

УДК 539.595

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.12.51-56>

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,  
О. Нефьодов, канд. фіз.-мат. наук,  
О. Сіренко, здобувач  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна  
E-mail: olelim2010@yahoo.com

## ВЕРИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМУ КЕРУВАННЯ РЕЗЕРВУАРАМИ З РІДИНОЮ НА ОСНОВІ КОМПЕНСАЦІЇ СИЛОВОГО ВІДГУКУ В РІЗНИХ ДІАПАЗОНАХ ПРОЯВУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ

*Розглянуто задачу про керування рухом резервуара з рідиною з вільною поверхнею на основі компенсації силового відгуку рідини на стінки резервуара. Звичайні методи керування рухом механічних систем орієнтовані переважно на лінійні системи порівняно малої розмірності, а задачі динаміки сумісного руху резервуарів з рідиною описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь досить високої розмірності. Для одержання математичної моделі сумісного руху резервуара з рідиною з вільною поверхнею використано варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського, для якого можна всі внутрішні сили взаємодії складових системи визначити аналітично. Саме за таким алгоритмом визначається головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара (силовий відгук рідини). В основу алгоритму керування рухом резервуара з рідиною покладено включення компенсації силового відгуку рідини до керування, що зводить рух системи резервуар–рідина до руху системи, у якій виключено вплив сил рідини, що коливається, на рух резервуара. Такий алгоритм уже було перевірено для задач імпульсного і вібраційного збудження поступального руху системи в горизонтальній площині. Досліджено збудження руху системи силовим імпульсом у вигляді прямокутного імпульсу, прикладеного до стінки циліндричного резервуара, а тривалість імпульсу вважається меншою за чверть періоду вільних коливань системи. З метою аналізу поведінки керованої системи амплітуди імпульсу обрано в різних діапазонах прояву нелінійностей. Розглянуто задачу про точність запропонованого алгоритму для трьох діапазонів прояву нелінійних властивостей у системі: для лінійного діапазону (амплітуди хвиль на вільній поверхні  $h$  не перевершують  $0,1$  радіуса вільної поверхні ( $\xi < 0,1 R$ ); для слабо нелінійного діапазону ( $\xi < 0,2 R$ ) і для сильно нелінійного діапазону з максимальними амплітудами хвиль на рівні ( $\xi = 0,32 R$ ). Чисельне моделювання дозволило встановити, що похибки такого алгоритму для всіх діапазонів прояву нелінійностей не перевершують  $0,5\%$ , хоча і збільшуються при зростанні амплітуд коливань на вільній поверхні рідини. Водночас збурення коливань вільної поверхні рідини для керованого руху спостерігаються завжди більшими, ніж для не керованого.*

*Ключові слова:* резервуар з рідиною, сумісний рух, керування, силовий відгук рідини, компенсація.

**Вступ.** Задачі про керування сумісним рухом конструкцій, які мають багатокomпонентну структуру, досить складні. Внутрішні ступені вільності системи (відносний рух складових компонент системи) значно ускладнює як реальну поведінку таких систем, так і формулювання відповідних математичних задач. Особливо значні труднощі виникають при суттєвому прояві нелінійних властивостей системи. У такому випадку фактично неможливо виконати ідентифікацію подібних систем на основі спостережень. Одним із найбільш яскравих прикладів таких систем є задача керування рухом резервуарів з рідиною для випадків, коли відносна маса рідини істотна, а вплив рухомості рідини на динаміку системи значний. Така задача має розглядатися в межах сумісної задачі нелінійної динаміки циліндричного резервуара з рідиною. Відносно висока розмірність системи та її нелінійність не дозволяють застосувати добре відомі математичні методи дослідження задач керування рухом [1, 2].

Зазначимо, що задачі високоточного маневрування конструкцій з рідиною надважливі в сучасній техніці, зокрема в аерокосмічній і енергетичних галузях. Математична модель задачі будується на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з подальшим використанням методу модальної декомпозиції [6]. Відомо, що складовою частиною використання варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського є можливість аналітичного визначення сил взаємодії між компонентами. Для задачі про динаміку резервуара з рідиною це дозволяє в аналітичному вигляді визначити головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара (силовий відгук рідини). На основі даних силової взаємодії конструкції з рідиною розглянуто алгоритм керування рухом, основною ідеєю якого є принцип компенсації силового відгуку рідини. Такий алгоритм дозволив побудувати керування, яке виключає вплив рухомості рідини на рух твердого тіла, що вкрай важливо для високоточного виконання програмних рухів конструкцій з рідиною. Хоча це керування не оптимальне, проте воно дозволяє ефективно провести вивчення нелінійної задачі у випадку її досить високої розмірності.

**Математична модель системи.** Розглянемо задачу про рух системи "конструкція–рідина з вільною поверхнею". Вважається, що конструкція має порожнину, частково заповнену рідиною. Конструкцію розглядаємо як абсолютно тверде тіло, яке здійснює поступальний і обертальний рух під дією активних зовнішніх сил та моментів, а також за наявності кінематичних збурень. Вважається, що рідина ідеальна, нестислива, однорідна, а її початковий рух безвихровий. Оскільки для більшості практичних задач число Рейнольдса задовольняє умову  $10^4 \leq Re \leq 10^6$ , то при моделюванні властивостей в'язкості можна обмежитися припущенням теорії примезового шару і звести дію сил в'язкості до узагальненої дисипації згідно з методикою [7]. Для числових прикладів у статті розглянуто циліндричний резервуар кругового перерізу. Розв'язання задачі будується за методом [6], який пройшов багатобічну апробацію, включаючи порівняння з якісними результатами теоретичних робіт і експериментів [3, 4, 7, 8].

Математична модель системи є об'єктом неоднорідної математичної структури. Рідина описується диференціальними рівняннями з частинними похідними, а рух конструкції – системою звичайних диференціальних рівнянь. Перехід до математичного об'єкта однорідної структури здійснено методом модальної декомпозиції. З цієї метою збурення вільної поверхні рідини  $\xi$  задаються у вигляді розкладу за формами вільних коливань

$$\xi = \sum a_n(t) \psi_n(r, \theta).$$

Тут  $\psi_n(r, \theta)$  – форми вільних коливань рідини з вільною поверхнею;  $a_n(t)$  – амплітуда коливань вільної поверхні рідини за  $n$ -ю формою. Рух рідини в усьому об'ємі описується потенціалом швидкостей  $\Phi$  :

$$\Phi = \varphi_0 + \dot{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \bar{\omega} \cdot \vec{\Omega} ,$$

де  $\varphi_0$  – потенціал швидкостей хвильового руху рідини;  $\dot{\varepsilon} \cdot \vec{r}$  – потенціал швидкостей поступального руху системи. Тут  $\dot{\varepsilon}$  – вектор швидкості поступального руху системи,  $\vec{r}$  – радіус-вектор довільної точки області рідини, якщо за початок відліку прийняти центр незбуреної вільної поверхні рідини;  $\bar{\omega} \cdot \vec{\Omega}$  – складова потенціалу швидкостей, обертального руху конструкції з рідиною,  $\bar{\omega}$  – кутова швидкість руху резервуара, а  $\vec{\Omega}$  – потенціал Стокса–Жуковського. Для скалярного і векторного потенціалів швидкостей приймалися такі розклади за власними формами коливань задачі  $\psi_n(r, \theta)$  :

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}; \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}.$$

У цих розкладах  $\vec{\Omega}_0$  – лінійна частина потенціалу Стокса–Жуковського;  $b_n(t)$  і  $\vec{q}_n(t)$  – амплітудні параметри потенціалів, які за методикою [12] записуються через амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини  $a_n(t)$ . Можливість описувати рух рідини лише через рух її меж, тобто через параметри руху вільної границі і рух стінок резервуара, визначаються теоремою про те, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її меж. Саме це дозволяє як незалежні змінні обрати амплітудні параметри збурення форм коливань вільної поверхні рідини  $a_i$  (визначають рух вільної поверхні) і параметри поступального  $\varepsilon_i$  та обертального  $\alpha_i$  рухів конструкції, які визначають рух твердих границь області рідини. Обрані параметри повністю характеризують динаміку системи, оскільки за їхніми значеннями можна відновити характеристики руху вільної поверхні рідини  $\xi$ , поле швидкостей рідини, поле тисків, кутову швидкість руху резервуара  $\omega_i$ .

Систему рівнянь руху виведено на основі формулювання вихідної задачі у вигляді варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з використанням методів аналітичної і нелінійної механіки та варіаційних методів математичної фізики [12]. Така система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, у якій другі похідні невідомих входять лінійно. Це створює передумови для аналітичного зведення цієї системи рівнянь до форми Коші, яка зручна для чисельного інтегрування.

Система рівнянь руху має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_s} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[ E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\ & + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pijr}^4 + \vec{F}_{pirj}^4 + \vec{F}_{prji}^4) \right] + \\ & + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left( \vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_s} \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_j a_k \vec{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\ & = \frac{\vec{F}}{M_F + M_T} + \vec{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) - \\ & - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + 2\ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[ \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right] + \\
& + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \left. \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r. \tag{3}
\end{aligned}$$

Система рівнянь руху складається з  $N + 6$  рівнянь, де  $N$  – кількість форм коливань вільної поверхні рідини, що розглядаються, і описує сумісний рух нелінійної системи конструкція–рідина. У рівняння руху (1) – (3) входять коефіцієнти (індексні вирази), які характеризують динамічну взаємодію в системі, інерціальні та статичні характеристики конструкції, а також зовнішні сили і моменти, що діють на конструкцію. Усі ці коефіцієнти визначаються у квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини і лінійних потенціалів Стокса–Жуковського [12]. У рівняння також входять механічні характеристики рідини (густина  $\rho$  і загальна маса рідини  $M_F$ ) і резервуара (маса  $M_T$  і момент інерції  $J_{res}^{ps}$ ), а також параметри розташування центрів мас резервуара і рідини відносно центра незбуреної вільної поверхні рідини.

Якщо записати систему рівнянь руху у вигляді

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\bar{F} + \bar{R}}{M_F + M_T} + \bar{g} : \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} \right) \right] = \frac{1}{\rho} (M_R^r + M_{ex}^r),$$

де  $\bar{F}$  і  $M_{ex}^r$  – відповідно зовнішня сила і момент, що діють на конструкцію, а  $\bar{R}$  і  $M_R^r$  – головні вектори сил і моментів тиску рідини на стінки конструкції, які за варіаційним підходом визначаються автоматично як складові частини техніки варіювання. Тоді з рівнянь руху (1) – (3) можна вивести аналітичні вирази для цих параметрів силової і моментної взаємодії рідини з конструкцією. Зауважимо, що в літературі з динаміки конструкцій з рідиною така силова взаємодія зазвичай визначається шляхом інтегрування сил тиску на стінках резервуара, що значно складніше, і лише для частинних випадків. Тут цей результат одержується автоматично як складова частина техніки варіювання і для більш загального випадку:

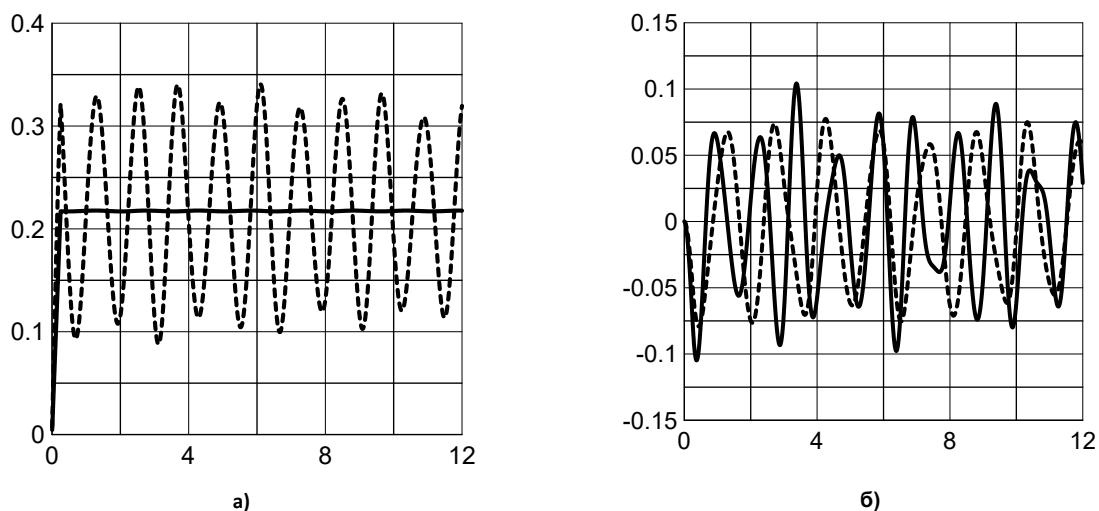
$$\begin{aligned}
& \bar{R} = \rho \left[ \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left( \bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) \right]; \tag{4} \\
& M_R^r = -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \rho \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\
& + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right). \tag{5}
\end{aligned}$$

Визначення параметрів силової і моментної взаємодії конструкції з рідиною в аналітичній формі дозволяє не лише оцінити таку взаємодію кількісно, але й запропонувати нові алгоритми керування рухом конструкцій з рідиною, у яких виключено чи значно послаблено вплив коливань рідини на динаміку руху конструкції.

**Приклад.** На прикладі руху конструкції з рідиною покажемо, що якщо до керування додати компенсацію силової взаємодії рідини з резервуаром, то з високою точністю подальший рух конструкції буде відбуватися так, як би рухалася система з рідиною, яка б "затверділа" [5]. Для аналізу ефективності такого алгоритму вивчимо рух системи в трьох діапазонах прояву нелінійних властивостей поверхневого хвилеутворення. Проаналізуємо збудження руху системи силовим імпульсом у вигляді прямокутного імпульсу, прикладеного до стінки циліндричного резервуара, тривалість імпульсу вважається меншою за чверть періоду вільних коливань системи ( $\tau = 0.25$  с). Ставиться задача: перевірити точність алгоритму для трьох діапазонів прояву нелінійних властивостей у системі: для лінійного діапазону (амплітуди хвиль на вільній поверхні  $h$  не перевершують  $0,1$  радіуса вільної поверхні ( $\xi < 0,1 R$ ); для слабо нелінійного діапазону ( $\xi < 0,2 R$ ) і для сильно нелінійного діапазону з максимальними амплітудами хвиль на рівні ( $\xi = 0,32 R$ ).

Розглянемо випадок поступального руху конструкції з рідиною в горизонтальній площині. У цьому випадку рух конструкції повністю задається одним параметром поступального руху  $\varepsilon_x$ . Відповідно два рівняння, які відповідають руху за напрямками  $y$  і  $z$  з системи рівнянь (2), а також три рівняння системи (3), які відповідають кутовому руху конструкції, виключаються з розгляду. Вивчається нелінійна модель сумісного руху конструкції з рідиною, коли враховується  $N = 12$  форм коливань вільної поверхні рідини. Числові результати отримано для вертикально розташованого кругового циліндричного резервуара радіуса  $R = 1$  м з глибиною заповнення  $H = 1$  м, заповненого водою, маса резервуара приймалась як 10 % від маси рідини (випадок суттєвого впливу рухомості рідини).

Результати числових розрахунків зображені на рис. 1–3, де ліворуч (рис. а)), показано зміну в часі швидкості руху конструкції під дією прямокутного імпульсу сили, а праворуч (рис. б)) показано збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуара у площині руху системи. Усі лінійні розміри стосуються радіуса резервуара. Суцільні криві відповідають випадку, коли рух системи розглядається з компенсацією силового відгуку рідини, а штрихові криві відповідають випадку без компенсації. Рис. 1 відповідає випадку лінійного діапазону збурень на вільній поверхні рідини, рис. 2 – випадку слабого прояву нелінійностей, а рис. 3 – значному прояву нелінійностей. Зауважимо, що у цьому випадку суцільні криві на рисунках для зміни швидкостей з високою точністю збігаються з відповідними кривими у випадку руху системи для "затверділої" рідини.



**Рис. 1.** Зміна швидкості руху резервуара (а) і збурень на вільній поверхні (б) у часі в лінійному діапазоні збурень на вільній поверхні рідини

Числове моделювання дозволило встановити, що похибки алгоритму для всіх діапазонів прояву нелінійностей не перевершують 0,5 %, хоча і збільшуються при зростанні амплітуд коливань на вільній поверхні рідини. У той же час збурення коливань вільної поверхні рідини для керованого руху завжди більші, ніж для не керованого. Характер зміни амплітуд збурень рідини свідчить про наявність ознак амплітудної і частотної модуляції коливань, що підтверджується експериментальними даними [3, 7, 8]. Як бачимо з рис. 1–3, спостерігається помітне істотне зменшення періоду коливань вільної поверхні рідини в межах моделі сумісного руху рідини і резервуара порівняно з випадком заданого руху резервуара (приблизно на 25–30 %). Зазначимо також, що у випадку руху системи з компенсацією силового відгуку рідини зростання частоти стає ще більшим.

Запропонована схема керування фактично є керуванням з оберненим зв'язком стосовно прискорень амплітуд збурень форм коливань вільної поверхні рідини з їхнім нормуванням за законом формування силового відгуку рідини.

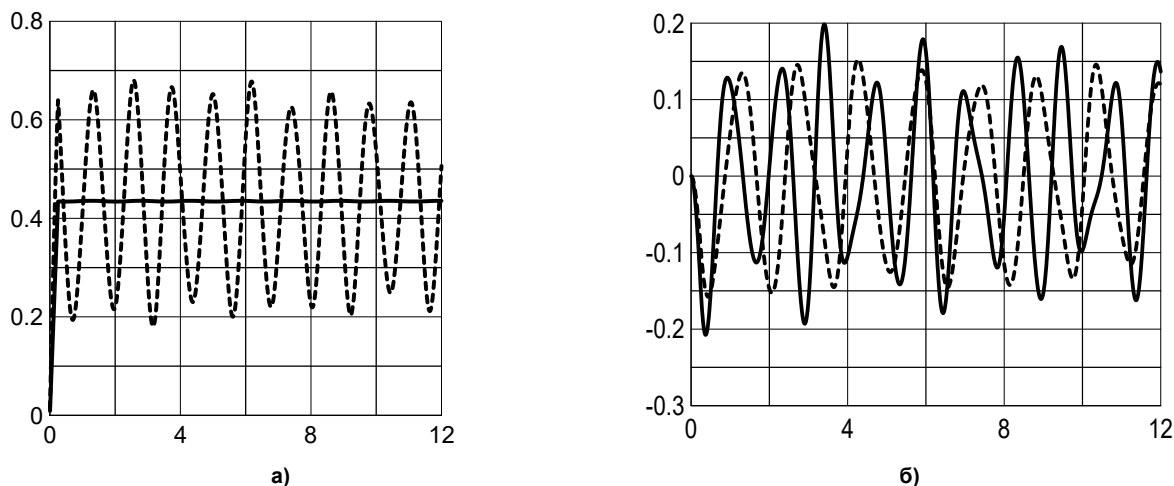


Рис. 2. Зміна швидкості руху резервуара (а) і збурень на вільній поверхні (б) у часі в слабо нелінійному діапазоні збурень на вільній поверхні рідини

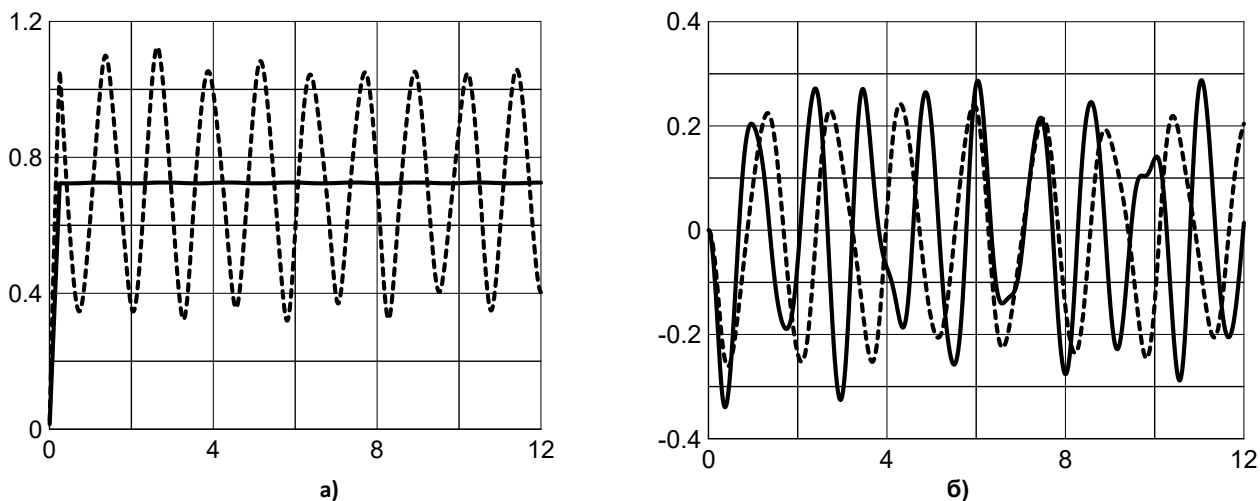


Рис. 3. Зміна швидкості руху резервуара (а) і збурень на вільній поверхні (б) у часі в сильно нелінійному діапазоні збурень на вільній поверхні рідини

**Висновки.** Розглянуто задачу керування рухом конструкції з рідиною із вільною поверхнею в режимі руху з різним ступенем прояву нелінійних властивостей взаємодії резервуарів з рідиною. Для реалізації високоточного маневрування запропоновано алгоритм керування рухом конструкцій з рідиною, в основі якого лежить принцип компенсації силової взаємодії рідини зі стінками резервуара. Продемонстровано ефективність такого підходу для побудови законів керування рухом для випадку імпульсного збудження руху силовим прямокутним короткотривалим імпульсом. Встановлено, що для різних діапазонів прояву нелінійних властивостей рідини похибки відповідають майже одному порядку і малі. Запропонований підхід базується на аналітичних властивостях вихідної нелінійної динамічної моделі сумісного руху конструкції з рідиною і застосовується для вивчення нелінійної динамічної моделі високої розмірності, де використання традиційних підходів до розв'язання задач керування рухом складний.

**Список використаних джерел:**

- 1 Chernousko F. L. Methods for control of nonlinear mechanical systems / F. L. Chernousko, I. M. Ananyevskiy, S. A. Reshmin. – Moscow : Fizmatlit, 2006. – 328 p.
- 2 Dickmanns E. D. Dynamic vision for perception and control of motion / E. D. Dickmanns. – London : Springer-Verlag Limited, 2007. – 474 p.
- 3 Faltinsen O. M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. M. Faltinsen, O. M. Rognebakke, A. N. Timokha // *Physics of Fluids*, 2006. – Vol. 1, N 18. – P. 1–14. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2160522>.
- 4 Konstantinov A. V. Effect of the viscosity and capillarity of fluid on the nonlinear dynamics of a tank partially filled with a fluid / A. V. Konstantinov, O. S. Limarchenko // *Internat. Applied Mechanics* // 2017. – Vol. 53, N 2. – P. 130–138. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0798-2>.
- 5 Konstantinov A. V. Motion control for structure with liquid based on compensation of the liquid hydrodynamic response / A. V. Konstantinov, V. O. Limarchenko, O. S. Limarchenko // *Problems of control and informatics*, 2020. – N 3. – P. 68–79.
- 6 Limarchenko O. S., Matarazzo G., Yasinsky V. V. Dynamics of rotating structures with liquid / O. S. Limarchenko, G. Matarazzo, V. V. Yasinsky. – Kiev : Gnozis, 2013. – 286 p.
- 7 Mikishev G. N. Experimental methods in dynamics of spacecraft / G. N. Mikishev. – Moscow : Mashinostroyeniye, 1978. – 247 p.
- 8 Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // *Internat. Jour. of Recent Trends in Engineering*. – 2009. – Vol. 1, N 6. – P. 1–5.

O. Limarchenko, Dr Hab., Prof.  
 O. Nefedov, PhD,  
 O. Sirenko, Applicant  
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

## VERIFICATION OF THE CONTROL ALGORITHM FOR RESERVOIRS WITH LIQUID BASED ON THE COMPENSATION OF THE FORCE RESPONSE IN DIFFERENT RANGES OF MANIFESTATION OF NONLINEARITIES

*Problem about motion of a reservoir with liquid with a free surface is considered based on the compensation of a force response of the liquid on reservoir walls. Such an approach is selected since usual methods of control of mechanical system motion are mostly intended for linear systems of relatively small dimension. However, models of dynamics of the combined motion of reservoirs with liquid are described with relatively high-dimensional nonlinear systems ordinary differential equations. For obtaining the mathematical model of combined motion of a reservoir with liquid with a free surface we use the Hamilton–Ostrogradskiy variational principle, for which it is possible to determine analytically all internal forces of interaction of system component parts. Namely using this algorithm, we determine the main vector of forces of the liquid pressure on reservoir walls (force response of liquid). The algorithm of the motion control of the reservoir with liquid is based on the inclusion of the compensation of the liquid force response to controlling actions, this reduces the motion of the system reservoir–liquid, where the effect of forces from oscillating liquid on the reservoir motion is eliminated. This algorithm was tested for problems of impulse and vibration disturbance of the translational motion of the system in the horizontal plain. We consider the disturbance of the system motion by a force rectangular impulse applied to the reservoir wall, the duration of the impulse is lesser than a quarter of the period of a liquid free oscillations according to the first normal mode. Amplitudes of the impulse were selected with the purpose of analysis of the behavior of the controlled system in different ranges of manifestation of nonlinearities. We state the problem to verify the accuracy of this algorithm for three ranges of manifestation of nonlinear properties in the system, namely, for the linear range (amplitudes of waves on a free surface  $h$  do not exceed 0,1 of the radius of a free surface ( $\xi < 0,1R$ ); for the weakly nonlinear range ( $\xi < 0,2R$ ) and for the strongly nonlinear range with maximum amplitudes of waves about  $\xi = 0,32R$ . Numerical modeling enables the determination of errors of developed algorithm, which does not exceed 0,5 %, although they insignificantly increase with the increase of amplitudes of oscillations on a free surface of liquid. At the same time perturbations on a free surface of liquid for the controlled motion are always greater than for the uncontrolled motion.*

*Keywords: reservoir with liquid, combined motion, control, force response of liquid, compensation.*

УДК 517.9

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.13.56-59>

K. Elgondiyev, PhD., Associate Prof.,  
 S. Matmuratova, Student  
 Karakalpak State University, Nukus city, Respublic of Karakalpakstan, Uzbekistan,  
 E-mail: elgondiev.61@gmail.com  
 V. Borodin, PhD, Associate Prof.,  
 E-mail: viktorborodinmm@gmail.com; borodin@univ.kiev.ua  
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,  
 L. Vovk, PhD, Associate Prof.  
 E-mail: ludmylavera@gmail.com  
 Kyiv National University of Culture and Arts, Kyiv, Ukraine

## TOTAL ENERGY OF HARMONIC OSCILLATOR WITH IMPULSE ACTION

*The problem of finding the total energy of a harmonic oscillator with pulsed action at fixed moments of time is considered. Both for the case of the homogeneous equation of harmonic oscillations and for the case of the equation of harmonic oscillations in the presence of external perturbation, formulas for the total energy of the oscillatory system are obtained. The case of periodic impulse effects is analyzed. The conditions under which in this oscillatory system there are periodic modes are specified. It is shown that under the fulfillment of these conditions on the values of impulse action and external perturbation, the total energy of the vibrational system is also a periodic function of the time variable.*

*Keywords: harmonic oscillator, systems with pulsed action, total energy, external perturbation, periodic oscillations.*

**1. Introduction.** Harmonic vibrations are of great importance in the study of many different problems of physics, since the motion of any system in the vicinity of the minimum of its potential energy can be described using the equation of harmonic vibrations

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Harmonic oscillations are one of their simplest types. Well-known examples of harmonic oscillations are small vibrations of a mathematical pendulum, oscillations in molecules, small oscillations of a finite string (with appropriate initial conditions), oscillations in various electrical engineering, for example, in RLC circuits, and other systems. If we take into account that an arbitrary periodic function under rather general conditions can be represented in the form of its Fourier series, it can also be noted that almost any periodic motion is a superposition of harmonic oscillations.

Mathematically, harmonic oscillations can be described using the formula [7, 8] of the following form  $x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0)$ , where  $x_0, \dot{x}_0$  are initial state of the system (1),  $t_0$  is an initial moment of time. In the case of a material particle of unit mass, its total energy is represented by the formula

$$E = E(t) = \frac{1}{2} \left[ \omega^2 x^2(t) + \dot{x}^2(t) \right] \quad (2)$$

and is a constant, i.e.,  $E = E(t_0) = \frac{1}{2} (\omega^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2)$ .