УДК 524.8

О. Александров, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
В. Жданов, д-р фіз.-мат. наук, проф., С. Коваль, студент

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ПОДІЙ СИЛЬНОГО МІКРОЛІНЗУВАННЯ З УРАХУВАННЯМ ТЕМНОЇ МАТЕРІЇ

Отримані "пост-лінійні" поправки до добре знаної формули, яка у наближенні прямолінійної каустики дає сумарне підсилення двох критичних зображень точкового джерела у гравітаційно-лінзовій системі. Розглянуто окіл каустики-складки у присутності неперервної темної матерії (ТМ). Показано, що кінцеві вирази для критичних розв'язків і коефіцієнтів підсилення мають ту ж саму функціональну структуру, що і за відсутності ТМ.

We obtain "post-linear" corrections to the well-known linear caustic approximation for the total amplification of two critical images of a point source in a gravitation lens system. The main attention is paid to the case of the fold caustic in presence of a smooth dark matter (DM) component. We show that the structure of final expressions for the solutions and amplification factors is preserved as for the absence of DM.

1. Вступ. Серед різноманітних ефектів гравітаційного лінзування значну увагу привертають так звані події сильного мікролінзування, які ще називають подіями з великим підсиленням (ПВП), Під час такої події блиск джерела значно підсилюється протягом невеликого проміжку часу. ПВП мають місце як при мікролінзуванні квазарів, так і при спостереженнях зірок. Теоретичний розгляд такої події базується на ототожненні її з подією перетину джерелом каустики гравітаційно-лінзової системи. Особливий інтерес до таких подій викликаний тим, що вони несуть динамічну інформацію про джерело – вивчаючи криві блиску, особливо у різних спектральних діапазонах, можна зробити важливі висновки про розміри та структуру джерела, а також про розподіл матерії в гравітаційній лінзі.

Аналіз таких подій базується на тому, що лінзований потік F випромінювання від джерела (у вузькому спектральному діапазоні) дається таким виразом

$$F(Y) = \iint K(y) I(y - Y) dy_1 dy_2, \tag{1}$$

Тут Y – радіус-вектор центра джерела; внаслідок відносного руху джерела і лінзи $Y(t)$ – лінійна вектор-функція часу. $I(z)$ – розподіл яскравості по поверхні джерела (у власній системі координат), $K(y)$ – коефіцієнт підсилення яскравості точкового джерела у точці з координатами y_i. Мікрозображення не спостерігаються окремо, і тому коефіцієнт підсилення дорівнює сумі підсилень окремих зображень; $K(y) = \sum_I K_I$. Каустики відокремлюють області на площині джерел, яким відповідають різні кратності зображень. Коли точкове джерело наближається до каустики з внутрішнього боку, два його зображення наближаються до критичної кривої, і блиск кожного з них формально прямує до нескінченості. Ці зображення називають критичними. Коли ж джерело перетинає каустику, то критичні зображення зникають. Блиск інших (некритичних) зображень під час ПВП можна вважати постійним. Відповідно до цього $K(y) = K_0 + K_{cr}$, $K_0 = const.$, K_{cr} – сумарне підсилення двох критичних зображень.

Інше фундаментальне співвідношення, що застосовується в цьому контексті – це так зване наближення прямолінійної каустики, в рамках якого:

$$K_{cr}(y) \sim \theta(y_2) / \sqrt{y_2}, \tag{2}$$

де $\theta(y_2)$ – функція Хевісайда. Саме формули (1,2) складають основу теоретичного аналізу ПВП у великій кількості публікацій [1–6].

З іншого боку ряд авторів зауважували, що формула (2) дає надто грубе наближення і потребує уточнення [7,8]. Для окремих зображень при макролінзуванні формула (2) була уточнена в роботах [9,10]. Випадок мікролінзування потребував розгляду більш високих наближень при отриманні розв'язків лінзового рівняння та при визначенні K_{cr} [11]. В роботах [12–14] уточнений вираз K_{cr} було застосовано для розрахунків кривих блиску протяжних джерел з

різними $I(z)$. Також в роботах [13,14] на прикладі реальних спостережень відомого ПВП на кривій блиску квазара Q2237+0305C за даними групи OGLE було продемонстровано, що знайдені поправки є статистично значущими.

Зазначимо, що в роботах [11–14] розглядалася дещо спрощена ситуація – припускалося, що під час ПВП на промені зору нема неперервної матерії. Але, згідно сучасних уявлень домінуючий внесок до загальної густини матерії в галактиках та їх скупченнях створює небаріонна темна матерія. Мета цього короткого повідомлення полягає в узагальненні результатів робіт [11–14] на випадок присутності темної матерії на промені зору.

2. Критичні розв'язки загального лінзового рівняння. Нормоване рівняння гравітаційного лінзування зіставляє кожній точці x в площині зображень точку y в площині джерела і має такий вид:

$$y = x - \nabla\Phi(x), \tag{3}$$

де $\Phi(x)$ – потенціал гравітаційного лінзування. У загальному випадку одному положенню точкового джерела відповідає декілька зображень $X_{(l)}(y)$ –розв'язків рівняння (3).

Потенціал $\Phi(x)$ задовольняє рівнянню $\Delta\Phi = 2k$, де $k(x)$– густина неперервної матерії на промені зору, нормована на так звану критичну густину.

Коефіцієнт підсилення кожного окремого зображення дорівнює

$$K_i(y) = 1\Big/\left|J\left(X_{(l)}(y)\right)\right| ,$$

де $J(x) \equiv \left|D(y)/D(x)\right|$ – якобіан відображення площини зображень на площину джерел.

Нагадаємо, що критичні криві відображення (3) визначаються рівнянням $J(x) = 0$.

Каустика – це образ критичної кривої при відображенні (3). Стійкі критичні точки диференційованих відображень двовимірних многовидів бувають лише двох типів: складки і зборки, причому ПВП частіше зв'язане зі складками. У цій роботі ми обмежуємося розглядом складок.

У стандартному підході до розгляду околу каустики, потенціал поблизу точки p_{cr} критичної кривої апроксимується поліномом Тейлора. При цьому лінзове відображення можна дещо спростити, обертаючи систему координат на площині джерел так, щоб вісь абсцис була дотичної до каустики. Вважаємо, що розглядувана точка p_{cr} знаходиться в початку координат площини зображень, а її образ – в початку координат площини джерела; при цьому $|y_2|$ визначає відстань до дотичної до каустики, а y_1 – зсув уздовж цієї дотичної.

Один з підходів до пошуку наближених критичних розв'язків рівняння (3) полягає в розкладанні координат зображень в ряд за степенями деякого параметра t, що характеризує близькість до каустики [15] (див. також [14]). Якщо покласти $y_i = t^2\tilde{y}_i$, то, як показано в цих роботах, критичні розв'язки рівняння (3) є аналітичними функціями параметра, при цьому $x_1 = t^2\tilde{x}_1$, $x_2 = t\tilde{x}_2$, де $\tilde{x}_1(t)$ і $\tilde{x}_2(t)$ – функції нульового порядку. Підставляючи ці вирази у тейлорівський розклад рівняння (3), та обмежуючись членами до другого порядку включно, отримуємо такі рівняння:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= 2(1-k_0)\tilde{x}_1 - a_2\tilde{x}_2^2 + t\left(2b_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - d\tilde{x}_2^3\right) + t^2\left(a_1\tilde{x}_1^2 - 3c_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + g\tilde{x}_2^4\right),\\ \tilde{y}_2 &= \qquad -b_2\tilde{x}_2^2 + t\left(-2a_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + c_2\tilde{x}_2^3\right) + t^2\left(b_1\tilde{x}_1^2 - 3d\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + f\tilde{x}_2^4\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Тут $k_0 = k(0)$ – густина матерії в початковій точці, і введені такі позначення:

$$\begin{aligned}&a_1 = -\Phi_{,111}/2, \quad a_2 = \Phi_{,122}/2, \quad b_1 = -\Phi_{,112}/2, \quad b_2 = \Phi_{,222}/2,\\ &c_1 = \Phi_{,1122}/6, \quad c_2 = -\Phi_{,2222}/6, \quad d = \Phi_{,1222}/6, \quad g = -\Phi_{,12222}/24, \quad f = -\Phi_{,22222}/24.\end{aligned}$$

Коли густину k можна вважати сталою, то $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $c_1 = c_2 = c$. Таким чином, система (4) у порівнянні з раніше дослідженим випадком $k(x) \equiv 0$ містить чотири додаткові параметри.

Розв'язки рівнянь (4) шукаємо з точністю до другого порядку у вигляді:

$$\tilde{x}_1 = x_{10} + x_{11}t + x_{12}t^2, \quad \tilde{x}_2 = x_{20} + x_{21}t + x_{22}t^2. \tag{5}$$

Вводячи позначення $R^2 = a_2^2 + b_1b_2$, $\sigma = 1 - k_0$, $\varepsilon = \pm 1$, знаходимо у нульовому наближенні:

$$x_{10} = \frac{1}{2\sigma}\cdot\left(\tilde{y}_1 - \frac{a_2}{b_2}\tilde{y}_2\right), \qquad x_{20} = \varepsilon\sqrt{-\frac{\tilde{y}_2}{b_2}} . \tag{6}$$

Два знаки параметру ε відповідають двом критичним розв'язкам. У першому наближенні маємо:

$$x_{11} = -\frac{\varepsilon}{2b_2^2\sigma^2}\sqrt{-\frac{\tilde{y}_2}{b_2}}\cdot\left\{b_2R^2\tilde{y}_1 + \left[\sigma\cdot(b_2d + a_2c_2) - R^2a_2\right]\tilde{y}_2\right\}, \qquad x_{21} = -\frac{1}{2}\frac{a_2b_2\tilde{y}_1 - \left(a_2^2 - c_2\sigma\right)\tilde{y}_2}{b_2^2\sigma} . \tag{7}$$

У другому порядку:

$$
\begin{aligned}
x_{12} = & -\frac{1}{8}\frac{\left(a_1 b_2^2 - 3a_2 b_1 b_2 - 2a_2^3\right)}{b_2^2\sigma^3}\tilde{y}_1^2 - \frac{1}{4}\frac{3c_1 + 2b_1^2 - a_1 a_2}{b_2}\cdot\frac{\tilde{y}_1\tilde{y}_2}{\sigma^3} - \\
& -\frac{1}{4b_2^2\sigma^3}\cdot\left(7a_2^2 b_1 - \sigma(b_1 c_2 + 6a_2 d) + 4\frac{a_2^4 - a_2^2 c_2\sigma}{b_2}\right)\tilde{y}_1\tilde{y}_2 \\
& -\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{4g\sigma^2 + \sigma(4b_1 d - 6a_2 c_1) - 4a_2 b_1^2 + a_1 a_2^2}{b_2^2\sigma^3} + \frac{\sigma(16a_2^2 d + 6a_2 b_1 c_2) - 11a_2^3 b_1 - \sigma^2(4a_2 f + 6c_2 d)}{b_2^3\sigma^3}\right]\tilde{y}_2^2 - \\
& -\frac{1}{8b_2^4\sigma^3}\cdot\left(12a_2^3 c_2\sigma - 6a_2^5 - 6a_2 c_2^2\sigma^2\right)\tilde{y}_2^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

і

$$
\begin{aligned}
x_{22} = \varepsilon\sqrt{-\frac{\tilde{y}_2}{b_2}}\cdot\Bigg\{ & -\frac{5a_2^4 - 10\sigma\left(a_2 b_2 d + a_2^2 c_2\right) + \sigma^2\left(5c_2^2 + 4fb_2\right) + 5b_1 b_2 a_2^2}{8b_2^3\sigma^2}\cdot\tilde{y}_2 - \frac{R^2}{8b_2\sigma^2}\cdot\frac{\tilde{y}_1^2}{\tilde{y}_2} + \\
& + \frac{3}{4}\cdot\frac{a_2^3 + b_1 b_2 a_2 - \sigma\left(b_2 d + a_2 c_2\right)}{b_2^2\sigma^2}\tilde{y}_1\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для якобіана лінзового відображення, обрахованого у точках, де знаходяться зображення, знаходимо

$$
J = tJ_0 + t^2 J_1 + t^3 J_2 , \tag{10}
$$

$$
J_0 = 4\varepsilon\sigma\sqrt{-b_2\tilde{y}_2} \ , \qquad J_1 = 4\frac{R^2 - \sigma c_2}{b_2}\tilde{y}_2 \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
J_2 = \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{-\frac{\tilde{y}_2}{b_2}}\cdot\Bigg\{ & \frac{\tilde{y}_1^2}{2\tilde{y}_2}R^2 + \frac{\tilde{y}_1}{b_2}\cdot\left[3a_2^3 + 5a_2 b_1 b_2 - 2a_1 b_2^2 - \sigma(3b_2 d + 3a_2 c_2)\right] - \\
& -\frac{\tilde{y}_2}{2b_2^2}\cdot\left[\left(11a_2^2 b_1 b_2 - 4a_1 a_2 b_2^2 - 30\sigma a_2 b_2 d + 7(a_2^2 - \sigma c_2)^2\right) + \sigma b_2(12\sigma f + 12b_2 c_1 + 4b_1 c_2)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Нарешті, для сумарного коефіцієнта підсилення двох критичних зображень отримуємо:

$$
K_{cr} = \frac{1}{2}\frac{\Theta\left(y_2\right)}{\sigma\sqrt{|b|\,y_2}}\left[1 + Py_2 + Qy_1 - \frac{\kappa}{4}\frac{y_1^2}{y_2}\right], \tag{11}
$$

$$
P = \frac{1}{8\sigma^2\left|b_2\right|^3}\left\{15a_2^4 + 27a_2^2 b_1 b_2 - 4a_1 a_2 b_2^2 + 8b_1^2 b_2^2 + 6\sigma\left[2b_2\left(b_2 c_1 - b_1 c_2\right) - 5a_2\left(b_2 d + a_2 c_2\right)\right] + 3\sigma^2\left(4b_2 f + 5c_2^2\right)\right\} \tag{12}
$$

$$
Q = -\frac{1}{4\sigma^2 b_2^2}\cdot\left(2a_1 b_2^2 + \sigma\left(3b_2 d + 3a_2 c_2\right) - 5a_2 b_1 b_2 - 3a_2^3\right), \qquad \kappa = \frac{1}{2\sigma^2\left|b_2\right|}\cdot R^2. \tag{13}
$$

3. Висновки. Формули (5-10) дають наближенні розв'язки рівняння (3), а вирази (11–13) відповідне поле коефіцієнту підсилення, коли точкове джерело знаходиться поблизу каустики-складки. Примітною особливістю знайдених виразів є те, що їх функціональна залежність від координат y_i залишилася тією ж самою, яка мала місце при $k\left(x\right) \equiv 0$. Відмінності зосередженні лише в виразах для коефіцієнтів – за наявності неперервної матерії, ці вирази містять чотири додаткові параметри. Це, в свою чергу, тягне незмінність формул для коефіцієнта підсилення протяжних джерел [12–14] (за умови відповідної заміни коефіцієнтів P, Q, κ та врахування $\sigma \neq 1$). При моделюванні спостережуваних кривих блиску коефіцієнти, що обговорюються, виступають як невідомі підгінні параметри. Їх явні вирази через параметри тейлорівського розкладу лінзового відображення мають значення лише на наступному етапі, при моделюванні розподілу маси у лінзі, зокрема темної матерії.

1. *Grieger B., Kayser R., Refsdal S.* Gravitational micro-lensing as a clue to quasar structure // Astron. Astrophys. – 1988. – Vol. 194. – P. 54–64. 2. *Mineshige S., Yonehara A.* Gravitational Microlens Mapping of a Quasar Accretion Disk // Publ. Astron. Soc. Japan. – 1999. – Vol. 51. – P. 497–504. 3. *Bogdanov M.B., Cherepashchuk A.M.* Reconstruction of the strip brightness distribution in a quasar accretion disk from gravitational microlensing data // Astron. Reports. – 2002. – Vol. 46, № 8. – P. 626–633. 4. *Bogdanov M.B., Cherepashchuk A.M.* The brightness distribution over a stellar disk derived from observations of microlensing by a binary system // Astron. Reports. – 2002. – Vol. 46, № 12. – P. 996–1001. 5. *Bogdanov M.B., Cherepashchuk A.M.* Analysis of a high-amplitude event in component A of the gravitational lens QSO 2237+0305 // Astron. Reports. – 2004. – Vol. 48, № 4. – P. 261–266. 6. *Dominik M.* Revealing stellar brightness profiles by means of microlensing fold caustics // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2005. – Vol. 353, Is. 1. – P. 118–132. 7. *Fluke C.J., Webster R.L.* Investigating the geometry of quasars with microlensing // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 1999. – Vol. 302. P. 68–74. 8. *Pejcha O., Heyrovsky D.* Extended-source effect and chromaticity in two-point-mass microlensing // Astrophys. J. – 2009. – Vol. 690 P. 1772–1796. 9. *Keeton C.R., Gaudi B.S., Petters A.O.* Identifying lenses with small-scale structure. II. Fold lenses // Astrophys. J. – 2005. – Vol. 635. – P. 35–59. 10. *Congdon A.B., Keeton C.R.,*

Nordgren C.E. Analytic relations for magnifications and time delays in gravitational lenses with fold and cusp configurations // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2008. – Vol. 389. – P. 398–406. 11. *Александров О.М.* Аналітична теорія гравітаційного лінзування: асимптотичні формули в околі каустики і квадратичне наближення // Вісник Київ. ун-ту. Астрономія. – 2007. – № 44. – С. 21–29. 12. *Александров О., Жданов В.* Коефіцієнт підсилення блиску малого гаусівського джерела поблизу каустики гравітаційної лінзи / О. Александров // Вісник Київ. ун-ту. Астрономія. – 2009. – № 45. – С. 4–8. 13. *Alexandrov A.N., Zhdanov V.I., Fedorova E.V.* Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic // Astronomy Letters. – 2010. – Vol. 36, №5. – P. 329–337. 14. *Alexandrov A.N., Zhdanov V.I.* Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2011. – Vol. 417. – P. 541–554; arXiv:1006.5903. 2010. 15. *Александров О.М., Жданов В.І., Федорова О.В.* Аналітичні співвідношення для гравітаційно-лінзового відображення в околі критичної кривої // Вісник Київ. Ун-ту. Астрономія. – 2003. – Вип. 39–40. – С. 52–59.

Надійшла до редколегії 29.06.11