5. Громик А.П. Інтегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі / А.П. Громик, І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 27–37.
6. Громик А.П. Інтегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною / А.П. Громик, І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 45–55.
7. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
8. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
9. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. – 120 с.
10. Конет І.М. Гіперболічна крайова задача для необмеженого кусково-однорідного циліндра / І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2016. – Вип. 2(36). – С. 22–27.
11. Konet I. Hyperbolic boundary value problem for unlimited piecewice-homogeneous hollow cylinder / I. Konet, T. Pylypiuk // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Вип. 14. – С. 91–101.
12. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур'є-Бесселя / М.П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 2, ч. 1. – С. 89–101.
13. Митропольський Ю.А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю.А. Митропольський, Г.П. Хома, М.И. Громяк. – К.: Наук. думка. 1991. – 232 с.
14. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.
15. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными / А.М. Самойленко, Б.П. Ткач. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
16. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
17. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1962. – 292 с.
18. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 204 с.
19. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 112 с.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

Надійшла до редколегії 14.10.17

А. Громик, канд. техн. наук, доцент, И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. физ.-мат. наук
Подольский государственній аграрно-технический університет, Каменец-Подольский,
Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОГО СЛОЯ

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики для кусочно-однородного цилиндрически-кругового слоя.

A. Gromyk, PhD, I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDRICALLY CIRCULAR LAYER

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for piecewise-homogeneous cylindrically-circular layer is constructed for the first time.

УДК 517.946

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
e-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОГО ШАРУ З ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з порожниною.

ВСТУП. Відомо, що різноманітні прикладні задачі сучасної теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [5, 10].

Для досить широкого класу лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 6–8].

У цій статті, яка є логічним продовженням [4], ми пропонуємо інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної початково-крайової задачі для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з циліндричною порожниною.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D=\{(t,r,\varphi,z):t>0;r\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}I_j\equiv\bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1};R_j),\,R_0>0,\,R_{n+1}=+\infty;\qquad \varphi\in[0;2\pi);z\in(-l_1;l_2),\,l_1\ge 0,\,l_2\ge 0,\,l_1+l_2\ne 0\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [9].

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+\chi_j^2u_j=f_j(t,r,\varphi,z);\;\; r\in I_j;\;\; j=\overline{1,n+1}\,; \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0}=g_j^1(r,\varphi,z);\;\; \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_j^2(r,\varphi,z);\;\; r\in I_j;\;\; j=\overline{1,n+1}\,; \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)u_1\Big|_{r=R_0}=g_0(t,\varphi,z);\;\; \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\Big|_{r=+\infty}=0;\quad s=0,1; \tag{3}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z}+p_1\right)u_j\Big|_{z=-l_1}=w_j^1(t,r,\varphi);\;\; \left(\frac{\partial}{\partial z}+p_2\right)u_j\Big|_{z=l_2}=w_j^2(t,r,\varphi);\qquad r\in I_j;\; j=\overline{1,n+1}\,; \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k}=0;\;\; j=1,2;\;\; k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, p_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі;

$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\ne 0;\;\; c_{1k}\cdot c_{2k}>0;\;\; \alpha_{11}^0\le 0,\;\; \beta_{11}^0\ge 0;\;\; \left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\ne 0;$

$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};\;\; g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$

$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\};\; w^1(t,r,\varphi)=\{w_1^1(t,r,\varphi),w_2^1(t,r,\varphi),\ldots,w_{n+1}^1(t,r,\varphi)\};$

$w^2(t,r,\varphi)=\{w_1^2(t,r,\varphi),w_2^2(t,r,\varphi),\ldots,w_{n+1}^2(t,r,\varphi)\};\;\; g_0(t,\varphi,z)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$ – шукана функція.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ. Вважаємо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [6, 11, 1].

Побудований за методикою, розвинутою в [4] для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару, методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1;l_2)$ щодо змінної z [6], скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [11] та гібридного інтегрального перетворення типу Вебера на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [1], єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5) визначають функції

$$\begin{aligned}u_j(t,r,\varphi,z)&=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+\\&+\sum_{k=1}^{n+1}a_{zk}^2\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}[W_{jk}^1(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z)w_k^1(\tau,\rho,\alpha)+W_{jk}^2(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z)w_k^2(\tau,\rho,\alpha)]\sigma_k\rho\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-l_1}^{l_2}W_{jr}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)g_0(\tau,\alpha,\xi)\,d\xi\,d\alpha\,d\rho\,d\tau;\;\; j=\overline{1,n+1}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

У формулах (6) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\varepsilon_m G_s(t,\lambda)V_j(r,\lambda)V_k(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)\|v_s(z+l_1)\|^{-2}\cos(m\varphi);\;\; j,k=\overline{1,n+1}$$

матриці впливу (функції впливу) $E(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$, компоненти $W^1_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)=E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,-l_1)$ нижньої тангенціальної матриці Гріна (нижні тангенціальні функції Гріна) $W^1(t,r,\rho,\varphi,z)$, компоненти $W^2_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)=E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,l_2)$ верхньої тангенціальної матриці Гріна (верхні тангенціальні функції Гріна) $W^2(t,r,\rho,\varphi,z)$ та компоненти $W_{jr}(t,r,\varphi,z,\xi)=-a_1^2R_0\sigma_1(\alpha^0_{11})^{-1}E_{j1}(t,r,R_0,\varphi,z,\xi)$ радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) $W(t,r,\varphi,z,\xi)$ розглянутої задачі, де функція Коші (розв'язуюча функція) $G_s(t,\lambda)=\dfrac{\sin(\Delta_s(\lambda)t)}{\Delta_s(\lambda)}$, $\Delta_s^2(\lambda)=\lambda^2+a_{z1}^2\gamma_s^2+\chi_1^2$.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W^p_{\mathrm{jk}}(t,r,\rho,\varphi,z)$, $p=1,2$, $W_{jr}(t,r,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, які визначено формулами (6), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [12].

Єдиність розв'язку (6) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) задачі (1)–(5).

Методами з [2, 12] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (6) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладених вище міркувань є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^p(r,\varphi,z)$, $w_j^p(t,r,\varphi)$, $p=1,2$, задовольняють умови:

5) двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
6) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
7) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r)=r\sigma(r)$ на осі I_n^+;
8) справджують умови спряження, а функція $g_0(t,\varphi,z)$ – двічі неперервно диференційовна за кожною змінною і має обмежену варіацію за геометричними змінними, то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (6).

<u>Зауваження 1.</u> У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (6) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)-(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому шарі з циліндричною порожниною.

<u>Зауваження 2.</u> Параметри $\alpha^0_{11},\beta^0_{11}$ дозволяють виділяти з формул (6) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r=R_0$ крайової умови 1-го роду $(\alpha^0_{11}=0,\beta^0_{11}=1)$, 2-го роду $(\alpha^0_{11}=-1,\beta^0_{11}=0)$ та 3-го роду $(\alpha^0_{11}=-1,\beta^0_{11}\equiv\beta>0)$.

<u>Зауваження 3.</u> Параметри p_j $(j=1,2)$ дозволяють виділяти з формул (6) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z=-l_1$, $z=l_2$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 2-1, 2-2).

<u>Зауваження 4.</u> У випадку $\chi_j\equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань, рівнянням Даламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

<u>Зауваження 5.</u> Якщо $\alpha^k_{11}=0,\ \beta^k_{11}=1;\ \alpha^k_{12}=0,\ \beta^k_{12}=1;\ \alpha^k_{21}=E^k_1,\ \beta^k_{21}=0;\ \alpha^k_{22}=E^k_2,\ \beta^k_{22}=0,$ де E^k_1, E^k_2 – модулі Юнга ($k=\overline{1,n}$,), умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю вимушених коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому шарі з циліндричною порожниною.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару з циліндричною порожниною. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел

1. Быблив О.Я. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси / О.Я. Быблив, М.П. Ленюк // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 7. – С. 3–11.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Громик А.П. Гіперболічна крайова задача для кусково-однорідного циліндрично-кругового шару / А.П. Громик, І.М. Конет, Т.М. Пилипюк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2018. – Вип. 1(39). – С. 19.

5. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998.
6. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2001.
7. Конет І.М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013.
8. Конет І.М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І.М. Конет, Т.М. Пилипюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016.
9. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К.: Либідь, 2006.
10. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991.
11. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат, 1956.
12. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 14.10.17

А. Громик, канд. техн. наук, доцент, И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. физ.-мат. наук
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольский,
Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики для кусочно-однородного цилиндрически-кругового слоя с полостью.

A. Gromyk, PhD, I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDRICALLY CIRCULAR LAYER WITH CAVITY

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for piecewise-homogeneous cylindrically-circular layer with cavity is constructed for the first time.

УДК 519.21

І. Мацак, д-р фіз.-мат. наук, О. Скуржанський, студ.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: ivanmatsak@univ.kiev.ua, alexskurzh97@gmail.com

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСУГОВУВАННЯ

Вивчається асимптотика екстремальних значень регенеруючих випадкових послідовностей. Як наслідки встановлюються граничні теореми для максимальної довжини черги в системах масового обслуговування. За допомогою імітаційного моделювання знаходяться оцінки швидкості збіжності.

Вступ. Розглянемо m-канальну систему масового обслуговування (СМО) на інтервалі $0 \le t < \infty$. Нехай – $t_0 = 0,\ t_1, \ldots, t_n, \ldots$ випадкові моменти находження заявок в СМО. Припустимо, що $\tau_n = t_n - t_{n-1}, n \ge 1$ – це незалежні однаково розподілені випадкові величини (н. о. р. в. в.) з функцією розподілу $F(x) = P(\tau_n < x),\ F(0+) = 0$. І нехай час обслуговування заявки одним каналом $\eta_n,\ n \ge 0$ також н. о. р. в. в., $G(x) = P(\eta_n < x),\ G(0+) = 0$. Тобто в загальноприйнятих позначеннях це СМО типу (GI/G/m) (див. [1; 3; 5]).

Під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальне число заявок, які знаходяться на обслуговуванні або чекають його. Через $Q(t)$ позначимо довжину черги в момент часу t, а $\overline{Q}(t) = \sup\limits_{1 \le s \le t} Q(t)$

Нехай

$$Q_k = Q(t_k - 0), \quad \overline{Q}_n = \max_{1 \le k \le n} Q_k, \tag{1}$$

тобто Q_k – це довжина черги в системі безпосередньо перед надходженням *k*-ї заявки, а $\overline{Q}_n$ – максимальна довжина черги, яка спостерігалась в моменти $(t_k - 0),\ k = 1, 2, \ldots, n$.

У [2, c. 248–249; 10–14] досліджувалась асимптотична поведінка величин $\overline{Q}(t)$ та $\overline{Q}_n$ При цьому основна увага приділялась випадку з лінійним нормуванням цих величин. Але, як виявилось, далеко не завжди при лінійному нормуванні $\overline{Q}(t)$ та $\overline{Q}_n$ існує невироджений граничний розподіл.

У [4] для дослідження асимптотики $\overline{Q}(t)$ запропоновано інший підхід, при якому використовувались нелінійні перетворення часу. Так наприклад для класичної СМО (M/M/m) (та деяких інших) в [4] отримано рівності вигляду:

$$\lim_{u \in N, u \to \infty} P(\overline{Q}(t^*) \ge u) = 1 - e^{-\frac{x}{a_T}},\ \ x \ge 0, \tag{2}$$

де $t^* = \dfrac{x}{q(u)}$, $q(u)$ – ймовірність перевищення рівня u процесом $Q(t)$ на одному циклі регенерації, a_T – середня тривалість циклу регенерації.