

Ю. Кудря, канд. физ.-мат. наук., старш. науч. сотруд.

Астрономическая обсерватория Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, Киев

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСС ДВОЙНЫХ ГАЛАКТИК МЕТОДОМ "АРГУМЕНТА СИНХРОНИЗАЦИИ"

*Рассмотрены возможности применения метода "аргумента синхронизации" к физическим парам галактик, отличных от пары М31 – Млечный Путь. Мы ограничиваемся парами в Местном объеме, налагая на кандидатов включения в выборку дополнительные условия изолированности. Для четырнадцати физических пар галактик Местного объема оценены их массы, включая массу темной материи.*

*Ключевые слова: галактики, пары галактик, массы галактик, темная материя.*

Yu. Kudrya, Ph. D., senior researcher

Astronomical Observatory of National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv

### DETERMINATION OF THE DOUBLE GALAXIES MASSES BY THE "TIMING ARGUMENT" METHOD

*The possibilities of application of the "timing argument" (TA) method to the physical pairs of galaxies that differ from the pair M31 – Milky Way are considered. We confine ourselves to pairs in the Local volume, imposing the additional isolation conditions on candidates for inclusion in the sample. The method was supplemented by the manner of taking into account the nonparallelism of the radial velocities of galaxies of close (wide) pairs. For the fourteen physical galaxy pairs (see a list in Tables) of the Local volume galaxies their TA masses, including masses of dark matter, were estimated. The ratio  $\chi$  of the mass of pairs to the sum of stellar masses was obtained in wide range from 0.5 to 4000. In some cases (KPG-40, KM-94, J0742+16, J1303-17, J1315+47) the masses estimated by TA are in agreement with popular estimates of  $\chi$ . For whole sample, taking into account such variance of  $\chi$  values it is difficult to make certain conclusions regarding its physical causes. Most likely, the TA model in the majority of the cases considered can not be used, pairs of general considerations can have a relative rotational moment.*

*Keywords: galaxies, pairs of galaxies, masses of galaxies, dark matter.*

УДК 524.7

О. Александров, канд. физ.-мат. наук,

В. Жданов, д-р физ.-мат. наук

Астрономічна обсерваторія Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ,

А. Куйбаров, студ. КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ

### ГРАВИТАЦІЙНЕ МІКРОЛІНЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ДЖЕРЕЛА ПОБЛИЗУ КАУСТИКИ-СКЛАДКИ

*Розглянуто коефіцієнт підсилення блиску протяжного джерела з гаусієвським еліптичним розподілом поверхневої яскравості поблизу каустики-складки гравітаційно-лінзової системи. Для нього отримана аналітична формула, що враховує друге наближення за параметром близькості до каустики. У цьому наближенні беруть до уваги відповідні похідні лінзового потенціалу аж до п'ятого порядку. Знайдена формула містить залежність коефіцієнта підсилення від координат центра джерела, його геометричних розмірів та його орієнтації щодо каустики. На модельному прикладі проведено порівняння аналітичних розрахунків кривих підсилення для різних орієнтацій еліптичного джерела, а також для колового джерела з тією ж світністю.*

*Ключові слова: гравітаційні лінзи, каустика-складка, мікролінзування, еліптичне джерело, коефіцієнт підсилення, аналітичні формули.*

Теоретичний опис явища гравітаційного мікролінзування в околі каустики базується на застосуванні наближеного рівняння гравітаційної лінзи, отриманого після обривання розвинення її потенціалу в ряд Тейлора. Такий розгляд має принципові відмінності залежно від характеру каустичної точки – складка чи зборка (касп) – біля якої розкладають потенціал лінзи [1]. При цьому звичай обмежуються найнижчим (ми його називаємо нульовим) наближенням за відстанню між точковим джерелом і каустикою – так званим наближенням прямолінійної каустики, а також розглядом колового джерела з різними розподілами поверхневої яскравості. Наближення прямолінійної каустики для підсилення блиску точкового джерела є асимптотичною формулою, яка стає точною, лише коли джерело впритул наближається до каустики [4, 5]. Із цього наближення не можна зробити висновки про його похибки на скінченній відстані від каустики, й отже, про можливість його застосування до протяжних джерел. У серії робіт ми дослідили наступні наближення для підсилення блиску точкового джерела як у випадку складки [2–4], так і каспу [9–10], а також колового джерела поблизу складки [3–8]. У випадку точкового джерела при цьому враховано поправки першого і другого порядків за степенями параметру, що характеризує близькість до каустики. Для протяжного джерела вони трансформуються в поправки, що є лінійними за розмірами джерела і в такий спосіб ураховують кривину каустики і дисторсію.

Для порівняння зі спостережуваними даними головний інтерес викликає зміна коефіцієнта підсилення блиску джерела при його прямолінійному русі в околі каустики. Особливо перспективним у сенсі досліджень структури віддалених джерел вважається те, що при перетині каустики протяжним джерелом область швидкої зміни підсилення послідовно сканує площу джерела. При розгляді мікролінзування таких об'єктів, як подвійна система, квазар або галактика доречно розглянути джерела складнішої ніж коло, зокрема еліптичної, форми. Мікролінзування і криві блиску саме еліптичних джерел розглядалися в роботах [11, 12], де обговорювали і можливі астрофізичні застосування. Зауважимо, що в [11] розглядався інший вид мікролінзування – мікролінзування точковою масою, а в роботі [12] автори обмежилися наближенням лінійної каустики і розглядом джерел сталої поверхневої яскравості.

Метою статті є отримання формули для сумарного коефіцієнта підсилення двох критичних зображень еліптичного джерела з гаусівських розподілом яскравості, що розміщується поблизу каустики-складки гравітаційної лінзи, у тому ж таки другому наближенні за параметром близькості до каустики. Отримана формула ілюстрована порівнянням кривих підсилення для різних орієнтацій еліптичного і колового джерел однакової інтенсивності. Не важко впевнитися (див. нижче), що в нульовому наближенні крива блиску еліптичного джерела поблизу складки описується тією самою функціональною залежністю, що і для колового. Але, як буде показано, при врахуванні наступного наближення це вже не так.

**Підсилення протяжного джерела біля каустики-складки.** Нагадаємо потрібні вихідні формули та позначення. Рівняння гравітаційного лінзування у нормованих змінних має такий вигляд [1]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \nabla\Psi(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Тут  $\mathbf{y}$  – двовимірний вектор положення точкового джерела,  $\mathbf{x}$  – відповідне положення зображення,  $\Psi(\mathbf{x})$  – потенціал лінзування, який задовольняє рівняння

$$\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = 2k,$$

де  $k(\mathbf{x})$  – нормована густина маси гравітаційної лінзи. Кажуть також, що формула (1) задає лінзове відображення (lens mapping) площини зображень на площину джерел.

Нехай у системі координат, початок яких лежить у точці на каустиці, а перша вісь дотична до неї, точкове джерело має координати  $y_i$ . Сумарний коефіцієнт підсилення двох критичних зображень цього джерела з урахуванням поправок другого порядку за параметром близькості до каустики подано таким виразом [2–8]:

$$K_{cr}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{\Theta(y_2)}{\sqrt{|b|} |y_2|} [1 + P y_2 + Q y_1] - \frac{\kappa}{8} \frac{y_1^2}{\sqrt{|b|}} (y_2)_+^{-3/2}. \quad (2)$$

Тут  $\Theta(y_2)$  – функція Хевісайда; коефіцієнти  $b$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $\kappa$  – виражаються через коефіцієнти тейлорівського розвинення лінзового потенціалу в околі початку координат (зокрема,  $\kappa$  – це кривина каустики в цій точці);  $(y_2)_+^{-3/2}$  – узагальнена функція, яка визначається такими співвідношеннями з довільною основною функцією  $f(y)$ :

$$\int (y)_+^{-3/2} f(y) dy = \int_0^\infty \frac{f(y) - f(0)}{(y)^{3/2}} dy = 2 \int_0^\infty (y)^{-1/2} \frac{df(y)}{dy} dy. \quad (3)$$

Далі розглянемо протяжне джерело, яке у власній системі координат  $z_i$  (осі якої паралельні осям  $y_i$ , а початок розташовано в центрі джерела) характеризується двовимірним розподілом поверхневої яскравості  $B(\mathbf{z})$ . Координати центра джерела позначимо як  $Y_{cr}$ . Спостережуваний лінзований потік випромінювання від нього подано такими формулами:

$$F(\mathbf{Y}_c) = \iint B(\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{Y}_c) dx_1 dx_2 = \iint K(\mathbf{y}) B(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_c) dy_1 dy_2. \quad (4)$$

Сумарний коефіцієнт підсилення усіх зображень точки  $K(\mathbf{y}) = K_{cr}(\mathbf{y}) + K_0$  складається із двох частин – підсилення критичних зображень  $K_{cr}$  і підсилення  $K_0$  інших зображень, яке можна вважати незмінним (або слабо змінним) під час події мікролінзування.

Зміни потоку з часом під час руху джерела  $F(\mathbf{Y}_c(t))$  дають спостережувану криву блиску. Щоб працювати з безрозмірною величиною, розглядають коефіцієнт підсилення протяжного джерела  $K_{tot}$ , який дорівнює відношенню потоку (4) до потоку за умови відсутності лінзи

$$K_{tot}(\mathbf{Y}_c) = \frac{\iint K(\mathbf{y}) B(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_c) dy_1 dy_2}{\iint B(\mathbf{z}) dz_1 dz_2} = K_{tot,cr}(\mathbf{Y}_c) + K_0. \quad (5)$$

Отже, після вибору моделі лінзи (1) і моделі джерела  $B(\mathbf{z})$ , для теоретичного опису спостережуваних змін потоку у процесі мікролінзування потрібно знайти  $K_{tot,cr}(\mathbf{Y}_c)$ .

**Еліптичне гаусівське джерело.** Розподіл яскравості еліптичного джерела у власній системі беремо у вигляді

$$\tilde{B}(\mathbf{z}) = \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{z_1}{\tilde{a}} \right)^2 + \left( \frac{z_2}{\tilde{b}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (6)$$

Тут  $\tilde{a}$  і  $\tilde{b}$  – параметри, яким пропорційні велика і мала півосі еліпсів однакової яскравості; вони характеризують розміри джерела вздовж осей еліпса. Нелінзований потік, що відповідає розподілу (6), тобто знаменник у формулі

(5), дорівнює площі еліпса  $(z_1/\tilde{a})^2 + (z_2/\tilde{b})^2 = 1$  (який далі будемо називати опорним):  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\mathbf{z}) dz_1 dz_2 = \pi \tilde{a} \tilde{b}$ . Заува-

жимо, що колове гаусівське джерело, яке породжує такий самий потік, має середньоквадратичний радіус  $L = \sqrt{\tilde{a} \tilde{b}}$ .

Відносно координат  $y_i$ , пов'язаних із точкою на каустиці, осі координат  $z_i$  повернуті на кут  $\vartheta$ , їхній початок розташовано в точці  $\mathbf{Y}_c$ .

У координатах  $y_i$  розподіл (6) набуває вигляду:

$$\tilde{B}(\mathbf{y}) = \exp\left\{-\left[A(\Delta y_1)^2 + 2B(\Delta y_1)(\Delta y_2) + C(\Delta y_2)^2\right]\right\}. \quad (7)$$

Тут  $\Delta y_i = y_i - Y_{ci}$ ,

$$A = \frac{\cos^2 \vartheta}{\tilde{a}^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\tilde{b}^2}, \quad B = \cos \vartheta \sin \vartheta \left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - \frac{1}{\tilde{b}^2}\right), \quad C = \frac{\sin^2 \vartheta}{\tilde{a}^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\tilde{b}^2}. \quad (8)$$

Внаслідок інваріантності сліду і визначника матриці, що утворена коефіцієнтами квадратичної форми, маємо

$$A + C = \frac{1}{\tilde{a}^2} + \frac{1}{\tilde{b}^2} \quad \text{і} \quad AC - B^2 = \frac{1}{\tilde{a}^2 \tilde{b}^2}. \quad (9)$$

Знаходження виразу для  $K_{tot,cr}(\mathbf{Y}_c)$  зводиться до розрахунку кількох інтегралів такого вигляду:

$$J_{i,k} = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^i dy_1 \int_0^{\infty} y_2^{k-1/2} e^{-[A(\Delta y_1)^2 + 2B(\Delta y_1)(\Delta y_2) + C(\Delta y_2)^2]} dy_2. \quad (10)$$

При цьому доцільно ввести скорочені позначення  $\Lambda = B/\sqrt{AC}$  та  $\Omega = 1 - \Lambda^2$  і нові змінні для координат центру джерела  $s = \sqrt{A\Omega}Y_{c1}$  і  $h = \sqrt{C\Omega}Y_{c2}$ . Усі потрібні інтеграли (10) виражаються через  $I_0(h)$  і  $I_1(h)$ , де

$$I_k(h) = \int_0^{\infty} z^{k-1/2} e^{-z^2 + 2hz} dz, \quad (11)$$

які можна виразити через вироджені гіпергеометричні функції  ${}_1F_1$ , або функції параболічного циліндра [3–5].

Аналогічно випадку колового джерела доцільно ввести ще інші позначення:

$$\Phi_0(h) = I_0(h) \exp(-h^2), \quad \Phi_1(h) = I_1(h) \exp(-h^2), \quad \Phi_2(h) = h\Phi_0(h) - \Phi_1(h).$$

У цих позначеннях знаходимо

$$K_{tot,cr} = \frac{(C\Omega)^{1/4}}{2\sqrt{\pi|b|}} \left\{ \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{C\Omega}} \left[ P\Phi_1 + Q\sqrt{\frac{C}{A}}(s\Phi_0 + \Lambda\Phi_2) + \kappa \frac{C}{A} \left[ \left( \frac{1}{2}\Lambda s + \frac{1}{4}\Lambda^2 h \right) \Phi_0 - \left( (s + \Lambda h)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\Lambda^2 \right) \Phi_2 \right] \right] \right\}. \quad (12)$$

Для колового джерела  $\tilde{a} = \tilde{b} = L$ ,  $A = C = 1/L^2$ ,  $B = \Lambda = 0$ , функції  $\Phi_k(h)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) набувають відповідних значень і формула (12) переходить у вираз, що був отриманий у роботах [3, 4]. Перший доданок у фігурних дужках формули (12) відповідає нульовому наближенню. Видно, що в цьому наближенні формули для колового й еліптичного джерел відрізняються лише множником і масштабом змінної  $h$ .

У загальному випадку формула (12) для еліптичного джерела відрізняється масштабами обох незалежних змінних, додатковими доданками, що містять множник  $\Lambda$  і дорівнюють нулю для кола, а також амплітудними множниками перед окремими доданками. Зауважимо, що для гранично витягнутого еліпса, коли  $\tilde{b} \rightarrow 0$ , маємо  $\Lambda \rightarrow 1$  і  $\Omega \rightarrow 0$ .

При прямолінійному русі джерела, що перетинає каустику в точці  $\mathbf{y} = 0$ ,  $s = v_1 t$  і  $h = v_2 t$  ( $v_1, v_2 = \text{const}$ ) і  $K_{tot,cr}(\mathbf{Y}(t))$  описує зміни блиску джерела з часом. З іншого боку, покладаючи  $s = (v_1/v_2)h$ , бачимо, що ці зміни описуються функцією однієї змінної  $h$  (яка лише масштабним множником відрізняється від  $t$ ), і ця функція є лінійною комбінацією із числовими коефіцієнтами таких функцій:  $\Phi_0(h)$ ,  $\Phi_1(h)$ ,  $h\Phi_0(h)$  і  $h^2\Phi_2(h)$ :

$$K_{tot,cr}(h) = M \left[ K_0\Phi_0 + K_1\Phi_1 + K_2h\Phi_0 + K_3h^2\Phi_2 \right]. \quad (13)$$

Тут

$$M = \frac{(C\Omega)^{-1/4}}{2\sqrt{\pi|b|}}, \quad K_0 = \sqrt{C\Omega},$$

$$K_1 = P - \Lambda Q \sqrt{\frac{C}{A}} + \kappa \frac{C}{A} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\Lambda^2 \right), \quad K_2 = Q \sqrt{\frac{C}{A}} \left( \frac{v_1}{v_2} + \Lambda \right) + \kappa \frac{C}{A} \left( \frac{\Lambda v_1}{2 v_2} + \Lambda^2 - \frac{1}{2} \right), \quad K_3 = -\kappa \frac{C}{A} \left( \frac{v_1}{v_2} + \Lambda \right)^2.$$

Графіки складових функцій формули (13), а також  $\Phi_2$ , подано на рис. 1. Зазначимо, що при  $h < -2$  всі ці функції швидко прямують до нуля, а при  $h > 3$  виходять на свої асимптотики [3–5]:

$$\Phi_0(h) \rightarrow \sqrt{\pi/h}, \quad \Phi_1(h) \rightarrow \sqrt{\pi h}, \quad \Phi_2(h) \rightarrow \sqrt{\pi/h}/4h. \quad (14)$$

Значення відповідних коефіцієнтів залежать від багатьох чинників: моделі лінзи, точки на каустиці, розмірів джерела, його орієнтації та напрямку траєкторії. Зауважимо, що залежність від орієнтації визначається формулами (8). При цьому очевидно, що внаслідок симетрії еліпса орієнтація  $\vartheta = \pi - \phi$  це те ж саме, що і  $\vartheta = -\phi$ . Отже, достатньо розглядати  $-\pi/2 < \vartheta \leq \pi/2$ . У (8) заміна  $\vartheta \rightarrow -\vartheta$  приводить лише до зміни знака  $B$ , що, у свою чергу, зумовлює зміну знака  $\Lambda$  і тих доданків формул (12, 13), які пропорційні  $\Lambda$  в першому степені.

Із формул (14) бачимо, що при великих  $h$  функції  $\Phi_1(h)$ ,  $h\Phi_0(h)$  і  $4h^2\Phi_2(h)$  мають однакові асимптотики, пропорційні  $\sqrt{h}$ . Зрозуміло, що формулу (13) можна застосовувати лише за не дуже великих  $h$ . Обмеженість околу точки  $h=0$ , у якому формула (13) має задану точність, звичайно, є наслідком застосування наближень.

Відзначимо цікаві частинні випадки формули (12).

1) Під час перетину каустики центром джерела велика вісь еліпса дотична до каустики:

$$\vartheta = 0, \quad A = \frac{1}{\tilde{a}^2}, \quad B = \Lambda = 0, \quad C = \frac{1}{\tilde{b}^2}, \quad \Omega = 1,$$

$$K_{tot,cr} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{b}|\tilde{b}|}} \left\{ \Phi_0 + \tilde{b} \left[ P\Phi_1 + Q\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}s\Phi_0 - \kappa\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right)^2\left(s^2 + \frac{1}{2}\right)\Phi_2 \right] \right\}. \quad (15)$$

Цей вираз має таку саму структуру як і для колового джерела, але з додатковими множниками в окремих доданках.

2) Під час перетину каустики центром джерела велика вісь еліпса нормальна до каустики:

$$\vartheta = \pi/2, \quad A = \frac{1}{\tilde{b}^2}, \quad B = \Lambda = 0, \quad C = \frac{1}{\tilde{a}^2}, \quad \Omega = 1.$$

Для  $K_{tot,cr}$  отримуємо той самий вираз (15) із заміною  $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b}$

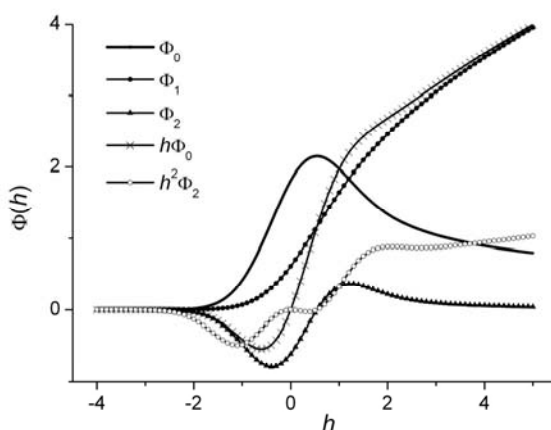


Рис. 1. Графіки окремих складових формули (13)

3) Під час перетину каустики центром джерела велика вісь еліпса утворює з каустикою кут  $\pi/4$ :

$$\vartheta = \pm\pi/4, \quad A = C, \quad \Lambda = \frac{\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2}{\tilde{b}^2 + \tilde{a}^2},$$

$$K_{tot,cr} = \frac{(A\Omega)^{1/4}}{2\sqrt{\pi|\tilde{b}|}} \left\{ \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{A\Omega}} \left[ P\Phi_1 + Q(s\Phi_0 \pm \Lambda\Phi_2) + \kappa \left[ \left( \pm \frac{1}{2}\Lambda s + \frac{1}{4}\Lambda^2 h \right) \Phi_0 - \left( (s \pm \Lambda h)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\Lambda^2 \right) \Phi_2 \right] \right] \right\}. \quad (16)$$

**Деякі приклади.** Залишаючи ретельне дослідження формули (13) для іншої публікації, проілюструємо її розрахунками модельних прикладів. Для визначеності коефіцієнтів  $b$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $\kappa$  потрібно задати модель лінзи й обрати точку на каустиці. Скористаємося моделлю лінзи Чанг – Рефсдала [1, 13, 14] з потенціалом

$$\Psi(x_1, x_2) = -0.2(x_1^2 - x_2^2) + 3\ln(x_1^2 + x_2^2). \quad (17)$$

Обмежимося розглядом однієї траєкторії джерела, ортогональної до каустики, і кількох цікавих орієнтацій еліпса. Велику піввісь опорного еліпса візьмемо рівною 0.5, а відношення осей еліпса чотирьом,  $\tilde{a} = 0.5$ ,  $\tilde{b} = 0.125$ . Колове джерело з тією ж світністю має радіус  $L = 0.25$ .

Відомо, що критична крива і каустика моделі Чанг – Рефсдала мають прості параметричні представлення [13, 14]. На рис. 2 зображено каустику, що відповідає потенціалу (17), траєкторію джерела, а також опорний еліпс у мить перетину каустики при  $\vartheta = 0$ . Точка перетину каустики центром джерела вибрана подалі від каспів. При цьому параметри формули (2) мають такі значення:  $b = -0.213$ ,  $P = 0.425$ ,  $Q = 0.193$ ,  $\kappa = 0.318$ .

На рис. 3 подано криві підсилення критичних зображень для трьох орієнтацій еліпса щодо каустики ( $\vartheta = 0, \pi/4, \pi/2$ ) і для колового джерела з тією ж світністю.

Зауважимо, що при обраних параметрах криві підсилення для випадків  $\vartheta = \pm\pi/4$  дуже близькі, тому ми наводимо лише одну з них. Також слід зауважити, що в розглядуваному прикладі крива підсилення еліптичного джерела при орієнтації  $\vartheta \approx 0.15\pi$  на око збігається з такою для кола. Це, звичайно, не означає, що їх не можна розрізнити при достатній точності вимірювань.

У табл. 1 наведено коефіцієнти залежності (13) для кожної з розглядуваних орієнтацій еліпса й аналогічно для кола. Ураховуючи поведінку окремих складових формули (13), яку зображено на рис. 1, бачимо, що вклади знайдених поправочних доданків, принаймні при розглядуваних розмірах джерел, можуть бути дуже суттєвими і досягати десятків відсотків.

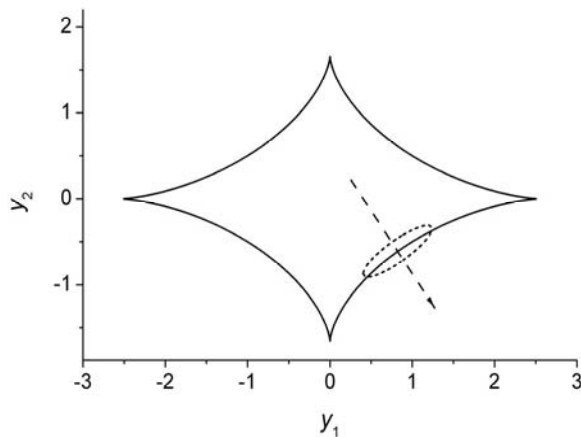


Рис. 2. Каустика моделі (17) – суцільна крива, траєкторія джерела – штрихова, опорний еліпс – пунктир

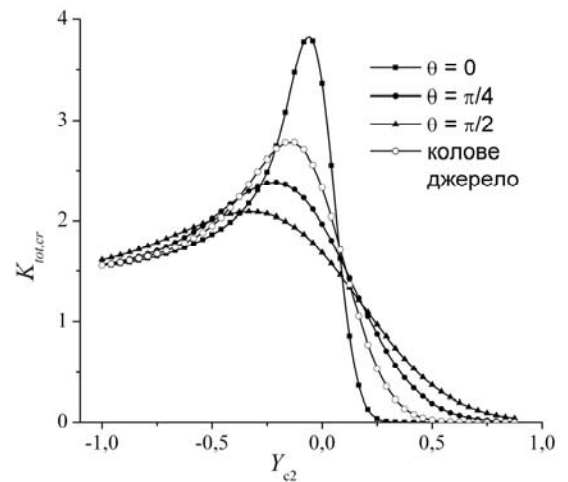


Рис. 3. Криві підсилення для трьох орієнтацій еліптичного джерела і колового джерела з тією ж світністю

Таблиця 1

Коефіцієнти залежності (13) для розглянутих прикладів

$\vartheta$	$M \cdot K_0$	$M \cdot K_1$	$M \cdot K_2$	$M \cdot K_3$
0	1.730	0.642	-0.550	0
$-\pi/4$	1.013	0.084	0.095	-0.091
$\pi/4$	1.013	0.210	-0.030	-0.091
$\pi/2$	0.865	0.188	-0.004	0
$0.15\pi$	1.216	0.212	-0.027	-0.215
коло	1.223	0.179	-0.049	0

**Обговорення.** Отримана вище формула (12) дає наближену аналітичну залежність сумарного коефіцієнта підсилення двох критичних зображень еліптичного джерела з гаусівським розподілом поверхневої яскравості. Вона узагальнює аналогічну формулу для колового джерела, що була отримана в роботі [3]. Ця формула містить поправки, які є лінійними за розмірами джерела і враховують дисторсію лінзового відображення і кривину каустики. За заданої моделі гравітаційної лінзи і точки на каустиці, біля якої перебуває джерело, формула (12) описує залежність коефіцієнта підсилення від координат центра джерела, його розмірів й орієнтації щодо каустики. Відношення півосей та орієнтація еліпса при цьому є довільними. Ми також розглядаємо криві підсилення – тобто зміни коефіцієнта підсилення при прямолінійному русі джерела, траєкторія якого перетинає каустику. Саме ці зміни є безпосередньо спостережуваними. Як видно з отриманих формул, у наближенні прямолінійної каустики крива підсилення еліптичного джерела описується тією ж формулою, що і для кола. Отже, у цьому наближенні за кривою блиску принципово не можна відрізнити еліптичне джерело від колового. Однак при врахуванні знайдених поправок це вже не так.

Внаслідок лінійності формули (4) відносно яскравості формула (12) разом із раніше знайденими формулами для колових джерел із різними розподілами яскравості [5, 7, 8] дозволяє моделювати криві блиску для складніших джерел: серповидних, із "дірками", із плямами тощо. Як ми бачили, різні за формою джерела можуть мати дуже схожі криві блиску. Зважаючи на це, на нашу думку, актуальною залишається проблема визначення за кривою блиску інших характеристик джерела, окрім оцінки його розміру. Можна сподіватися, що теоретичний аналіз кривих підсилення джерел різноманітної форми допоможе краще розібратися в цій проблемі.

**Список використаних джерел**

1. Schneider P. Gravitational Lenses / P. Schneider, J. Ehlers, E.E. Falco. – Berlin, 1992.
2. Alexandrov A.N. Analytical theory of gravitational lensing: asymptotic formulas in the caustic vicinity and quadratic approximation / A.N. Alexandrov (in ukr.: Аналітична теорія гравітаційного лінзування: асимптотичні формули в околі каустики і квадратичне наближення) // Bull. Kyiv Nation. Taras Shevchenko Univ., Astronomiya. – 2007. – № 44. – P. 21–29.
3. Alexandrov A.N. Brightness magnification factor for small Gaussian source near caustic of gravitation lens / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov (in ukr.: Коефіцієнт підсилення блиску малого гаусівського джерела поблизу каустики гравітаційної лінзи) // Bull. Kyiv Nation. Taras Shevchenko Univ., Astronomiya. – 2009. – № 45. – P. 4–8.
4. Alexandrov A.N. Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, E.V. Fedorova // Astronomy Letters. – 2010. – Vol. 36, № 5. – P. 329–337.
5. Alexandrov A.N. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2011. – Vol. 417. – P. 541–554.
6. Alexandrov A.N. Asymptotic relations for high magnification events in presence of dark matter / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, S.M. Koval' (in ukr.: Асимптотичні формули для подій сильного мікролінзування з урахуванням темної матерії) // Bull. Kyiv Nation. Taras Shevchenko Univ., Astronomiya. – 2012. – № 49. – P. 17–20.
7. Zhdanov V.I. Analytical methods in gravitational microlensing / V.I. Zhdanov, A.N. Alexandrov, E.V. Fedorova, V.M. Sliushar // ISRN Astronomy and Astrophysics. 2012, Article ID 906951, 21 p. doi:10.5402/2012/906951.
8. Zhdanov V.I. Qualitative problems in gravitational microlensing / V.I. Zhdanov, A.N. Alexandrov, E.V. Fedorova, V.M. Sliushar // Dark Matter. V. 2. Astrophysical Aspects of the Problem. – Kyiv, 2014. – P. 84–130.

9. Alexandrov A.N. Gravitational lens equation: critical solutions and magnification near folds and cusps / A.N. Alexandrov, S.M. Koval, V.I. Zhdanov // *Advances in Astronomy and Space Physics*. – 2012. – Vol. 2, issue 2. – P. 184–187.
10. Alexandrov A.N. Properties of the gravitational lens mapping in the vicinity of a cusp caustic / A.N. Alexandrov, V.I. Zhdanov, S.M. Koval // *Odessa Astronomical Publications*. – 2013. – Vol. 26/2. – P. 169–171.
11. Heyrovsky D. Microlensing of an elliptical source by a point mass / D. Heyrovsky, A. Loeb // *Astrophys. J.* – 1997. – Vol. 490. – P. 38–50.
12. Gaudi B.S. Microlensing of elliptical sources by fold caustics / B.S. Gaudi, Z. Haiman // *arXiv:astro-ph/0401035*.
13. An J.H. The Chang-Refsdal lens revisited / J.H. An, N.W. Evans // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* – 2006. – Vol. 369(1). – P. 317–334.
14. Alexandrov A.N. Dynamic systems that describe Chang-Refsdal gravitational lens / A.N. Alexandrov (in ukr.: Динамічні системи, що характеризують гравітаційну лінзу Чанг-Рефсдала) // *Bull. Kyiv Nation. Taras Shevchenko Univ., Astronomiya*. – 2017. – Т. 56 (2). – С. 25–36.

Надійшла до редколегії 07.04.18

Александров А.Н., канд. физ.-мат. наук,  
Жданов В.И., д-р физ.-мат. наук  
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев,  
Куйбаров А.В., студ. КПИ им. Игоря Сикорского, Киев

## ГРАВИТАЦИОННОЕ МИКРОЛИНЗИРОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ КАУСТИКИ-СКЛАДКИ

Рассмотрен коэффициент усиления блеска протяженного источника, который имеет гауссовское эллиптическое распределение поверхностной яркости и находится вблизи каустики-складки гравитационно-линзовой системы. Для него получена аналитическая формула, которая учитывает второе приближение по параметру близости к каустики. В этом приближении принимаются во внимание соответствующие производные линзового потенциала вплоть до пятого порядка. Найденная формула содержит зависимость коэффициента усиления от координат центра источника, его геометрических размеров и его ориентации относительно каустики. На модельном примере сравниваются аналитические расчеты кривых усиления для разных ориентаций эллиптического источника, а также кругового источника с той же светимостью.

Ключевые слова: гравитационные линзы, каустика-складка, микролинзирование, эллиптический источник, коэффициент усиления, аналитические формулы

Alexandrov A.N., Ph. D.,  
Zhdanov V.I., Dr. Sci.  
Astronomical Observatory of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv;  
Kuybarov A.V., student  
Igor Sikorsky Polytechnic Institute, Kyiv

## GRAVITATIONAL MICROLENSING OF AN ELLIPTICAL SOURCE NEAR A FOLD CAUSTIC

We consider the amplification factor for the luminosity of an extended source near the fold caustic of the gravitational lens. It is assumed that the source has elliptical shape, and the brightness distribution along the radial directions is Gaussian. During the microlensing event the total brightness of all microimages is observed, which changes when the source moves relative to the caustic. The main contribution to the variable component is given by the so-called critical images that arise/disappear at the intersection of the caustic by the source.

The amplification factor for the critical images of an extended source is given by the following formula

$$K_{\text{tot,cr}}(Y_{c,i}) = \frac{\iint K_{\text{cr}}(y_i) B(y_i - Y_{c,i}) dy_1 dy_2}{\iint B(z_j) dz_1 dz_2}.$$

Here  $B(z_j)$  is the brightness distribution of the source in the coordinate system associated with its center;  $Y_{c,i}$  are the coordinates of this center in the coordinate system with origin at the caustic point;  $K_{\text{cr}}(y_i)$  is the total amplification of two critical images of the point with the coordinates  $y_i$ . Brightness of the elliptical source in its own coordinate system is

$$B(z_j) = \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{z_1}{\tilde{a}} \right)^2 + \left( \frac{z_2}{\tilde{b}} \right)^2 \right] \right\},$$

where  $\tilde{a}$  and  $\tilde{b}$  are the semi-major and semi-minor axis of the reference ellipse.

Earlier, by an expansion in the generalized Taylor series in the neighborhood of the point  $y_i = 0$ , a formula for  $K_{\text{cr}}(y_i)$  was obtained, which takes into account the derivatives of the lens potential up to the fifth order (Alexandrov et al // *Astron. Lett.*, 2010). It was used to calculate the amplification of a pair of critical images of an extended circular source with various brightness profiles (Alexandrov, Zhdanov // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2011). In the present paper we obtained an analogous formula for elliptical Gaussian source. The formula involves a dependence on the coordinates of the source centre, its geometric dimensions, and its orientation relative to the caustic. We show that in the linear caustic approximation the amplification of the circular and elliptical sources is described by the same (rescaled) formula. However, in the next approximations the differences are significant. We compare analytical calculations of the amplification curves for different orientations of an elliptical source and for a circular source with the same luminosity for the model example.

Key words: gravitational lenses, fold caustic, microlensing, elliptical source, amplification factor, analytical formulas

УДК 52-852; 524.1; 551.51

В. Данилевський, канд. фіз.-мат. наук  
Астрономічна обсерваторія Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ

## КОСМІЧНІ ПРОМЕНІ Й АЕРОЗОЛИ В ЗЕМНІЙ АТМОСФЕРІ

Однією з гіпотез для пояснення змін земного клімату є вплив зовнішніх космічних чинників, зокрема космічних променів галактичного походження, які є основним джерелом іонізації молекул у тропосфері. Відомо, що за умов достатньої перенасиченості пари води й інших речовин іони стають центрами конденсації цієї пари у краплі рідини й утворення аерозольних частинок. Конденсування водяної пари на аерозольних частинках в атмосфері призводить до утворення хмар, які є одним із головних чинників метеорологічних процесів й у значній мірі впливають на клімат у регіональному та глобальному масштабах. Ці факти були покладені в основу гіпотези про можливий вплив космічних променів на кількість і фізичні властивості хмар та на клімат. Проте досі результати пошуків тісного зв'язку між змінами потоку космічних променів під впливом сонячної активності (т. зв. явища Форбуша) та станом хмарності в атмосфері мають низький рівень достовірності, суперечливі і є предметом наукових дискусій. Головна проблема

© Данилевський В., 2018