3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А.Ю. Лучка. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
4. Лучка А.Ю. Крайова задача для диференціальних рівнянь з імпульсною дією і побудова іі розв'язку проекційним методом / А.Ю. Лучка // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 11–16.
5. Поселюжна В.Б., Колокаційно-ітеративний метод розв′язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В.Б. Поселюжна, Л.М. Семчишин – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 203 с.

Надійшла до редколегії 30.10.17

К. Геселева, аспирант
Каменец-Подольський национальный университет имени Ивана Огієнка, Камянець-Подільський

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОНН-ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассмотрены приближенные методы решения краевых задач для дифференциально-функциональных уравнений, метод последовательных приближений, коллокационный и коллокационно-итеративный методи. Исследованы условия сходимости этих методов. Предложено вычислительные схемы методов.

K. Geseleva, PhD graduate
Kamyanets-Podilskyi Ivan Ogienko National University, Kamyanets-Podilsky

COLLOCATION AND COLOCATION-ITERATIVE METHODS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS

Approximate methods for solving boundary value problems for differential-functional equations are considered in this paper, method of successive approximations, collocation and collocation-iterative methods. The conditions of convergence of these methods are investigated. The computational schemes of methods are proposed.

УДК 517.956.223

В. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук, проф., В. Кречко, асп.
Інститут математики НАН України, Київ
e-mail: gerasym@imath.kiev.ua, vi.kre4ko@gmail.com

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ІЄРАРХІЇ КВАНТОВИХ РІВНЯНЬ ББҐКІ В ГРАНИЦІ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ

Розглянуто проблему побудови асимптотичної границі самоузгодженого поля непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГҐКІ та встановлено властивість поширення кореляцій станів квантових систем багатьох частинок в такій границі.

ВСТУП. В останній час спостерігається значний прогрес у дослідженні проблеми строгого обґрунтування квантових кінетичних рівнянь. Зокрема це стосується нелінійного рівняння Шредінгера та рівняння Ґросса – Пітаєвського, якими описується колективна поведінка квантових систем багатьох частинок [2]–[4], [12], [13], [16], наприклад, Бозе газу та його конденсату. Основний підхід до виведення таких кінетичних рівнянь ґрунтується на дослідженні скейлінгової границі середнього (самоузгодженого) поля [12] розв'язку ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) для послідовності маргінальних операторів густини побудованого методами теорії збурень [15].

Мета цієї статті полягає у побудові асимптотичної границі самоузгодженого поля для непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББГҐКІ [8], [10] та дослідження властивості поширення початкових кореляцій стану для квантових систем багатьох частинок.

НЕПЕРТУРБАТИВНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІЄРАРХІЇ КВАНТОВИХ РІВНЯНЬ ББҐКІ. Нехай простір $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes n})$ – простір послідовностей $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ ядерних операторів, $f_0 \in \mathbb{C}$ визначених на просторі Фока $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ з такою нормою: $\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Tr}_{1,\dots,n}|f_n(1,\dots,n)|$, де символом $\mathrm{Tr}_{1,\dots,n}$ позначено частинні сліди оператора $f_n \equiv f_n(1,\dots,n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначеного на n-частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$. Підпростір фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями позначимо $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ [14].

На просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначено однопараметричне відображення

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}_n^*(t) f_n \doteq e^{-itH_n} f_n e^{itH_n}, \tag{1}$$

де самоспряжений оператор $H_n = \sum_{j=1}^{n} K(j) + \epsilon \sum_{j_1<j_2=1}^{n} \Phi(j_1, j_2)$ – гамільтоніан системи n частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана [2], тобто оператор $K(j)$ – оператор кінетичної енергії j частинки, Φ – оператор парного потенціалу взаємодії, $\epsilon > 0$ – скейлінговий параметр і використано систему одиниць де $h = 2\pi\hbar = 1$ – постійна Планка, $m = 1$ – маса частинок. Обернену групу операторів до групи $\mathcal{G}_n^*(t)$ будемо позначати $\left(\mathcal{G}_n^*\right)^{-1}(t) = \mathcal{G}_n^*(-t) = \mathcal{G}_n(t)$.

На просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ відображення (1): $t \to \mathcal{G}^*(t) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}^*_n(t)$, утворює сильно неперервну ізометричну групу операторів, яка зберігає позитивність та самоспряженість операторів. На підпросторі $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n)$ інфінітезимальний генератор $\mathcal{N}^*_n$ групи операторів (1) визначається в сенсі сильної збіжності простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ таким оператором

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\mathcal{G}^*_n(t)f_n - f_n\right) = \mathcal{N}^*_n f_n \doteq \sum_{j=1}^{n}\mathcal{N}^*(j)f_n + \epsilon\sum_{j_1<j_2=1}^{n}\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)f_n, \tag{2}$$

де оператор $\mathcal{N}^*(j)$ – генератор рівняння фон Неймана у випадку еволюції системи невзаємодіючих частинок; оператор $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}$ визначається такою формулою: $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1,j_2)f_n \doteq -i(\Phi(j_1,j_2)f_n - f_n\Phi(j_1,j_2))$.

Еволюція всіх можливих станів квантових систем багатьох частинок, які задовольняють статистику Максвелла – Больцмана, описується за допомогою послідовності маргінальних операторів густини $F(t) = (I, F_1(t,1),\ldots, F_s(t,1,\ldots,s),\ldots)$, які є непертурбативним розв'язком задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ і зображуються такими розкладами в ряд [8], [10]:

$$F_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{1+n}\left(t,\{Y\},X\setminus Y\right)F^{0,\epsilon}_{s+n}(1,\ldots,s+n),\quad s\ge 1, \tag{3}$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ ряду (3) – кумулянт $(1+n)$-го порядку груп операторів (1), який визначається таким розкладом

$$\mathfrak{A}_{1+n}\left(t,\{Y\},X\setminus Y\right) = \sum_{P:(\{Y\},X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}(|P|-1)!\prod_{X_i\subset P}\mathcal{G}^*_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)), \tag{4}$$

де використано такі позначення: $Y \equiv (1,\ldots,s)$, $X\setminus Y \equiv (s+1,\ldots,s+n)$ та $\{Y\}$ – множина, яка складається з одного елементу $Y=(1,\ldots,s)$ множини індексів, $\sum_P$ – сума за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(\{Y\},X\setminus Y)$ на $|P|$ непорожніх підмножин $X_i \subset (\{Y\},X\setminus Y)$, які взаємно не перетинаються, та відображення декластерізації θ визначається формулою: $\theta(\{Y\},X\setminus Y) = X$.

Оскільки для кумулянтів (4) груп операторів (1) на просторі $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ справедлива така оцінка: $\|\mathfrak{A}_{1+n}(t)f_{s+n}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})} \le n!e^{n+2}\|f_{s+n}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}$, для початкових станів $F^{0,\epsilon}\in\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ ряд (3) є збіжним за нормою простору $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ за умови, що $\alpha > e$, та справедлива нерівність [10]

$$\|F(t)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})} \le c_\alpha\|F(0)\|_{\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})},$$

де $c_\alpha = e^2(1-\frac{e}{\alpha})^{-1}$. Параметр α може бути інтерпретований, як величина обернено пропорційна середній кількості частинок.

Для початкових станів $F(0)\in\mathfrak{L}^1_{\alpha,0}\subset\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ послідовність (3) є сильним розв'язком задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ та для довільних початкових станів з простору $\mathfrak{L}^1_\alpha(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ – це слабкий розв'язок [10]. У випадку початкових станів, які задовольняють умову хаосу, тобто $F^{0,\epsilon}_s = \prod_{i=1}^{s}F^{0,\epsilon}_1(i)$, $s\ge 1$, ряд (3) існує за такої умови на середнє значення числа частинок: $\left\|F^{0,\epsilon}_1\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} < e^{-1}$.

Зауважимо, що непертурбативний розв'язок (3) задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ може бути перетворено до ряду теорії збурень внаслідок застосування аналогів рівнянь Дюамеля до кумулянтів (4) груп операторів [6].

ГРАНИЦЯ САМОУЗГОДЖЕНОГО ПОЛЯ МАРГІНАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ГУСТИНИ. Встановимо асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку (3) задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ в скейлінговій границі самоузгодженого поля.

Для маргінальних операторів густини (3) справедлива така гранична теорема.

Теорема 1. Нехай для початкових станів $F^{0,\epsilon}_s\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$, $s\ge 1$, існує така границя

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\epsilon^s F^{0,\epsilon}_s(1,\ldots,s) - f^0_s(1,\ldots,s)\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0\,. \tag{5}$$

Тоді у випадку обмеженого потенціалу взаємодії для довільного інтервалу часу існує границя самоузгодженого поля маргінальних операторів густини (3)

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\epsilon^s F_s(t,1,\ldots,s) - f_s(t,1,\ldots,s)\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0,\ s\ge 1, \tag{6}$$

де граничний оператор $f_s(t)$ зображується розкладом у такий ряд

$$f_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n Tr_{s+1,\ldots,s+n}\prod_{j_1=1}^{s}\mathcal{G}^*_1(t-t_1,j_1)\sum_{i_1=1}^{s}\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(i_1,s+1)\prod_{l_1=1}^{s+1}\mathcal{G}^*_1(t_1-t_2,l_1)\ldots \tag{7}$$

$$\prod_{j_n=1}^{s+n-1}\mathcal{G}_1^*(t_{n-1}-t_n,j_n)\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i_n,s+n)\prod_{l_n=1}^{s+n}\mathcal{G}_1^*(t_n,l_n)f_{s+n}^0 .$$

Якщо $f^0\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$, то ряд (7) існує і збігається за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ за умови: $t<t_0\equiv(2\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)})^{-1}$.

Зауважимо, що граничні маргінальні оператори густини (7) є розв'язком задачі Коші для граничної ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ

$$\frac{d}{dt}f_s(t)=\sum_{i=1}^{s}\mathcal{N}^*(i)f_s(t)+\sum_{i=1}^{s}\mathrm{Tr}_{s+1}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i,s+1)f_{s+1}(t), \tag{8}$$

$$f_s(t)|_{t=0}=f_s^0,\ s\geq 1, \tag{9}$$

відомої як ієрархія квантових рівнянь Власова [6].

Доведення наведених тверджень ґрунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) та використанні явного вигляду твірних операторів розкладу в ряд маргінальних операторів густини (3).

Дійсно, доведемо почленну збіжність рядів (3) та (7).

Для кумулянта першого порядку $\mathfrak{A}_1(t,\{1,\ldots,s\})$ асимптотично збурених груп операторів (1) у випадку обмеженого потенціалу взаємодії справедлива рівність [14]

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\left(\mathcal{G}_s^*(t,1,\ldots,s)-\prod_{j=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t,j)\right)_s(1,\ldots,s)\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0, \tag{10}$$

яка є наслідком виконання для груп операторів (1) рівняння Дюамеля

$$\left(\mathcal{G}_s^*(t,1,\ldots,s)-\prod_{l=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t,l)\right)f_s=\epsilon\int_0^t d\tau\prod_{l=1}^{s}\bigotimes\bigoplus\ \mathcal{G}_1^*(t-\tau,l)\sum_{i<j=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i,j)\,\mathcal{G}_s^*(\tau)f_s, \tag{11}$$

де $f_s\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$. Дійсно, оскільки рівняння (11) справджується для $f_s\in\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_s)\subset\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$ і, враховуючи, що $\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_s)$ – підпростір простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$, рівність (11) справедлива і для довільних $f_s\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$, група операторів $\mathcal{G}_s^*(t)$ є ізометричною та оператор $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i,j)$ є обмеженим. Інтеграл в рівнянні (11) існує в сенсі сильної збіжності, і підінтегральний вираз $\prod_{l=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t-\tau,l)\sum_{i<j=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i,j)\mathcal{G}_s^*(\tau)$ для кожного оператора $f_s\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)$ є сильно неперервним за τ і отже є інтегрованим. Таким чином, справедливість рівності (10) є наслідком оцінки

$$\left\|\left(\mathcal{G}_s^*(t,1,\ldots,s)-\prod_{l=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t,l)\right)f_s\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}\leq\epsilon\int_0^t d\tau\left\|\prod_{l=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t-\tau,l)\sum_{i<j=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i,j)\ \mathcal{G}_s^*(\tau)f_s\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}\leq$$

$$\leq\epsilon ts(s-1)\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)}\|f_s\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}$$

Відповідно, для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) довільного порядку виконуються такі рівності

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\frac{1}{\epsilon^n}\frac{1}{n!}\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)f_{s+n}-\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\prod_{j=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t-t_1,j)\sum_{i_1=1}^{s}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i_1,s+1)\prod_{j_1=1}^{s+1}\mathcal{G}_1^*(t_1-t_2,j_1)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\prod_{j_{n-1}=1}^{s+n-1}\mathcal{G}_1^*(t_{n-1}-t_n,j_{n-1})\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i_n,s+n)\prod_{j_n=1}^{s+n}\mathcal{G}_1^*(t_n,j_n)f_{s+n}\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}=0.$$

Внаслідок збіжності рядів (3) та (7) на скінченому проміжку часу залишки цих рядів можуть бути обмежені як завгодно малими числами для достатньо великих значень $n=n_0$ незалежно від параметру ϵ. Тоді згідно рівностей (10), (15) для кожного числа n має місце почленна збіжність цих рядів. Єдиність послідовності граничних операторів (7) є наслідком рівномірної збіжності в границі самоузгодженого поля.

ВЛАСТИВІСТЬ ПОШИРЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ХАОСУ. Як відомо [12], розв'язок задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (8), (9) задовольняє умову поширення початкового хаосу [1], яка означає відсутність кореляцій між частинками у початковому стані, тобто у випадку системи багатьох частинок, які задовольняють статистиці Максвелла – Больцмана, початковий стан визначається послідовністю

$$F(t)\big|_{t=0}=F^{(c)}\equiv\left(I,F_1^{0,\epsilon}(1),\ldots,\prod_{i=1}^{s}F_1^{o,\epsilon}(i),\ldots\right). \tag{12}$$

У цьому випадку кореляції станів не народжуються в процесі еволюції системи. Доведемо зазначену властивість для границі самоузгодженого поля послідовності (3).

Для цього визначимо маргінальні кореляційні оператори за допомогою кластерних розкладів [6] маргінальних операторів густини (3):

$$F_1(t,1)=G_1(t,1), \tag{13}$$

$$F_s(t,1,\ldots,s)=\prod_{i=1}^{s}F_1(t,i)+\sum_{\substack{P:\{1,\ldots,s\}=\bigcup_i X_i,\\ |P|\neq s}}\prod_{X_i\subset P}G_{|X_i|}(t,X_i),\ s\geq 2,$$

де використано позначення аналогічні до прийнятих у формулі (4). Тоді для початкових станів (12) послідовність маргінальних кореляційних операторів визначається такими розкладами в ряд [6]:

$$G_1(t,1)=F_1(t,1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{2,\ldots,n+1}\mathfrak{A}_{1+n}(t,1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^{0,\epsilon}(i), \tag{14}$$

$$G_s(t,1,\ldots,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}F_1^{0,\epsilon}(i),\ s\geq 2,$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{s+n}(t)$ розкладів в ряд (14) є кумулянтом $(s+n)$-го порядку груп операторів (1).

Внаслідок виконання рівності (10), для довільного інтервалу часу маємо

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\frac{1}{\epsilon^n}\mathfrak{A}_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)f_{s+n}\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{s+n})}=0,\ s\geq 2. \tag{15}$$

Нехай

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\epsilon F_1^{0,\epsilon}-f_1^0\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}=0\ . \tag{16}$$

Тоді границя самоузгодженого поля послідовності (12) також задовольняє умову хаосу, тобто граничний стан визначається послідовністю $f^{(c)}\equiv(I,f_1^0(1),\ldots,\prod_{i=1}^{s}f_1^0(i),\ldots)$.

Тоді згідно рівності (15) для маргінальних кореляційних операторів (14) справедливі такі рівності

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\ \epsilon^s G_s(t)\ \right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0,\ s\geq 2, \tag{17}$$

та аналогічно до теореми 1 для одночастинкового оператора густини маємо

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\ \epsilon F_1(t,1)-f_1(t,1)\ \|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}=0,$$

де граничний оператор визначається таким розкладом в ряд

$$f_1(t,1)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n Tr_{2,\ldots,n+1}\prod_{i_1=1}^{1}\mathcal{G}_1^*(t-t_1,i_1)\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}\mathcal{G}_1^*(t_1-t_2,j_1)\ldots \tag{18}$$

$$\prod_{i_n=1}^{n}\mathcal{G}_1^*(t_n-t_n,i_n)\sum_{k_n=1}^{n}\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(k_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1}\mathcal{G}_1^*(t_n,j_n)\prod_{i=1}^{n+1}f_1^0(i).$$

Ряд (18) є сильно збіжним за умови: $t<t_0\equiv\left(2\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)}\left\|f_1^0\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\right)^{-1}$.

Внаслідок кластерного розкладу (13) та згідно рівностей (17) за умови (16) встановлюємо властивість поширення початкового хаосу в границі самоузгодженого поля для послідовності (3)

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\epsilon^s F_s(t,1,\ldots,s)-\prod_{j=1}^{s}f_1(t,j)\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0, \tag{19}$$

де оператор $f_1(t)$ визначається розкладом в ряд (18).

Зауважимо, що доведення отриманих результатів ґрунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) та використанні явного вигляду твірних операторів розкладу в ряд (14). Отримані результати можуть бути поширені на системи багатьох бозонів або ферміонів.

Відзначимо також, що внаслідок властивості поширення початкового хаосу (19) з ієрархії квантових рівнянь Власова (8) можна встановити, що граничний одночастинковий оператор, який визначається розкладом в ряд (18), задовольняє квантове кінетичне рівняння Власова [2]. Зокрема, для чистих станів, тобто $f_1(t)=|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ або в термінах ядра такого оператора $f_1(t,q,q')=\psi(t,q)\psi^*(t,q')$ квантове кінетичне рівняння Власова зводиться до рівняння Хартрі

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,q)=-\frac{1}{2}\Delta_q\psi(t,q)+\int dq'\Phi(q-q')|\psi(q')|^2\psi(t,q).$$

Якщо ядро потенціалу взаємодії $\Phi(q)=\delta(q)$ є мірою Дірака, то кінетичне рівняння Хартрі редукується до нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,q)=-\frac{1}{2}\Delta_q\psi(t,q)+|\psi(t,q)|^2\psi(t,q).$$

Таким чином, за наведених вище умов справедливе таке твердження

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\epsilon^s F_s(t)-|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|^{\otimes s}\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)}=0,$$

де $|\psi(t)\rangle$ – розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю.

ВИСНОВКИ. У данній статті, використовуючи властивості кумулянтів (4) асимптотично збурених груп операторів (1) квантових систем багатьох частинок [11], описано асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку (3) задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББҐКІ в скейлінговій границі самоузгодженого поля. Встановлено, що в такому наближенні еволюція стану системи описується за допомогою розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь Власова (8), (9).

Для початкових станів квантових систем статистично незалежних частинок (12) в границі самоузгодженого поля встановлено асимптотичну поведінку послідовності маргінальних кореляційних операторів (14), якою описується процес поширення початкового хаосу (19) за допомогою розв'язку (18) квантового кінетичного рівняння Власова.

Зауважимо, також що в [5] встановлено асимптотичну поведінку станів квантових систем багатьох частинок в скейлінговій границі самоузгодженого поля в іншій спосіб, а саме: на основі ієрархії дуальних квантових рівнянь ББҐКІ для послідовності маргінальних спостережуваних. Зокрема, такий підхід дає можливість побудови квантових кінетичних рівнянь з урахуванням кореляцій початкових станів [7], [11].

Аналогічно статті [9], наведені результати можуть бути поширені на системи багатьох ферміонів і бозонів та також на квантові системи багатьох частинок з кулонівським потенціалом взаємодії [17].

Список використаних джерел

1. Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations, the Netherlands: Springer, 2012.
2. Erdös L., Schlein B., Yau H.-T. Derivation of the cubic nonlinear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems. Invent. Math. 167, (3), 2007, 515—614.
3. Erdös L., Schlein B., Yau H.-T. Derivation of the Gross—Pitaevskii equation for the dynamics of Bose—Einstein condensate. Ann. of Math. 172, 2010, 291—370.
4. Fröhlich J., Graffi S., Schwarz S. Mean-field and classical limit of many-body Schrödinger dynamics for bosons. Commun. Math. Phys. 271, 2007, 681–697.
5. Gerasimenko V.I. Heisenberg picture of quantum kinetic evolution in mean-field limit, Kinet. Relat. Models, 4, (1), 2011, 385—399.
6. Gerasimenko V.I., Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations. (In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2013.) — P. 233—288.
7. Gerasimenko V.I. On the description of quantum correlations by means of a one-particle density operator. Proc. Inst. Math. NASU, v.14, No.1, pp. 116—127, 2017.
8. Gerasimenko V.I., Krechko V.V. On non-perturbative solution of quantum BBGKY hierarchy. Proc. Inst. Math. NASU, v.13, No.2, pp. 7—26, 2016.
9. Gerasimenko V.I., Polishchuk D.O. Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles. Math. Methods Appl. Sci., 34, (1), 2011, 76—93.
10. Gerasimenko V.I., Shtyk V.O. Initial-value problem of the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles. Ukrainian Math. J., 58, (9), 2006, 1175—1191.
11. Gerasimenko V.I., Tsvir Zh.A. On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states. Physica A: Stat. Mech. Appl. 391, (24), 2012, 6362—6366.
12. Golse F. On the dynamics of large particle systems in the mean field limit, In: Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity, Lect. Notes Appl. Math. Mech., 3, Springer, 2016, 1—144.
13. Golse F., Mouhot C., Paul T. On the mean-field and classical limits of quantum mechaics. Commun. Math. Phys. 343, 2016, 165–205.
14. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, 1995.
15. Petrina D.Ya. Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems. Kluwer, 1995.
16. Pezzotti F., Pulvirenti M. Mean-field limit and semiclassical expansion of quantum particle system. Ann. Henri Poincaré. 10, 2009, 145—187.
17. Porta M., Rademacher S., Saffirio C., Schlein B. Mean field evolution of fermions with Coulomb interaction. J. Stat. Phys., 166, (6), 2017,1345—1364.

Надійшла до редколегії 21.09.17

В. Герасименко, д-р физ.-мат. наук, проф., В. Кречко, асп.
Институт математики НАН Украины, Киев

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ИЕРАРХИИ КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ББГКИ В ГРАНИЦЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

В роботе рассмотрена проблема построения асимптотического предела самосогласованного поля непертурбативного решения задачи Коши для иерархии квантовых уравнений ББГКИ и установлено свойство распространения корреляцій состояний квантовых многочастичных систем в этом пределе.

V. Gerasimenko, Full Doctor., Prof., V. Krechko, PhD student
Institute of mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

MEAN-FIELD ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTION OF THE QUANTUM BBGKY HIERARCHY

The problem of the construction of a mean-field (self-consistent field) asymptotic behavior of a non-perturbative solution of the Cauchy problem of the quantum BBGKY hierarchy is considered and the property of the propagation of state correlations for many-particle systems is established.

УДК 517.946

А. Громик, канд.техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
e-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОГО ШАРУ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару.

ВСТУП. Теорія початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, хімії, техніки, новітніх технологій.