximations, collocation and collocation-iterative methods. The conditions of convergence of these methods are investigated. The computational schemes of methods are proposed.

УДК 517.956.223

В. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук, проф., В. Кречко, асп.
Інститут математики НАН України, Київ
e-mail: gerasym@imath.kiev.ua, vi.kre4ko@gmail.com

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ІЄРАРХІЇ КВАНТОВИХ РІВНЯНЬ ББҐКІ В ГРАНИЦІ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ

Розглянуто проблему побудови асимптотичної границі самоузгодженого поля непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГҐКІ та встановлено властивість поширення кореляцій станів квантових систем багатьох частинок в такій границі.

ВСТУП. В останній час спостерігається значний прогрес у дослідженні проблеми строгого обґрунтування квантових кінетичних рівнянь. Зокрема це стосується нелінійного рівняння Шредінгера та рівняння Ґросса – Пітаєвського, якими описується колективна поведінка квантових систем багатьох частинок [2]–[4], [12], [13], [16], наприклад, Бозе газу та його конденсату. Основний підхід до виведення таких кінетичних рівнянь ґрунтується на дослідженні скейлінгової границі середнього (самоузгодженого) поля [12] розв'язку ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) для послідовності маргінальних операторів густини побудованого методами теорії збурень [15].

Мета цієї статті полягає у побудові асимптотичної границі самоузгодженого поля для непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГҐКІ [8], [10] та дослідження властивості поширення початкових кореляцій стану для квантових систем багатьох частинок.

НЕПЕРТУРБАТИВНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІЄРАРХІЇ КВАНТОВИХ РІВНЯНЬ ББҐКІ. Нехай простір $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes n})$ – простір послідовностей $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ ядерних операторів, $f_0 \in \mathbb{C}$ визначених на просторі Фока $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ з такою нормою: $\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Tr}_{1,\dots,n}|f_n(1,\dots,n)|$, де символом $\mathrm{Tr}_{1,\dots,n}$ позначено частинні сліди оператора $f_n \equiv f_n(1,\dots,n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначеного на n-частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$. Підпростір фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями позначимо $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ [14].

На просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначено однопараметричне відображення

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}_n^*(t) f_n \doteq e^{-itH_n} f_n e^{itH_n}, \tag{1}$$

де самоспряжений оператор $H_n = \sum_{j=1}^{n} K(j) + \epsilon\sum_{j_1<j_2=1}^{n}\Phi(j_1, j_2)$ – гамільтоніан системи n частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана [2], тобто оператор $K(j)$ – оператор кінетичної енергії j частинки, Φ – оператор парного потенціалу взаємодії, $\epsilon > 0$ – скейлінговий параметр і використано систему одиниць де $h = 2\pi\hbar = 1$ – постійна Планка, $m = 1$ – маса частинок. Обернену групу операторів до групи $\mathcal{G}_n^*(t)$ будемо позначати $\left(\mathcal{G}_n^*\right)^{-1}(t) = \mathcal{G}_n^*(-t) = \mathcal{G}_n(t)$.