вини у цих областях; причому форма ліній може бути схожою на випадок, коли, наприклад, випромінюють два незалежні акреційні диски біля різних об'єктів. Подібна форма ліній дійсно спостерігалася у деяких рентгенівських спектрах активних ядер [16, 17]. Втім, автори далекі від того, щоб вважати пояснення за участю скалярного поля найбільш прийнятним, оскільки є менш екзотичні і більш реалістичні моделі формування ліній [17]. Тим не менш, ретельний розгляд гравітуючих конфігурацій зі скалярним полем у зазначеному вище контексті також заслуговує на увагу.

Публікація містить результати досліджень, проведених при частковій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за проектом Ф64/45-2016.

Список використаних джерел

1. *Novosyadlyi B., Pelykh V., Shtanov Yu., Zhuk A.* Dark energy and dark matter of the universe: in three volumes / Ed. V. Shulga. – Vol. 1: Dark matter: Observational evidence and theoretical models /. – K.: Akademperiodyka, – 2013. – 380 p.
2. *Яцків Я. С., Александров О. М., Вавилова І. Б. [та ін.]* Загальна теорія відносності: горизонти випробувань. – К.: ВАІТЕ, – 2013. – 264 С.
3. *Александров А. Н., Вавилова И. Б., Жданов В. И. [и др.]* Общая теория относительности: признание временем. – К.: Наукова Думка, 2015. – 330 с.
4. *Фишер И. З.* Поле скалярного мезона с учетом гравитационных эффектов // ЖЭТФ. – 1948. –Т. 18. – С. 636–640.
5. *Janis A. I., Newman E. T., Winicour J.* Reality of the Schwarzschild singularity // Phys. Rev. Lett. – 1968. – V. 20. – P. 878–880.
6. *Chowdhury A. N., Patil M., Malafarina D., Joshi P. S.* Circular geodesics and accretion disks in the Janis-Newman-Winicour and gamma metric space-times // Phys. Rev. D. – 2012. – V. 85, id. 104031.
7. *Бронников К.А., Рубин С.Г* Лекции по гравитации и космологии. –М.: МИФИ, 2008. – 460 с.
8. *Shikin G. N., Bronnikov K. A.* Spherically Symmetric Scalar Vacuum: No-Go Theorems, Black Holes and Solitons // Gravitation and Cosmology. – 2002. – V. 8. – P. 107–116.
9. *Nikonov V.V., Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N.* A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the Einstein-scalar field equations // Class. Quant. Grav. – 2008. – V. 25, id.138001.
10. *Solovyev D., Tsirulev A.,* General properties and exact models of static self-gravitating scalar field configurations // Class. Quant. Grav. – 2012. – V.29, id.055013.
11. *Felder G., Frolov A., Kofman L., Linde A.* Cosmology with negative potentials // Phys. Rev. D. – 2002. – V.66, id. 023507.
12. *Azreg-Aïnou M.* Selection criteria for two-parameter solutions to scalar-tensor gravity GRG. – 2010. –V.42, Is.6. – P. 1427–1456 General Relativity and Gravitation, Volume 42, Issue 6, pp. 1427–1456.
13. *Guilbert P.W., Rees M.J.* "Cold" material in non-thermal sources // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. – 1988. – Vol. 233. – P. 475–484.
14. *Lightman A. P., White T. R.* Effects of cold matter in active galactic nuclei – A broad hump in the X-ray spectra // Astrophys. J. – 1988. – Vol. 335. – P. 57–66.
15. *Fabian A. C., Rees M. J., Stella L., et al.* X-ray fluorescence from the inner disc in Cygnus X-1 // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. – 1989. – V. 238. – P. 729–736.
16. *Vasylenko A. A., Fedorova E. V.; Hnatyk B. I., Zhdanov V. I.* Evidence for a binary black hole in active nucleus of NGC 1194 galaxy? // Kinemat. Phys. Celest. Bodies. – 2015. – Vol. 31, Is. 1. – P. 13–18.
17. *Fedorova , E.; Vasylenko, A.; Hnatyk, B. I.; Zhdanov, V. I.* The peculiar megamaser AGN NGC 1194: Comparison with the warped disk candidates NGC 1068 and NGC 4258 // Astronom. Nachr. – 2016. – V. 337, Is. 1–2, p. 96–100.

V. Zhdanov, Dr. Sci., Prof.
Astronomical Observatory of National
Taras Shevchenko University of Kyiv,
O. Stashko, student, Physical Dept.
National Taras Shevchenko University of Kyiv

TEST BODY MOTION IN GRAVITATIONAL FIELD OF A SPHERICALLY SYMMETRICAL CONFIGURATION WITH SCALAR FIELD IN GENERAL RELATIVITY

We study exact special solutions of the joint system of Einstein equations and scalar field equations with a non-zero self-interaction potential, which describe spherically symmetric static configurations. The space-time is asymptotically flat with a naked singularity at the center. The test body motion is analyzed; we found conditions for existence of non-connected regions of stable circular orbits. We show the existence of static trajectories of particles that hang above the configuration.

В. И. Жданов, д-р физ.-мат. наук, проф.
Астрономическая обсерватория
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
А. С. Сташко, студент физического факультета
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

ДВИЖЕНИЕ ПРОБНЫХ ТЕЛ В СТАТИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СКАЛЯРНО-ПОЛЕВОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Изучены частные точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна и уравнений скалярного поля с ненулевым потенциалом самодействия, описывающие сферически-симетричные статические конфигурации в случае асимптотически-плоского пространства-времени с голой сингулярностью в центре. Для этих решений проанализировано движение пробных тел, которые взаимодействуют только гравитационно. Найдены условия, когда существуют несвязные области устойчивых круговых орбит пробных тел. Показано существование траекторий с нулевым угловым моментом, когда частицы "зависают" на определенном расстоянии от центра.

УДК 524.8

С. Парновський, д-р. физ.-мат. наук
Астрономічна обсерваторія Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

ВПЛИВ БЛИЗЬКИХ АТРАКТОРІВ НА ВЕЛИКОМАСШТАБНІ ПЕКУЛЯРНІ РУХИ ГАЛАКТИК

Розраховано впливи окремих атракторів на мультипольну модель колективних рухів галактик. Виведено формули, що теоретично дозволяють отримувати маси та положення атракторів разом з параметрами мультипольної моделі. Але на сучасному рівні точності оцінки пекулярних швидкостей галактик це ще неможливо.

Вступ. В космології ми вважаємо, що Всесвіт є однорідним та ізотропним. Але на масштабах менших за 200–300h^{-1} Мпк він достатньо неоднорідний. Є місця зі збільшеною густиною матерії, наприклад надскупчення галактик, є пустоти або войди, де густина матерії значно менша за середню фонову густину ρ_b. Різниця густини δ характеризує відхилення густини у певному місці $\rho(\vec{r})$ від середньої та дорівнює

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\rho_b} - 1 \,. \tag{1}$$

Зрозуміло, що ця величина може бути від'ємною у областях з меншою густиною, але $\delta > -1$. У надскупченнях ця величина натомість може бути досить великою. Ці відхилення є результатом зростання з часом невеликих початкових флуктуацій густини у ранньому Всесвіті. Швидкість зростання різна на різних просторових масштабах. Утворення надскупчень є результатом росту флуктуацій на більших масштабах, ніж утворення більш маломасштабних флуктуацій маси. В лінійній теорії збурень вони пов'язані співвідношенням

$$\delta_c = b_c \delta \,, \tag{2}$$

де δ_c це контраст густини у кластерах (скупченнях), δ це контраст густини для галактик, а b_c так званий параметр біасінгу. Разом з відсотком середньої густини матерії від критичної густини ρ_{cr}, який позначається $\Omega_m = \rho / \rho_{cr}$, він входить до параметра

$$\beta \approx \frac{\Omega_m^{\ 0.6}}{b_c} \,, \tag{3}$$

що входить до формул, котрі описують великомасштабний рух. За спостережними даними $\beta \approx 0.2$.

Галактики поводяться як пробні частинки в неоднорідному Всесвіті. Вони мають додаткове прискорення до областей з надлишком густини та менше притягуються до пустот. Тому вони рухаються на фоні загального хабблівського розширення Всесвіту. Цей рух, так званий нехаббліввський великомасштабний колективний рух галактик описується полем швидкостей, яке ми досліджуємо. Це поле швидкостей пов'язано з розподілом контрасту густини залежністю [5]

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\beta}{4\pi} \int \delta(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} d^3\vec{r}\,' \,. \tag{4}$$

За астрономічними спостереженнями ми можемо визначити тільки радіальну складову швидкості колективного руху галактик. Тому ми маємо справу зі спостережним полем радіальної складової швидкості колективного руху галактик. В наших роботах ми моделюємо її за допомогою мультипольної моделі колективних великомасштабних рухів галактик, яка докладно описана у статтях [4, 6].

Включення окремих аттракторів у мультипольну модель колективних рухів. Мультипольна модель колективного руху добре враховує вплив притягнення аттракторів, що знаходяться за межами галактик вибірки. Натомість аттрактори всередині просторових границь вибірки створюють проблеми і їх вплив бажано враховувати окремо, хоча б для найбільш масивних надскупчень. Таке удосконалення методу дає можливість одночасно з параметрами поля швидкостей отримати також маси та, можливо, характерні розміри атракторів. Зазначимо, що ми будемо називати словом атрактор кожну надлишкову масу (1), що суттєво впливає на поле великомасштабного руху. Зокрема войди з меншою густиною матерії ми розглядаємо як аттрактори з від'ємною надлишковою густиною.

Цей підхід раніш не застосовувався, тому спочатку треба вибрати деталі описання атракторів, зокрема розподілу їх маси. Реальні атрактори мають витягнуту форму та нерідко бімодальну або тримодальну структуру. Однак на першому етапі доцільно розглядати атрактори зі сферично-симетричним розподілом густини. Замість одного витягнутого реального атрактора можна взяти декілька близьких сферично-симетричних. Перехід до сферичної симетрії значно спрощує інтеграл (4). Введемо величину

$$\mu(r) = \int_0^r \delta(r')r'^2 dr' \,, \tag{5}$$

пропорційну масі надскупчення всередині сфери радіуса *r*. Тоді для нехаббліввської швидкості, викликаної масою одного сферичного атрактора ми маємо сферичне-симетричний розподіл швидкостей, орієнтованих радіально з модулем

$$v(r) = \frac{\beta \mu(r)}{r^2} \,. \tag{6}$$

Якщо аттрактор має чітку границю, то ззовні полу швидкостей залежить тільки від його повної маси, але не від розподілу її. Тому розподіл важливий виключно в випадку, коли деякі галактики вибірки знаходяться всередині атракторів. Якщо це не так, то можна розглядати простішу модель сфери радіусом R з однорідним надлишком густини та надлишковою масою $M = 4\pi\rho_b \delta R^3 / 3$. Для неї

$$\mu(r) = \begin{cases} \delta r^3 / 3 & r < R \\ \delta R^3 / 3 & r > R \end{cases} \,. \tag{7}$$

Але надскупчення не мають чітких границь. Можна для простоти розглянути модель з експоненційним спаданням густини з $\delta(r) = \delta_0 \exp(-\alpha r)$, котра дає

$$\mu(r) = \delta_0 \alpha^{-3} \left[2 - \left(\alpha^2 r^2 + 2\alpha r + 2 \right) \exp(-\alpha r) \right] . \tag{8}$$

Можна застосувати і більш звичний у позагалактичний астрономії профіль густини Кінга, для якого

$$\delta(r) = A \left[1 + x^2 \right]^{-3/2}, \;\; x = \frac{r}{r_c} \,, \tag{9}$$

де r_c – характерний радіус скупчення. Тоді

$$\mu(r) = Ar_c^3 \left[\frac{x}{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \tag{10}$$

Зазначимо, що маса такого атрактора розходиться як логарифм радіуса, тому треба штучно обмежити область використання (9).

Нарешті можна застосувати профіль густини Наварро-Френка-Уайта, для якого

$$\delta(r) = Ax^{-\alpha}\left(1+x\right)^{\alpha-3}, \;\; x = \frac{r}{r_c}, \tag{11}$$

де 0 ≤ α ≤ 3/2. Часто використовують значення α=0, що не має особливості в центрі. Маса такого аттрактора теж розходиться як логарифм радіуса. Інтеграл (5) є гіпергеометричною функцією

$$\mu(r) = \frac{Ar_c^3}{3-\alpha}\; {}_2F_1(\alpha-3, 3-\alpha, 4-\alpha; -x). \tag{12}$$

Для зручності має сенс починати з найпростіших варіантів (7) та (8), при необхідності використовувати (10).

Сформулюємо нову модель колективного руху. На тлі поля швидкостей, що описується мультипольною моделлю, розглядаємо N окремих атракторів з набором параметрів: надлишковою густиною, характерними розмірами та декартовими координатами x_i, y_i, z_i. Галактика, що має координати x_j, y_j, z_j за рахунок поля атракторів має додаткову радіальну компоненту швидкості, яка дорівнює

$$\Delta v_j = \beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i(r_{ij})}{r_{ij}^2} \cos(\theta_{ij}), \quad r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \; \cos(\theta_{ij}) = \frac{x_j(x_i - x_j) + y_j(y_i - y_j) + z_j(z_i - z_j)}{r_{ij}\sqrt{\left(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2\right)}} \tag{13}$$

Це відстань між галактикою та атрактором r_{ij} та косинус кута між напрямками від спостерігача до галактики та від галактики до атрактора, відповідно. Формули (13) написані для плоского простору-часу, але оскільки на великих відстанях вплив атракторів є незначним, ними можна користуватися як наближеними. Функція $\mu_i(r_{ij})$ залежить від відстані та від параметрів і-го атрактора та розподілу його надлишкової маси, загалом від 6 параметрів для кожного атрактора. Вираз (13) додається до загального мультипольного поля, яке описується 24 параметрами для нерелятивістської або напіврелятивістської DQO-моделі та 23 параметрами для напіврелятивістської DQO-моделі з фіксованим значенням параметру γ. Таким чином, повна кількість параметрів дорівнює 24+5N та 23+5N.

Для їх отримання застосовується МНК, причому це вимагає ітераційної процедури. Зазначимо, що 23+N параметрів входять лінійно, їх можна отримати досить простим чином, але 4N параметрів є нелінійними та вимагають складних обчислень для отримання оптимального набору параметрів аттракторів. Додаткова складність пов'язана з використанням різних моделей розподілу надлишкової маси, з котрих треба вибрати найбільш адекватну. Це є важливим етапом при оцінюванні надлишкових мас аттракторів.

Але проблему впливу окремих атракторів принципово розв'язана при використанні формули (13), хоча у простішій моделі сферично-симетричних атракторів.

Перевірка якості моделі руху з використанням списків пекулярних швидкостей RFGC-галактик. Перевіримо ефективність та робастність запропонованої моделі руху галактик. Застосуємо нерелятивістську DQO-модель з 4 додатковими атракторами (Великого атрактора, надскупчень Діва та Персей-Риби, а також концентрації Шеплі, менша кількість атракторів не може адекватно відобразити розподіл маси на відстанях до 150 Мпк) для опрацювання даних про пекулярні швидкості галактик каталогу RFGC [1,2]. Модель містить 28 лінійних та 16 нелінійних параметрів. Для первинної перевірки розглянемо спрощений варіант розрахунку, при якому значення нелінійних параметрів взято з літератури, точніше з роботи [3]

Для підвибірки 1459 RFGC-галактик з відстанями не більш ніж 100 h^{-1} Мпк ми отримуємо наступні результати. Ітераційна процедура врахування впливу атракторів сходитися. Після додавання в модель руху членів, що описують вплив атракторів середня похибка зменшується, але не сильно. Натомість параметри мультипольної моделі сильно змінюють оптимальні по МНК значення. При цьому проблеми викликані не великою кількістю регресорів, у DQOX-моделі їх більше, а сильна зкорельованість членів, що описують вплив атракторів з складовими мультипольної моделі. Можливо також, що профіль густини Кінга (9) не описує адекватно розподіл надлишкової маси атракторів або параметри, наведені у [3] не є коректними.

Таким чином, ми приходимо до висновку, що додавання впливу окремих аттракторів у мультипольну модель руху не дало очікуваного покращення моделі. Оскільки у найближчі часи не слід сподіватися на суттєве збільшення об'єму або точності вибірки даних про пекулярні швидкості, прогрес, пов'язаний з подальшими дослідженнями у цьому напрямку, уявляється малоймовірним. Відповідно, маси атракторів оцінено з надто великими похибками і ці оцінки не має сенсу використовувати. Основним висновком даної пошукової роботи є те, що поки ми не можемо коректно враховувати вплив окремих атракторів при дослідженні полів швидкостей колективних рухів галактик на масштабах порядку 100 Мпк та більше, але така можливість існує. При підвищенні точності вимірювань та збільшенні об'єму вибірки врахування впливів окремих атракторів може бути доцільним.

Список використаних джерел

1. *Karachentsev I. D., Karachentseva V.E., Parnovsky S.L.* Flat Galaxy Catalogue // Astronom. Nachrichten. – 1993 – V. 314 – P. 97–222.
2. *Karachentsev I. D., Karachentseva V.E., Kudrya Yu.N., Sharina M.E., Parnovsky S.L* Revised Flat Galaxy Catalogue // Bull. SAO. – 1999 – V. 47 – P. 5–185.
3. *Marinoni C., Monaco P., Giuricin G., Costantini B.* Galaxy Distances in the Nearby Universe: Corrections for Peculiar // ApJ – 1998 – V. 505. – P. 484–505.
4. *Parnovsky S., Parnowski A.* Large-scale collective motion of RFGC galaxies in curved space-time // Astrophysics and Space Science, – 2011 – V. 331 – P. 429–440.
5. *Peebles P. J. E.* The Large Scale Structure of the Universe // 1980. – Princeton: Princeton Univ. Press.
6. *Парновський С.Л.* Дослідження великомасштабних колективних рухів галактик на основі каталогу RFGC // Вісник Київ. ун-ту. Астрономія. – 2010. – № 46. – С. 26–29.

Надійшла до редколегії 30.08.16

S. Parnovsky, Dr. Sci., Prof.
Astronomical Observatory of National Taras Shevchenko University of Kyiv

AN IMPACT OF NEARBY ATTRACTORS ON THE COLLECTIVE PECULIAR MOTION OF GALAXIES

We study the impact of individual attractors on the multipole model of the collective motion of galaxies. Equations obtained provide a theoretical possibility to estimate masses and locations of attractors together with the parameters of the multipole model. Unfortunately, this is not possible on the state-of-the-art level of estimation of galaxy' peculiar velocities.

С. Парновский, д-р. физ.-мат. наук, проф.
Астрономическая Обсерватория Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

ВЛИЯНИЕ БЛИЗКИХ АТРАКТОРОВ НА КРУПНОМАСШТАБНОЕ КОЛЛЕКТИВНОЕ ПЕКУЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЛАКТИК

Рассчитано влияние отдельных атракторов на мультипольную модель крупномасштабного коллективного движения галактик. Выведены формулы, теоретически позволяющие получить массы и положения атракторов вместе с параметрами мультипольной модели. Но для современного уровня точности оценки пекулярных скоростей галактик это невозможно.

УДК 524.7

О. Александров, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
В. Жданов, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Астрономічна обсерваторія Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

ЧАСОВА ЗАТРИМКА КРИТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В ОКОЛІ КАСПОВОЇ ТОЧКИ ГРАВІТАЦІЙНО-ЛІНЗОВОЇ СИСТЕМИ

Отримано наближені формули для часової затримки критичних зображень точкового джерела, що знаходиться поблизу каспової точки каустики. Ми обговорюємо формули нульового, першого і другого порядків за степенями параметра, який задає близькість джерела до каустики. Ці формули пов'язують час затримки з характеристиками лінзового потенціалу. Формула нульового наближення була отримана в роботі Конгдона, Кітона і Нордгрена (MNRAS, 2008). Для загального потенціалу ми знайшли до неї поправку першого порядку. У випадку потенціалу, симетричного відносно осі каспу, ця поправка тотожно дорівнює нулю. Для цього випадку ми отримали поправку другого порядку. Знайдені співвідношення проілюстровані на простому модельному прикладі.

При так званому сильному гравітаційному лінзуванні (макролінзуванні) спостерігають декілька зображень одного й того самого джерела електромагнітного випромінювання. Зазвичай джерелом є квазар, а лінзою слугує більш близька галактика або скупчення галактик. Коли джерело можна вважати точковим, спостережуваними характеристиками гравітаційно-лінзової системи (ГЛС) є червоні зміщення лінзи і джерела, взаємні положення зображень і відношення потоків від різних зображень. Крім того, власна змінність джерела дозволяє визначити відносну часову затримку між різними зображеннями, яка виникає внаслідок того, що ці зображення формуються променями, що поширюється від джерела до спостерігача різними шляхами. Часова затримка залежить від відстаней до лінзи і до джерела, геометрії ГЛС; вона також є чутливою до космологічної моделі. Ці спостережувані характеристики слугують основою для моделювання ГЛС і, отже, для визначення її фізичних параметрів, таких, наприклад, як розподіл маси в лінзі. Виявляється, що для деяких ГЛС неможливо за допомогою гладкого розподілу маси задовольнити спостережуваним значенням потоків або затримок. Це так звані аномальні потоки (затримки), які розглядаються як свідчення існування значних локальних мас іноді в самій галактиці, іноді поруч із нею [1].

Серед спостережуваних характеристик ГЛС особлива роль належить часу затримки, оскільки це розмірна величина, яка дозволяє оцінити просторовий масштаб. Очікують, що у найближче десятиліття кількість ГЛС з визначеними затримками буде вимірюватися тисячами, що дозволить ефективно застосовувати статистичні методи, з чим пов'язують сподівання стосовно досліджень темної матерії і космології [2–4].

Найбільш яскраво явище гравітаційного лінзування проявляє себе, коли джерело знаходиться поблизу каустики ГЛС, при перетині якої точковим джерелом блиск деяких його зображень формально стає нескінченим. Такі зображення ми називаємо критичними. Щоби змоделювати властивості критичних зображень достатньо задати потрібну кількість похідних гравітаційно-лінзового потенціалу у відповідній критичній точці. В роботі [5] ми найшли і дослідили формули для часової затримки критичних зображень поблизу регулярної точки каустики (особливості лінзового відображення типу "складка"). В цій роботі ми досліджуємо аналогічні питання для випадку, коли точкове джерело знаходиться поблизу каспу каустики (особливість типу "зборка"). Ми застосовуємо метод наближень за степенями параметра близькості до каустики. Для часу затримки у нульовому наближенні ми отримали формулу, що еквівалентна знайденій в [6]. Далі для загального каспу ми знайшли поправку першого порядку, і для симетричного каспу – поправку другого порядку. В основі побудов лежать формули для координат критичних зображень, отримані нами в [7, 8]. Аби проілюструвати знайдені співвідношення ми розглянули час затримки критичних зображень точкового джерела, що знаходиться на осі лінзи Чанг-Рефсдала [9, 10].

1. Вихідні положення теорії гравітаційного лінзування

Ми використовуємо ті самі позначення, що і в попередніх роботах. Зокрема в роботі [5] докладно приведені всі необхідні вихідні співвідношення, тому тут ми обмежуємося дуже стислим викладенням. Рівняння гравітаційної лінзи має такий вид (див. напр. [6, 10]):

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) . \tag{1}$$

Тут вектори $\mathbf{y}$ і $\mathbf{x}$ – кутові положення точкового джерела і його зображення на небесній сфері в одиницях кута Ейнштейна θ_0 . З іншого боку $\mathbf{x}$ можна інтерпретувати як вектор у площині лінзи, виміряний у радіусах Ейнштейна $R_E = D_L\theta_0$, $\mathbf{y}$ – вектор в площині джерела в одиницях $D_S\theta_0$. Кут відхилення $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ визначається формулою