

UDC 535.515; 535.56; 535.46; 535.012.21

M. Lavrenko, stud., I. Kolomiets, post. grad. stud.,
S. Savenkov, Dr. Sci., Ye. Oberemok, Ph. D.,
Faculty of Radio physics, Electronics and Computer Systems
Taras Shevchenko National University of Kyiv

RELATION BETWEEN THE ANISOTROPY PARAMETERS OF MULTIPLICATIVE AND HOMOGENEOUS MODEL FOR MEDIUM WITH ELLIPTICAL BIREFRINGENCE

The features of application of multiplicative and homogeneous models were described. Relations between anisotropy parameters describing the simultaneous (homogeneous models) and sequential (multiplicative model) effects of mechanism of anisotropy in a medium with elliptical birefringence were found. Cases of different ratios between the values of different mechanisms of anisotropy were reviewed.

Keywords: Muller matrix model, 1-st equivalence Jones theorem, linear and circular birefringence, anisotropic media, parameters of anisotropy, multiplicative and homogeneous models.

Introduction. Polarimetry as high precision research instrument without destroying anisotropic media has many applied uses today [6]. However, the development of modern polarimetry closely connected with the peculiarities of specific classes of studied objects [11]. Polarization properties of the medium with one mechanism of anisotropy are the simplest case which has been totally studied [1]. Therefore, considerable interest is paid to the properties of the medium in which there are several mechanisms of anisotropy [2]. Today in matrix polarimetry there are two main methods for modelling properties of such media. The question about the features of the polarization properties of such media was the study of the α - SiO_2 crystal in which in the direction perpendicular to the optical axis distributed two elliptically polarized eigenwaves [9–10]. This indicates the presence in the crystal anisotropy of two mechanisms: linear and circular birefringence. These mechanisms are determined by the anisotropy of different phase velocity of the eigenwaves that in the first case are linear, and the second are circular. In polarimetry for the quantitative analysis of the properties of these mediums consider the following parameters: $\delta = 2\pi(n_o - n_e)z/\lambda = \delta_0 z$ – phase shift between the two linearly polarized eigenwaves, α – azimuth and circular phase anisotropy with phase shift: $\varphi = \pi(n_l - n_r)z/\lambda = \varphi_0 z$ where n_o, n_e, n_l, n_r – refractive indices of the medium for ordinary, extraordinary, left and right circularly polarized waves respectively, δ_0, φ_0 – the value of the relative phase shift per unit length in the direction of light propagation z .

Examples of such media are crystals α - SiO_2 and TeO_2 [10]. For studying and analyzing of the polarization properties of the medium with complex anisotropy are prevalent matrix methods, including the method of Jones and Mueller [1]. Within these methods, the anisotropic properties of the medium are described by a matrix of 2x2 or 4x4, which for the above mentioned class of media is a function of the anisotropy parameter δ, φ, α . Mueller matrix models for media in which there is a mechanism of anisotropy were constructed in [4]. To analyze the media in which there are two mechanisms of anisotropy associated with birefringence [2] was proposed the 1-st equivalence Jones theorem, the essence of which is that any sequence of optical elements with linear or circular birefringence can be represented by a set of two elements with appropriate mechanisms of anisotropy. In fact, based on this theorem was built multiplicative model of homogeneous anisotropic media in which the presence in the media of linear and circular birefringence can be represented as sequential effect of these mechanisms of anisotropy and the order of their following is discussed in [3, 10]. Mueller matrix under the multiplicative model is the product of matrices Müller,

describing some of the mechanisms of anisotropy. In particular, it was shown that the phase shift δ, φ the same in both orders of following optical elements and orientation α is different by the value φ .

In the framework of homogeneous model of representing of anisotropic media [7], it was shown [8] that the electrodynamics parameters δ, φ, α do not coincide with the corresponding effective parameters of multiplicative model.

Applying the method presented in [9] obtained the following relationship between the parameters of multiplicative $\delta_M, \alpha_M, \varphi_M$ and homogeneous $\delta_0, \varphi_0, \alpha$ models:

$$\delta_M = \arctan \left(\frac{\delta_0 (\Delta S(2\alpha) S(z\Delta) - 2\varphi_0 C(2\alpha) (C(z\Delta) - 1))}{(4\varphi_0^2 + \delta_0^2 C(z\Delta)) S(\alpha_M)} \right),$$

$$\alpha_M = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2\varphi_0 C(2\alpha) (C(z\Delta) - 1) + \Delta S(2\alpha) S(z\Delta)}{2\varphi_0 S(2\alpha) (C(z\Delta) - 1) + \Delta C(2\alpha) S(z\Delta)} \right), \quad (1)$$

$$\varphi_M = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4\varphi_0 \Delta S(z\Delta)}{\delta_0^2 + (\delta_0^2 + 8\varphi_0^2) C(z\Delta)} \right)$$

where $\Delta = \sqrt{\delta_0^2 + 4\varphi_0^2}$ – relative phase shift between eigenwaves per unit length z , $C(x) = \cos(x)$, $S(x) = \sin(x)$. From relations (1) can be noted that the values δ_M, α_M are a function of all three parameters $\delta_0, \varphi_0, \alpha$ of the homogeneous model and thickness z , while the value φ_M does not depend on the orientation of the axis of birefringence α in the framework of homogeneous model. This indicates that the circular birefringence even in the multiplier is still independent of the orientation of the plane of polarization. Let us analyze the obtain relation (1) for different ratios between the parameters of linear and circular birefringence. First, consider the case where the predominant linear birefringence. In particular, this case is realized for crystals α - SiO_2 and TeO_2 , which are characterized by the values of unit parameters of anisotropy: $\delta_0 = 5,14^\circ / \mu\text{m}$, $\varphi_0 = -8,5 \times 10^{-3} / \mu\text{m}$ and $\delta_0 = 86,97^\circ / \mu\text{m}$, $\varphi_0 = 3,55 \times 10^{-2} / \mu\text{m}$ for $\lambda = 0,63$ and $\alpha = 0$ respectively. Substituting the above mentioned parameters of crystals α - SiO_2 , and TeO_2 , in the direction perpendicular to the optical axis in equation (1) we obtain the dependence of the parameters of anisotropy of the multiplicative model $\delta_M, \alpha_M, \varphi_M$ on coordinate z , which are represented together with the parameters of anisotropy of homogeneous model δ, φ, α in Fig. 1.

Graphical interpretation of Eqs. (1) for other different ratios between δ_0 and φ_0 for crystal $\alpha - SiO_2$ shown in Fig. 2. It turns out that in extreme cases $\delta_0 \gg \varphi_0$ or $\delta_0 \ll \varphi_0$ the appropriate parameters of anisotropy of multiplicative and homogeneous models $\delta_M = \delta_0$ or

$\varphi_M = \varphi_0$ coincides. While all the other parameters of the model in this cases do not coincides. In the most general case, when $\delta_0 \approx \varphi_0$ none parameters of anisotropy of homogeneous and multiplicative model does not coincides.

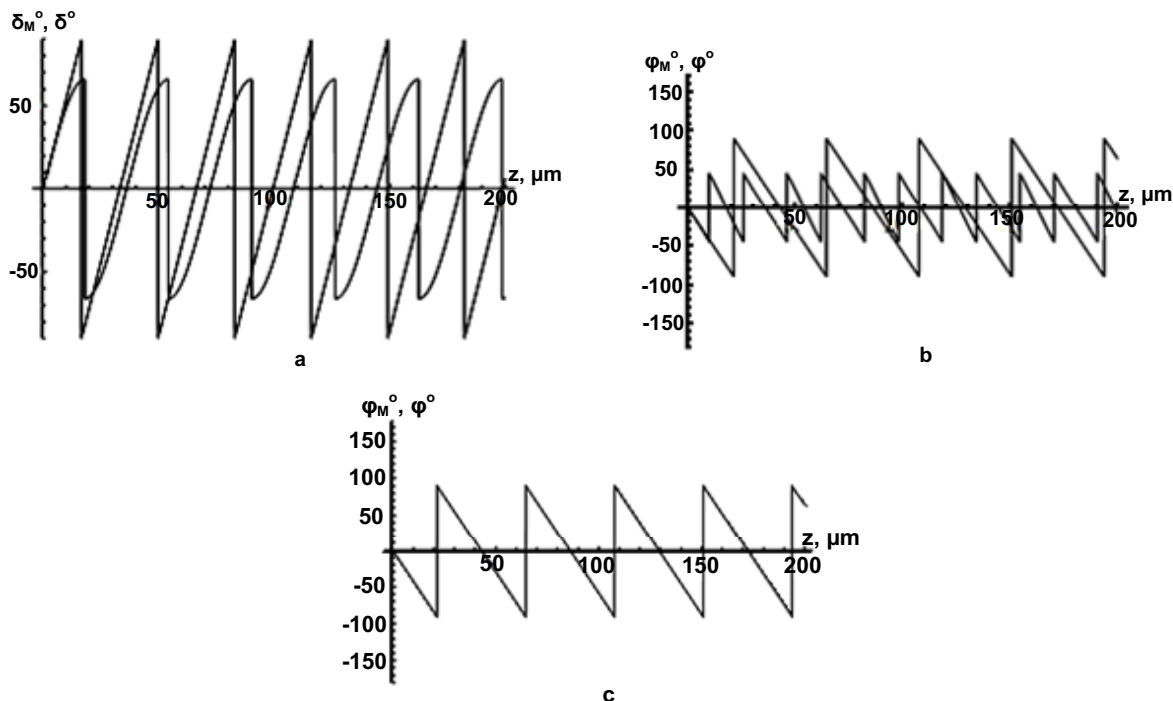


Fig. 2 The dependence of anisotropy parameters of multiplicative and homogeneous models on thickness z in direction of light propagation for the cases a) , b) $\delta_0 = 5,43^\circ / \mu m$, $\varphi_0 = -4,18^\circ / \mu m$,
c) $\delta_0 = 7,3 \times 10^{-3}^\circ / \mu m$, $\varphi_0 = -4,18^\circ / \mu m$

Conclusions. In general for the medium with elliptical birefringence the parameters of anisotropy of sequences effect of anisotropy mechanisms (multiplicative model) do not coincident with parameters of anisotropy of simultaneous effects of mechanisms (homogeneous model) of anisotropy. So in general case the multiplicative model characterized by some effective anisotropy parameters. However, in extreme cases, when the value of one mechanism of anisotropy dominates over the other, there is a coincidence of this value of anisotropy in both models. Case $\delta_0 \gg \varphi_0$ for example sold for trigonal crystal system which includes in particular: $\alpha - SiO_2$ and TeO_2 in direction of optical axis.

REFERENCE:

1. Azzam R. M. Ellipsometry and Polarized Light / R. M. Azzam, N. M. Bashara. – New York: North-Holland Publishing Company, 1977. – 584 p.
2. Hurwitz H. A new calculus for the treatment of optical systems II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1941. – Vol.31. – P. 493–499.
3. Jones R. C. A new calculus for the treatment of optical systems. VII, Properties of the N – matrices / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1948. – Vol.38. – P. 671–685.

4. Jones R. C. A new calculus for the treatment of optical systems III. The Sohncke Theory of Optical Activity / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1941. – Vol.31. – p. 500–503.
5. Jones R. C. A new calculus for the treatment of optical systems IV / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1942. – Vol.32. – P. 486–493.
6. Kokhanovsky A. A. Light Scattering Media Optics: Problems and Solutions / A. A. Kokhanovsky. – Chichester: Springer-Praxis Books in Environmental Sciences, 2nd Edition, 2001. – 365 p.
7. Kolomiets I. S. Eigenpolarizations orthogonality conditions for the first and second Jones equivalence theorems, in the approximation of homogeneous and layered medium / I. S. Kolomiets, Y. A. Oberemok, S. N. Savenkov // Metal physics and the newest technology. – 2011, – Vol. 33. – P. 493–502.
8. Kolomiets I. S. Difference between homogeneous and multiplicative mueller matrix model / I. S. Kolomiets, S. N. Savenkov, Y. A. Oberemok, // XII International Young Scientists' Conference On Applied Physics, 23-26 May 2012, Kyiv, Ukraine. – P. 12–13.
9. Lavreno M. L. Comparison of polarization properties of media with elliptical phase anisotropy under homogeneous and multiplicative models / M. L. Lavreno, I. S. Kolomiets, S. N. Savenkov, Y. A. Oberemok, A. S. Klimov // Lashkaryovski Chytannya – 2014, 2–4 April 2014 Kyiv, Ukraine. – P. 8–10.
10. Nye J. F. Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices / Nye J. F. – Oxford: Clarendon Press, 1957. – 322 p.
11. Savenkov S. N. Optimization and structuring of the instrument matrix for polarimetric measurements / S. N. Savenkov // Optical Engineering. – 2002. – Vol. 41. – No.5. – P. 965–972.

Submitted on 17.11.14

Лавренко М., студ., Коломієць І., асп., Савенков С., д-р фіз.-мат. наук, доц., Оберемок Є., канд. фіз.-мат. наук, асист., факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ ПРИ ПОСЛІДОВНІЙ ТА ОДНОЧАСНІЙ ДІЇ МЕХАНІЗМІВ АНІЗОТРОПІЇ СЕРЕДОВИЩ З ЕЛІПТИЧНИМ ДВОПРОМЕНЕЗАЛОМЛЕННЯМ

Було описано особливості застосування мультиплікативних і однорідних моделей. Були знайдені співвідношення між параметрами анізотропії, що описують одночасну (однорідна модель) і послідовну (мультиплікативна модель) дію механізмів анізотропії в середовищі з еліптичним двоприменезаломленням. Випадки різних співвідношення між значеннями різних механізмів анізотропії були розглянуті.

Ключові слова: матрична модель Мюллера, 1-ша теорема еквівалентності Джонса, лінійне та циркулярне двоприменезаломлення, анізотропне середовище, параметри анізотропії, мультиплікативна і однорідна моделі.

Лавренко М., студ., Коломиец И., асп., Савенков С., д-р физ.-мат. наук, доц., Оберемок Е., канд. физ.-мат. наук, асист., факультет радиофизики, электроники і комп'ютерних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЯРИМЕТРИИ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ И ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ МЕХАНИЗМОВ ФНИЗОТРОПИИ СРЕД С ЭЛЛЕПТИЧЕСКИМ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕМ

Было описано особенности применения мультипликативных и однородных моделей. Были найдены соотношения между параметрами анизотропии, описывающих одновременную (однородная модель) и последовательную (мультипликативная модель) действие механизма анизотропии в среде с эллиптической двулучепреломления. Случаи различных соотношениях между значениями различных механизмов анизотропии были рассмотрены.

Ключевые слова: матричная модель Моллера, 1-я теорема эквивалентности Джонса, линейное и циркулярное двулучепреломление, анизотропная среда, параметры анизотропии, мультипликативная и однородная модели.

УДК 372.853;372.862;621.37

С. Левитський, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ЧИ МОЖНА ВИЯВИТИ БУДЬ-ЯКІ СЛІДИ СИГНАЛУ ДО ЙОГО ПОЧАТКУ?

Розглядається методичне питання до курсу з гармонічного аналізу про можливість виявлення слідів сигналу до його початку, оскільки розкладання ведеться на гармоніки, що простягаються від мінус до плюс нескінченності у часі. Показано, що для будь-яких реальних фільтрів, які складаються з LRC-елементів. це неможливо, тоді як для ідеального фільтру (який практично не може бути реалізований) така можливість існує.

Ключові слова: спектр, ідеальний фільтр, реальний LRC-фільтр

При вивченні деяких розділів курсу з гармонічного аналізу сигналів у студентів часто виникають питання, зайти відповіді на які буває досить складно. Іноді такі питання стосуються навіть певних парадоксів, як, наприклад, зазначене вище "Чи можна виявити будь-які сліди сигналу до його початку?" І хоча таке питання у студентів природно виникає, відповіді на нього в навчальній літературі, переліченій наприкінці даної статті, нам знайти не вдалось.

Наша інтуїція, що ґрунтується на принципі причинності, категорично відхиляє таку можливість. Проте, оскільки ми розкладали сигнал на гармонічні складові, що простягаються у часі від мінус нескінченності до плюс нескінченності, то виходить, що для сигналу, який розпочався у певний скінчений момент часу (наприклад, в момент $t = 0$), гармонічні складові повинні існувати і до його початку. Зрозуміло, окрему дискретну гармонічну складову неперіодичного сигналу виявити неможливо, бо її амплітуда нескінченно мала. Взяті ж разом всі складові до початку сигналу мають давати в сумі нуль, оскільки саме з цієї умови робиться добір їх амплітуд і фаз. Та чи можна за допомогою будь-якого фільтру "вирізати" з усього спектру деяку смугу частот, котрі в сумі не давали б нуль до початку сигналу?

У загальному випадку вираз для сигналу на виході деякого лінійного чотириполюсника має вигляд

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}_1(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \quad (1)$$

де $f_1(\theta)$ і $\dot{s}_1(\omega)$ – сигнал і його спектр на вході чотириполюсника, а $K(\omega)$ – передавальна функція чотириполюсника. Змінюючи порядок інтегрування в (1), одержуємо

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega(t-\theta)} d\omega \quad (2)$$

Візьmemo як приклад звичайний коливний контур (рис. 1), для якого передавальна функція має вигляд:

$$K(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\delta} \quad (3)$$

де ω_0 – власна частота контуру, а δ – його згасання.

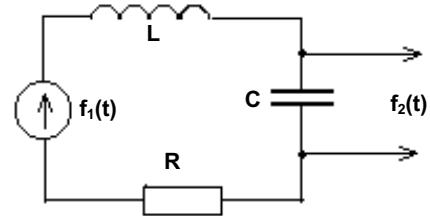


Рис. 1. Схема фільтру

Для обчислення другого інтегралу в (2) слід скористатися методом лишків, перетворивши його у контурний інтеграл.

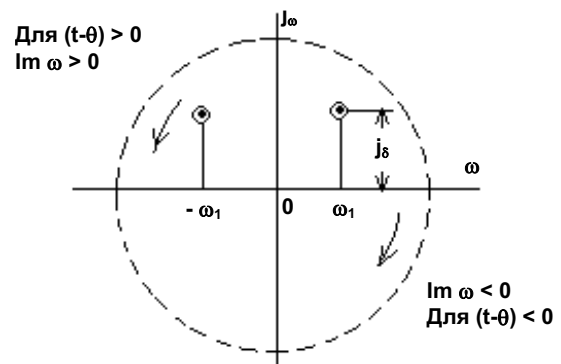


Рис. 2. Контур на комплексній площині

З цією метою слід замкнути шлях інтегрування на площині комплексної змінної ω (Рис.2) таким чином, щоб додаткова частина шляху інтегрування нічого б не додавала до значення нашого інтегралу. Це можна зробити, проводячи замикаючу лінію через область, де $|Im \omega| = \infty$. Тоді, щоб виконати вказану вище умову для $t - \theta > 0$ (тобто для моментів часу після початку сигналу), замикаючу лінію слід проводити у верхній напівплощині, де $Im \omega = +\infty$, бо лише у цьому випадку $e^{j\omega(t-\theta)}$ на цій додатковій ділянці контуру інтегруванні дорівнюватиме нулю і нічого не додасть до нашого