

10. Anderson C.W. Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes, J.Appl. Prob., v. 7,1970, – p. 99–113.
11. Asmussen S. Extreme values theory for queues via cycle maxima, Extremes, v. 1, 1998, – p. 137–168.
12. Cohen J.W. Extreme values distribution for the M/G/1 and GI/M/1 queueing systems, Ann. Inst. H. Poincare., Sect.B, v.4, 1968, – p. 83–98.
13. Iglehart D.L. Extreme values in the GI/G/1 queue, Ann. Math. Statist., v. 43, 1972, – p. 627–635.
14. Serfozo R.F. Extreme values of birth and death processes and queues, Stochastic processes and their applications, 27, 1988, – p. 291–306.

Надійшла до редколегії 29.05.18

И. Мацак., д-р физ.-мат. наук, А. Скуржанский, студ.
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Изучается асимптотика экстремальных значений регенерирующих случайных последовательностей. Как следствие получены предельные теоремы для максимальной длины очереди в системах массового обслуживания. С помощью имитационного моделирования находятся оценки скорости сходимости.

I. Matsak, Dr. of Phys. Math. O.Sci., A. Skurzhanyskiy, a student
 Taras Shevchenko National University of Kyiv

LIMIT THEOREMS FOR EXTREME VALUES OF QUEUE LENGTH IN THE THEORY OF QUEUES

Asymptotic of extreme values of regenerating random sequences is considered. As a result, limit theorems are obtained for the maximum queue length in queuing systems. Estimates of the rate of convergence are found, using simulation modeling.

УДК 629.7.076.6

Б. Кіфоренко, д.-р. фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко, канд. фіз.-мат. наук,
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ,
 І. Василь'єв, канд. фіз.-мат. наук,
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
 e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net, e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДОВ МІЖ БЛИЗЬКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОРБИТАМИ ЗІ СТАЛОЮ МАЛОЮ ТЯГОЮ

Розв'язано задачу про оптимальний перехід міжорбітального транспортного апарату (МТА) з рушійною системою малої сталої тяги між близькими еліптичними орбітами протягом одного оберту навколо гравітаційного центру. Метою оптимізації є отримання максимуму маси корисного вантажу МТА при заданій його початковій масі. На прикладах конкретних маневрів проведено оцінку впливу величини сталої тяги на значення маси корисного вантажу у порівнянні з випадком використання ідеально керованої рушійної системи.

ВСТУП. Електроракетні рушійні системи (ЕРС) відносяться до класу рушійних систем малої тяги і мають важливі переваги перед традиційними рідинними та твердопаливними ракетними двигунами. Висока швидкість витікання реактивного струменя забезпечує малу витрату робочої речовини на одиницю тяги, а використання електростатичної та магнітної взаємодії між конструкцією двигуна та реактивним струменем – кращу керованість та здатність неперервно функціонувати протягом тривалого часу. З огляду на вказане ці двигуни вважаються перспективними маршовими рушіями для МТА, призначених для доставки великих космічних конструкцій з низької монтажною орбіти на віддалені орбіти в навколопланетному просторі та міжпланетні орбіти, хоча і при значному збільшенні тривалості міжорбітального переходу.

Найбільш суттєві результати в розробці методів розв'язання проблеми сумісної оптимізації параметрів двигуна, керування рухом та перехідних траєкторій в процесі розв'язання єдиної варіаційної задачі отримані при використанні математичної моделі ідеально керованої ЕРС. Реальні ж двигуни мають обмежений діапазон зміни величин тяги та швидкості ракетного струменя. При цьому нелінійність рівнянь руху центру мас МТА суттєво ускладнює розв'язання відповідної двоточкової крайової задачі [2, 7]. У цій статті пропонується алгоритм обчислення розв'язку вказаної задачі на ПЕОМ для моделі ЕРС: постійної за величиною тяги. З використанням розробленого алгоритму досліджено вплив максимальної тяги двигуна на величину корисного вантажу при виконанні елементарних маневрів МТА в центральному гравітаційному полі за час одного оберту навколо центру тяжіння.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Рушійна система МТА складається з двигуна, що генерує реактивну тягу P , та джерела енергії для живлення двигуна. Модель ідеально керованої рушійної системи базується на відсутності обмежень на величину тяги двигуна та на припущенні пропорційності мас її складових максимальній потужності джерела N_0

$$M_v = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_0, \quad (1)$$

де M_v – маса джерела енергії, M_γ – маса двигуна, а α та γ – їх питомі маси [1]. При цьому використання рівняння зміни маси МТА у формі

$$\dot{M} = -\frac{M^2 \vec{W}^2}{2N_\Gamma} \quad (2)$$

дозволяє проблему максимізації маси корисного вантажу МТА, що виконує довільний маневр, розділити на дві незалежні задачі – масову та траєкторну. У рівнянні (2) \vec{W} – вектор реактивного прискорення, а N_Γ – поточне значення потужності, підведеної до двигуна.

Траєкторна задача полягає у визначенні програми реактивного прискорення \vec{W} , яка забезпечує перехід з початкового положення в кінцеве з мінімальним значенням функціоналу

$$J = (1 + \varepsilon) \int_0^T \bar{W}^2 dt,$$

де T – час виконання маневру, а $\varepsilon = \gamma/\alpha$.

Масова задача полягає у визначенні оптимальних мас складових МТА та має аналітичний розв'язок

$$M_\pi = M_0 (\sqrt{\Phi} - 1)^2, \quad M_\gamma = \frac{M_0 \varepsilon (\sqrt{\Phi} - \Phi)}{1 + \varepsilon},$$

$$M_v = \frac{M_0 (\sqrt{\Phi} - \Phi)}{1 + \varepsilon}, \quad M_F = M_0 \sqrt{\Phi}, \quad \Phi = \frac{\alpha r^{*2}}{2T^{*3}} J,$$

де M_π – маса корисного вантажу, M_0 – початкова маса МТА, M_F – маса витраченої за час виконання маневру робочої речовини, r^* – характерний лінійний розмір, T^* – характерний час, який дорівнює періоду обертання по круговій орбіті радіуса r^* , розділеному на 2π .

Проте модель ідеально керованої рушійної системи не дозволяє враховувати особливості реальних ЕРД, наприклад, сталість по модулю (для двигунів сталої тяги), або обмеженість тяги (для будь-якого реального двигуна).

В даній статті дослідимо задачу максимізації маси корисного вантажу МТА з рушійною системою сталої (за модулем) тяги. В цьому випадку керування рухом МТА відбувається за рахунок зміни напрямку тяги та вмикання і вимкнення двигуна. Отже рівняння зміни маси (2) запишемо у формі

$$\dot{M} = -\frac{P_c^2 \delta}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; N_0], \quad (3)$$

де P_c – значення сталої тяги, δ – керуюча функція, яка дорівнює 1 при увімкненому (активна дуга перехідної траєкторії) та 0 при вимкненому двигуні (пасивна дуга перехідної траєкторії). У подальшому всі співвідношення записані в безрозмірній формі.

До наведених вище характерних величин додаються початкова маса МТА M_0 , максимальна потужність джерела енергії N_0 та P^* – гравітаційна сила, що діє на матеріальну точку масою M_0 на відстані r^* від гравітаційного центру. При такому виборі характерних величин співвідношення (3) у безрозмірній формі матимуть вигляд

$$\frac{dm}{dt} = -\zeta \frac{1}{m_\nu} \frac{P_c^2 \delta}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1]. \quad (4)$$

Тут $\zeta = T^* K^2 \alpha (r^*)^{-4}$, K – гравітаційна стала планети.

Починаючи з формули (4), безрозмірні значення мас, тяги та потужності позначаються відповідними малими літерами.

Моделювати рух центру мас МТА будемо за допомогою рівнянь руху в оскулюючих змінних з наступним набором орбітальних параметрів: $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ – натуральний логарифм кутового моменту (тут a – велика піввісь), e – ексцентриситет, ω – кутова відстань перицентра до висхідного вузла, I – кут нахилу площини орбіти, Ω – довгота висхідного вузла, E – ексцентрична аномалія. У цьому випадку вказані безрозмірні рівняння руху мають вигляд [3]

$$\frac{dx_j}{dt} = \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_k, \quad (5)$$

$$\frac{dE}{dt} = F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_k, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3},$$

де $\bar{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$, W_k , $k = \overline{1, 3}$, – проєкції вектора реактивного прискорення на радіальний, трансверсальний та нормальний до площини орбіти напрямки, а коефіцієнти F_{jk} визначаються за формулами

$$F_{11} = 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E};$$

$$F_{23} = 0; \quad F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)} \sin E;$$

$$F_{33} = -ctg I \left(\frac{\sin \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E \right); \quad (6)$$

$$F_{41} = F_{42} = 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E; \quad F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33};$$

$$F_{60} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{\exp(3\vartheta) (1 - e \cos E)}; \quad F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad F_{62} = -\frac{2 - e \cos E}{e(1 - e \cos E)} \sin E;$$

$$F_{63} = 0.$$

Записані у формі (5) рівняння руху не дають змогу врахувати сталість модуля вектора тяги. Для подолання цієї незручності введемо напрямні косинуси c_k , $k = \overline{1,3}$, та виразимо складові вектора реактивного прискорення через поточну масу МТА та відповідні проекції вектора тяги

$$W_k = p_c \delta c_k / m, \quad k = \overline{1,3}. \quad (7)$$

За властивістю напрямних косинусів на величини c_k , $k = \overline{1,3}$, накладено обмеження

$$\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1. \quad (8)$$

Отже, співвідношення (4), (5) та (7) дозволяють записати математичну постановку задачі оптимального керування про перехід МТА з заданої початкової орбіти на задану кінцеву за фіксований час T з максимальною масою корисного вантажу m_π . Позначивши через \bar{x}_0 та \bar{x}_1 орбітальні параметри початкової та кінцевої орбіти, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\zeta \frac{1}{m} \frac{p_c^2 \delta}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad m(0) = m_0, \quad m_\pi = m(T) - m_v(1 + \varepsilon) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{1}{m} \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p_c \delta c_k, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_1, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \frac{1}{m} \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} p_c \delta c_k, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}, \quad E(0) = E_0, \\ \sum_{k=1}^3 c_k^2 &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Відповідно до вибору характерних величин маємо $m(0) = m_0 = 1$. Задача (9) являє собою нелінійну задачу оптимального керування, яка полягає у визначенні законів зміни у часі напрямних косинусів c_k , $k = \overline{1,3}$, та поточної потужності двигуна n_Γ , функції δ , що визначає розподіл активних та пасивних дуг вздовж перехідної траєкторії, та маси джерела енергії m_v , які забезпечують максимум маси корисного вантажу. В [6] описано метод, який дозволяє будувати оптимальні траєкторії переходів між віддаленими орбітами протягом багатьох обертів навколо гравітаційного центру для МТА з ідеально керованою рушійною системою, який може бути розповсюджений на випадок оптимізації перельотів МТА з рушійною системою сталої тяги. Цей метод базується на розв'язку задачі про оптимальний перехід між близькими орбітами протягом одного оберту навколо гравітаційного центру. Тому у даній статті знайдено розв'язок оптимізаційної задачі про такий перехід для МТА з рушійною системою сталої тяги, який слугуватиме базою для розв'язування задач про переходи між довільними орбітами, а також може мати і цілком самостійне значення, наприклад, для задач корекції орбіт.

Для близьких орбіт можемо записати

$$\bar{x}(T) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}$$

де $\bar{\Delta} = [\Delta_\vartheta, \Delta_e, \Delta_\omega, \Delta_J, \Delta_\Omega]$ – вектор малих приростів відповідних орбітальних параметрів. Як і в [4 – 6] розкладемо в ряд праві частини рівнянь руху зі співвідношень (8) в околі початкової орбіти. Приймаючи до уваги малість величин $\bar{\Delta}$ та p_c (ЕРД – двигуни малої тяги), відкинемо члени другого і вище порядків малості. Після переходу від незалежної змінної t до незалежної змінної E отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m} \frac{p_c^2 \delta}{2n_\Gamma}, \quad n_\Gamma \in [0; 1], \quad m(E_0) = 1, \quad m_\pi = m(E_0 + 2\pi) - m_v(1 + \varepsilon) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_j}{dE} &= \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p_c \delta c_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \\ \sum_{k=1}^3 c_k^2 &= 1, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (10)$$

де $\hat{F}_E = 1/F_{60}(E, \bar{x}_0)$, $F_E = \exp(J_0) \hat{F}_E$.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ. Для знаходження оптимальних керувань задачі (10) використаємо принцип максимуму Понтрягіна. Побудуємо гамільтоніан

$$H = -\psi_m \hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{p_c^2 \delta}{m} + \frac{p_c F_E \delta}{m} [\psi_1 F_{12} c_2 + \psi_2 (F_{21} c_1 + F_{22} c_2) + \psi_3 (F_{31} c_1 + F_{32} c_2 + F_{33} c_3) + \psi_4 F_{43} c_3 + \psi_5 F_{53} c_3], \quad (11)$$

де ψ_m та ψ_j , $j = \overline{1,5}$, система спряжених функцій, які визначаються з системи рівнянь

$$\frac{d\psi_m}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial m}, \quad \frac{d\psi_j}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Дослідивши функцію H (11) на максимум з врахуванням обмеження (8) за допомогою метода множників Лагранжа, отримаємо

$$n_{\Gamma} = 1, \quad c_k = \frac{A_k}{A}, k = \overline{1, 3}, \quad \delta = \begin{cases} 0, & B \leq 0, \\ 1, & B > 0, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$A_1 = \Psi_2 F_{21} + \Psi_3 F_{31}, \quad A_2 = \Psi_1 F_{12} + \Psi_2 F_{22} + \Psi_3 F_{32}, \quad A_3 = \Psi_3 F_{33} + \Psi_4 F_{43} + \Psi_5 F_{53}, \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad (14)$$

$$B = -\Psi_m \hat{F}_E \frac{\zeta}{m_v} \frac{p_c^2}{2} + \frac{p_c F_E}{m} A.$$

З математичної постановки задачі (10) випливає, що гамільтоніан (11) не залежить від компонентів фазового вектора x_j , тому згідно з другим рівнянням в (12) спряжені функції ψ_j будуть сталими, які позначимо

$$\psi_j = \lambda_j. \quad (15)$$

Функція ψ_m у відповідності до співвідношень (10)–(12), визначається з рівняння

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{p_c F_E}{m^2} A \delta, \quad (16)$$

яке для доповнене однозначної розв'язності потрібно доповнити початковою, або кінцевою умовою. Таку кінцеву умову знайдемо з умов трансверсальності, завдяки тому що маса m в кінцевій точці не задана, а знаходиться з умови максимуму маси корисного вантажу. Ця умова має вигляд

$$\psi_m(E_0 + 2\pi) = 1. \quad (17)$$

Формули (13) – (16) дозволяють звести задачу оптимального керування (10) до крайової задачі з параметром m_v вигляду

$$\frac{dm}{dE} = -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_v} \frac{p_c^2 \delta}{2}, \quad m(E_0) = 1, \quad (18)$$

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p_c \delta \frac{A_k}{A}, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta},$$

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{p_c F_E}{m^2} A \delta, \quad \psi_m(E_0 + 2\pi) = 1,$$

Розв'язавши задачу (18) чисельно методом стрільби при фіксованому значенні параметра m_v , знаходимо невідомі сталі λ_j , $j = \overline{1, 5}$, та $\psi_m(E_0)$ і відповідне значення маси корисного вантажу $m_{\pi} = m(E_0 + 2\pi) - (1 + \epsilon)m_v$, тобто отримаємо значення маси корисного вантажу, як функцію $m_{\pi} = m_{\pi}(m_v)$. Оптимальне значення безрозмірної маси джерела енергії m_v знаходимо з умови максимуму функції $m_{\pi} = m_{\pi}(m_v)$ чисельним методом золотого перерізу. Початкові наближення λ_j^0 , $j = \overline{1, 5}$ $\psi_m^0(E_0)$ приймаємо рівними відповідним величинам, отриманим із розв'язку задачі з ідеально керованим двигуном.

ЗАДАЧА З ІДЕАЛЬНО КЕРОВАНИМ ДВИГУНОМ. При оптимізації перельотів МТА з моделлю ідеально керованого двигуна, як правило, за керування вибирають компоненти вектора реактивного прискорення. Зручність такого підходу описана вище. Однак нам для знаходження початкових наближень для випадку двигуна сталої тяги необхідно мати розв'язок задачі з ідеально керованим двигуном, де керуваннями будуть величина тяги p та напрямні косинуси c_k . У цьому випадку співвідношення (10) матимуть вигляд

$$\frac{dm}{dE} = -\hat{F}_E(E, \bar{x}_0) \zeta \frac{1}{m_v} \frac{p^2}{2n_{\Gamma}}, \quad n_{\Gamma} \in [0; 1], \quad m(E_0) = 1, \quad m_{\pi} = m(E_0 + 2\pi) - m_v(1 + \epsilon) \rightarrow \max,$$

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{1}{m} F_E(E, \bar{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_0) p c_k, \quad \bar{x}(E_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(E_0 + 2\pi) = \bar{x}_0 + \bar{\Delta}, \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 1, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Згідно з принципом максимуму складаємо гамільтоніан

$$H = -\Psi_m \hat{F}_E \frac{\zeta}{m_v} \frac{p^2}{2n_{\Gamma}} + \frac{p F_E}{m} [\Psi_1 F_{12} c_2 + \Psi_2 (F_{21} c_1 + F_{22} c_2) + \Psi_3 (F_{31} c_1 + F_{32} c_2 + F_{33} c_3) + \Psi_4 F_{43} c_3 + \Psi_5 F_{53} c_3]. \quad (20)$$

З умови максимуму гамільтоніана H стосовно керувань p, c_k, n_{Γ} знаходимо

$$n_{\Gamma} = 1, \quad c_k = \frac{A_k}{A}, k = \overline{1, 3}, \quad p = \frac{m_v}{\zeta} \frac{1}{\Psi_m m} \exp(\vartheta_0) A, \quad (21)$$

де величини A_k, A визначаються формулами (14).

З системи рівнянь для спряжених функцій (12) отримуємо рівняння для ψ_m

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \frac{p F_E A}{m^2}, \quad (22)$$

а функції ψ_j , як і в попередньому випадку, лишаються сталими $\psi_j = \lambda_j$. За допомогою останнього співвідношення в (21) виключимо A з рівняння (22). Тоді маємо

$$\frac{d\psi_m}{dE} = \hat{F}_E \frac{\zeta}{m_v} p^2 \frac{\psi_m}{m}. \quad (23)$$

Приймаючи до уваги перше рівняння в (19), запишемо рівняння (23) у вигляді $\frac{d\Psi_m}{dE} = -2 \frac{dm}{dE} \frac{\Psi_m}{m}$, інтегруючи яке, знаходимо

$$m^2 \Psi_m = c_m = \text{const.} \tag{24}$$

Підставимо знайдені вирази для керувань (21) в рівняння руху з системи (19). Отримаємо

$$\frac{dx_j}{dE} = \frac{m_v}{\zeta} F_E^* \sum_{k=1}^3 F_{jk} \frac{A_k}{c_m}, \tag{25}$$

де $F_E^* = \exp(\vartheta_0) F_E$. Множник A_k / c_m подамо в явному вигляді у відповідності до (14)

$$\frac{A_1}{c_m} = \frac{\lambda_2}{c_m} F_{21} + \frac{\lambda_3}{c_m} F_{31}, \quad \frac{A_2}{c_m} = \frac{\lambda_1}{c_m} F_{12} + \frac{\lambda_2}{c_m} F_{22} + \frac{\lambda_3}{c_m} F_{32}, \quad \frac{A_3}{c_m} = \frac{\lambda_3}{c_m} F_{33} + \frac{\lambda_4}{c_m} F_{43} + \frac{\lambda_5}{c_m} F_{53},$$

звідки, впливає можливість, не втрачаючи загальності, константу c_m у формулі (24) покласти рівною 1. Тому

$\Psi_m = m^{-2}$. Тепер рівняння зміни маси (перше рівняння в (19)) набуде вигляду $\frac{dm}{dE} = -\frac{1}{2} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* m^2 A^2$. Звідси випливає

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m^2} = -\frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* A^2 dE. \tag{26}$$

Позначимо

$$J_p = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{m_v}{\zeta} F_E^* A^2 dE.$$

Легко бачити, що

$$J_p = \frac{1}{2} \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \sum_{j=1}^5 \left(\lambda_j \frac{dx_j}{dE} \right) dE, \tag{27}$$

звідки знаходимо

$$J_p = \frac{1}{2} \bar{\lambda} \bar{\Delta}, \tag{28}$$

де $\bar{\lambda}$ – вектор з компонентами $\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]$. Інтегруючи рівняння (26) з врахуванням позначення (27) знайдемо вираз для маси корисного вантажу

$$m_\pi = \frac{m_0}{1 + m_0 J_p} - m_v (1 + \varepsilon). \tag{29}$$

Для знаходження невідомих λ_j проінтегруємо систему рівнянь руху (25). Завдяки тому, що праві частини не залежать від фазового вектора, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих λ_j , яка має розв'язок

$$\bar{\lambda}(m_v) = \left(\int_{E_0}^{E_0+2\pi} \Phi(E, \bar{x}_0, m_v) \right)^{-1} \bar{\Delta}, \tag{30}$$

де матриця $\Phi(E, \bar{x}_0, m_v)$ визначається наступним чином

$$\Phi(E, \bar{x}_0, m_v) = \frac{m_v}{\zeta} F_E^*(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) \hat{\Phi}^T(E, \bar{x}_0),$$

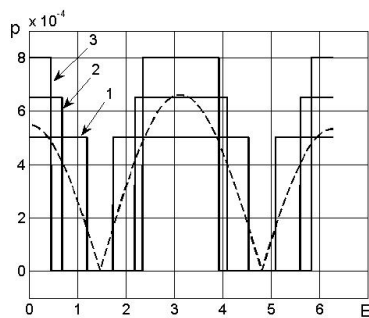
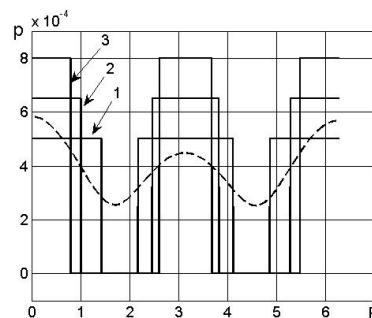
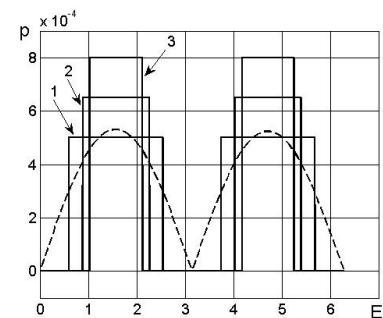
$$\hat{\Phi}(E, \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \bar{x}_0) & F_{22}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \bar{x}_0) & F_{32}(E, \bar{x}_0) & F_{33}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \bar{x}_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, співвідношення (28)–(30) визначають масу корисного навантаження m_π , як функцію m_v , максимум якої знаходимо методом золотого перерізу.

АНАЛІЗ ЗАЛЕЖНОСТІ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МТА ВІД ВЕЛИЧИНИ СТАЛОЇ ТЯГИ ДВИГУНА ПРИ ВИКОНАННІ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ МАНЕВРІВ. Під елементарним маневром розуміємо маневр, при якому відбувається мала зміна лише одного з параметрів орбіти протягом одного оберту навколо гравітаційного центру. На рис. 1–3 подано оптимальні програми величини тяги при виконанні елементарних маневрів: зміни кута нахилу початкової орбіти на величину $\Delta l = 0.002$ – рис. 1; ексцентриситету – на величину $\Delta e = 0.004$ – рис. 2; довготи висхідного вузла – на величину $\Delta \Omega = 0.002$ – рис. 3. Штрихові лінії ілюструють оптимальні програми величини тяги для МТА з ідеально керованою рушійною системою, а суцільні лінії – для МТА з рушійною системою сталої тяги при різних значеннях p_c . (криві 1 відповідають $p_c = 5.0 \cdot 10^{-4}$, криві 2 – $p_c = 6.5 \cdot 10^{-4}$, криві 3 – $p_c = 8.0 \cdot 10^{-4}$). Питомі маси складових рушійних систем прийнято

наступними: $\alpha = 20$ кг/КВт, $\gamma = 1.5$ кг/КВт. Параметри початкової орбіти: велика піввісь $a = 6878.245$ км, ексцентриситет $e = 0.1$, кутова відстань перицентра до вузла $\omega = 0$, кут нахилу $I = 57^\circ$, довгота висхідного вузла $\Omega = 0^\circ$.

Аналіз отриманих чисельних результатів свідчить про зменшення тривалості активних дуг перехідних траєкторій при збільшенні величини сталої максимальної тяги двигуна. Як і очікувалось, маса корисного вантажу m_π для будь якого маневру найбільша у МТА з ідеально керованим двигуном. Маса корисного вантажу МТА з реальним ракетним двигуном сталої тяги зменшується зі збільшенням рівня тяги, на відміну від оптимального значення маси джерела енергії m_v . Збільшення m_v при збільшенні рівня тяги p_c зумовлене необхідністю зменшення витрати робочої речовини (див. перше рівняння в (10)). Оптимальне ж значення m_v забезпечує балансування вказаної необхідності з безпосереднім зменшенням $m_\pi = m(E_0 + 2\pi) - (1 + \epsilon)m_v$ при зростанні m_v .

Рис. 1. Програми тяги при зміні I Рис. 2. Програми тяги при зміні e Рис. 3. Програми тяги при зміні Ω

Оптимальні параметри МТА для вказаних вище маневрів і рушійних систем наведено в таблиці.

Таблиця

Оптимальні параметри МТА

	$\Delta I = 0.002$	$\Delta e = 0.004$	$\Delta \Omega = 0.002$
Ідеально керований двигун	$m_\pi = 0.943020$ $m_v = 0.026113$	$m_\pi = 0.946790$ $m_v = 0.024410$	$m_\pi = 0.950899$ $m_v = 0.022549$
$p_c = 5.0 \cdot 10^{-4}$	$m_\pi = 0.940023$ $m_v = 0.028367$	$m_\pi = 0.942444$ $m_v = 0.028893$	$m_\pi = 0.948127$ $m_v = 0.023880$
$p_c = 6.5 \cdot 10^{-4}$	$m_\pi = 0.937733$ $m_v = 0.028643$	$m_\pi = 0.937475$ $m_v = 0.028796$	$m_\pi = 0.943307$ $m_v = 0.026154$
$p_c = 8.0 \cdot 10^{-4}$	$m_\pi = 0.932798$ $m_v = 0.030903$	$m_\pi = 0.920435$ $m_v = 0.055949$	$m_\pi = 0.938114$ $m_v = 0.028526$

Висновки і перспективи. Отримані результати можуть мати, як самостійне значення, наприклад, для задач утримання космічного апарату в околі заданої орбіти, так слугувати базою для розробки алгоритмів керування рухом МТА з двигунами сталої тяги для перельотів між віддаленими орбітами.

Список використаних джерел

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
2. Кифоренко, Б.Н., Васильев И.Ю. Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным // Космические исследования. – 2011 – 49, № 5. – С. 436–452.
3. Кифоренко, Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 62–76.
4. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Некоторые оптимальные околоэллиптические маневры космических аппаратов с двигателем постоянной мощности и аккумулятором энергии // Проблемы управления и информатики. – 2003 – № 1. – С. 84–100.
5. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Оптимизация перелетов космического аппарата между отдаленными орбитами // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 11. – С. 93–100.
6. Кифоренко Б.М., Ткаченко Я.В. Метод побудови оптимальних траєкторій перельотів в сильному центральному гравітаційному полі // Збірник праць інституту математики національної академії наук України. – 2015 – 12, № 3. – С. 60–72.
7. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. – 2004. – 42, № 3. – С. 260–279.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.18

Б. Кифоренко, д.-р. физ.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. физ.-мат. наук
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев,
И. Васильев, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ БЛИЗКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ С ПОСТОЯННОЙ МАЛОЙ ТЯГОЙ

Решена задача об оптимальном переходе межорбитального транспортного аппарата (МТА) с двигательной системой малой постоянной тяги между близкими эллиптическими орбитами в течение одного оборота вокруг гравитационного центра. Целью оптимизации является получение максимума массы полезного груза МТА при заданной его начальной массе. На примерах конкретных маневров проведена оценка влияния величины постоянной тяги на значение массы полезного груза по сравнению со случаем использования идеально управляемой двигательной системы.

B. Kiforenko, Full Doctor, prof., Ya. Tkachenko, PhD,
S.P. Timoshenko institute of mechanics of NASU, Kyiv
I. Vasil'ev, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

OPTIMIZATION OF TRANSFERS BETWEEN CLOSE ELLIPTIC ORBITS WITH A CONSTANT SMALL THRUST

The problem of the optimal transfers of the orbital transport vehicle (OTV) with a small constant thrust system between close elliptical orbits during one revolution around the gravitational center was solved. The goal of optimization is to obtain the maximum mass of the payload of the OTV at a given initial mass. On the examples of particular maneuvers, the effect of the value of the constant thrust on the value of the payload mass was estimated in comparison with the case of using an ideally controlled propulsion system.

УДК 629.7.076.6

Б. Кіфоренко, д.-р. фіз.-мат. наук, проф., Я. Ткаченко канд. фіз.-мат. наук
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ,
І. Василь'єв, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
e-mail: bkifor@ukr.net, e-mail: yaroslavvt@ukr.net, e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

ОПТИМАЛЬНІ ПЕРЕХОДИ МІЖ БЛИЗЬКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОРБИТАМИ З ОБМЕЖЕНОЮ МАЛОЮ ТЯГОЮ

Запропоновано методику знаходження оптимальних програм тяги та мас складових міжорбітального транспортного апарату (МТА), які забезпечують максимальну масу корисного вантажу МТА з електроракетною рушійною системою (ЕРС) обмеженої тяги при виконанні перельотів між близькими еліптичними орбітами. Проведено оцінку впливу обмеженості тяги на величину маси корисного вантажу та на оптимальні програми тяги.

ВСТУП. Міжорбітальний транспортний апарат (МТА) – це космічний апарат призначений для доставки корисного вантажу з заданої початкової орбіти на іншу цільову орбіту. Однією з найважливіших задач сучасної космонавтики є задача про максимальне збільшення відсотку маси корисного навантаження в початковій масі МТА, причому таким чином, щоб переліт між заданими орбітами був здійсненим. Успішне розв'язання задач такого типу вимагає визначення в рамках єдиної варіаційної постановки оптимальних співвідношень між масами компонентів МТА, оптимальних керувань та оптимальних траєкторій перельоту.

Електроракетна рушійна система (ЕРС) складається з двох основних модулів: електроракетного (електрореактивного) двигуна малої тяги та джерела енергії, що живить двигун. Застосування ЕРС в якості маршової рушійної системи дозволяє суттєво збільшити масу корисного вантажу МТА порівняно з випадком традиційної рідинної, або твердопаливної маршової рушійної системи. Також важливою перевагою ЕРС є можливість регулювання в широких межах величини тяги і швидкості реактивного струменя. Це дозволило для теоретичних досліджень використовувати модель ідеально керованої ЕРС, для якої величини тяги і потужності двигуна вважаються незалежними керуваннями, та тяга не обмежена зверху. У даній статті для класу маневрів, що полягають в переміщенні корисних вантажів між близькими еліптичними орбітами, запропоновано методику отримання програм тяги та співвідношень між масами складових МТА, які забезпечують максимізацію маси корисного вантажу при врахуванні обмеженості тяги ЕРС.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Рух МТА моделюємо рухом матеріальної точки змінної маси в центральному ньютонівському гравітаційному полі, на яку окрім гравітаційної сили діє генерована рушійною системою тяга. Поточну орбіту МТА описуватимемо за допомогою оскулюючих параметрів: натурального логарифму кутового моменту $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ (тут a – велика піввісь), ексцентриситету e , кутової відстані перицентра до висхідного вузла ω , кута нахилу площини орбіти I , довготи висхідного вузла Ω . Поточне положення МТА на орбіті визначатимемо величиною ексцентричної аномалії E . Тоді рівняння руху МТА матимуть вигляд [3]

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -q, \\ \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$, m – поточна маса МТА, q – поточне значення витрати робочої речовини двигуна, w_k , $k = \overline{1, 3}$, – проекції вектора реактивного прискорення на радіальний, трансверсальний та нормальний до площини орбіти напрямки, а коефіцієнти F_{jk} визначаються формулами

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}; \\ F_{23} &= 0; \quad F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)} \sin E; \end{aligned}$$