УДК 517.929

А. А. Акбергенов, аспірант

Дослідження структури множини неперервних розв'язків одного класу систем різницевих рівнянь

В даній роботі досліджується структура множини неперервних розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь в околі її стану рівноваги. Запропоновано метод побудови неперервних розв'язків одного класу рівнянь.

Ключові слова: різницеві рівняння.

Інститут математики НАН України,
01601 Київ-4, Україна, вул. Терещенківська, 3

A. A. Akbergenov, postgraduate

Investigation of the set of continuous solutions of one class of systems of difference equations

The structure of the set of continuous solutions of systems of nonlinear difference equations in the neighborhood of its equilibrium has been investigated. The method of construction of continuous solutions of one class of difference equations has been proposed.

Key Words: difference equations

Institute of Mathematics National Academy of Science of Ukraine
01601 Kyiv-4, Ukraine, 3, Tereshchenkivska Str.

E-mail: Akbergenov.Abdivali@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

1. Постановка задачі. Дана стаття присвячена досліженню структури множини неперервних розв'язків системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ — деяка дійсна $(n \times n)$-матриця, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, в околі особливої точки $(\infty, 0)$ $\big(F(\infty, 0) = 0\big)$. При різних припущеннях відносно матриць $A(t)$ і вектор-функції $F(t, x(t))$ цій проблемі присвячена велика кількість робіт [3-6] і в даний час досить добре вивчена. Особливо це стосується випадку, коли матриця $A(t)$ не залежить від t, тобто є сталою [4]. Що стосується загального випадку, то тут можна відмітити лише окремі роботи, в яких вивчалися аналогічні питання для системи рівнянь (1). Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі система рівнянь (1) розглядається у випадку, коли $A(t)$ є неперервною N-періодичною (N — ціле додатне число) матрицею такою, що $\det A(t) \neq 0$ при всіх $t \in \mathbb{R}$, а вектор-функція $F(t, x(t))$ — неперервною за всіма змінними і N-періодичною по t.

2. Основний результат. В силу [7] існує неперервна при $t \in \mathbb{R}$ заміна змінних

$$x(t) = C(t)y(t), \tag{2}$$

де $C(t)$ — неособлива, N-періодична $(n \times n)$-матриця, що приводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda(t)y(t) + \widetilde{F}(t, y(t)), \tag{3}$$

де $\Lambda(t) = C^{-1}(t+1)A(t)C(t)$ — неперервна, 1-періодична матриця, для якої виконується умова $\det \Lambda(t) \neq 0$, $\widetilde{F}(t, y(t)) = C^{-1}(t+1) \times \times F(t, C(t)y(t))$.

Позначимо через $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, власні значення матриці $\Lambda(t)$ (легко показати, що всі $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, є неперервними і 1-періодичними функціями) і припустимо, що вони задовольняють умови

- $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, \; t \in [0, 1), \; i, j = 1, \ldots, n$;
- $|\lambda_1(t)| < |\lambda_2(t)| < \ldots < |\lambda_n(t)|, t \in [0, 1)$.

Не обмежуючи загальності, далі будемо вважати, що $\Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$. В противному випадку систему (3) можна привести до такого вигляду за допомогою деякої неособливої заміни змінних.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1. *вектор-функція $\widetilde{F}(t, y)$ є неперервною, N-періодичною по t в області $D : t \in \mathbb{R}, |y| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |y_j| \leq b$, $\widetilde{F}(t, 0) \equiv 0$ і такою, що для*

довільних $(t, y'), (t, y'') \in D$ *виконується співвідношення*

$$|\widetilde{F}(t, y') - \widetilde{F}(t, y'')| \le L(|y'| + |y''|)^{\alpha}|y' - y''|,$$

де $L, \alpha = const > 0$*;*

2. $0 < |\lambda_i(t)| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, t \in [0, 1)$*;*

3. $|\lambda_*|^{-1} \cdot |\lambda^*|^{1+\alpha} = \delta < 1,$
де $\lambda_* = \min\limits_{t\in[0,1)} \{|\lambda_1(t)|\},$
$\lambda^* = \max\limits_{t\in[0,1)} \{|\lambda_n(t)|\}.$

Тоді існує неособлива в області $D^* \subset D$ *заміна змінних*

$$y(t) = z(t) + \varkappa(t, z(t)), \tag{4}$$

де вектор-функція $\varkappa(t, z)$ *є неперервною по всіх змінних,* N*-періодичною по* t*,* $\varkappa(t, 0) \equiv 0$*, що приводить систему рівнянь (3) до лінійного вигляду*

$$z(t + 1) = \Lambda(t)z(t). \tag{5}$$

Доведення. Розглянемо систему різницевих рівнянь

$$k(t+1, \Lambda(t)z(t)) = \Lambda(t)k(t, z(t)) + \widetilde{F}(t, k(t, z(t))), \tag{6}$$

для якої (використовуючи метод послідовних наближень) в деякій області $D^* \subset D$ побудуємо розв'язок $k(t, z(t)) = z(t) + \varkappa(t, z(t))$, що задовольняє вказаним в теоремі 1 умовам.

Послідовні наближення $k_m(t, z(t))$, $m = 0, 1, \ldots,$ визначимо наступним чином

$$\begin{aligned} k_0(t, z(t)) &= z(t), \\ k_m(t, z(t)) &= \Lambda^{-1}(t)k_{m-1}(t + 1, \Lambda(t)z(t)) - \\ &\quad - \Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t, k_{m-1}(t, z(t))). \end{aligned} \tag{7}$$

Спочатку покажемо, що при всіх $t \ge 0$ та достатньо малих $|z|$ виконується нерівність

$$|k_m(t, z(t))| \le |z(t)| + \tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

де $\tilde{L}$ — деяка додатна стала, або

$$|k_m(t, z(t)) - z(t)| \le \tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

Дійсно співвідношення (9) виконується при $m = 0$. Нехай воно виконується для деякого $m \ge 0$. Тоді в силу (7) маємо

$$k_{m+1}(t, z(t)) - z(t) = \\ = \Lambda^{-1}(t)k_m(t+1, \Lambda(t)z(t)) - \Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t, k_m(t, z(t))) - \\ -\Lambda^{-1}(t)\Lambda(t)z(t)$$

і, в силу умов теореми, отримуємо

$$\begin{gathered} |k_{m+1}(t, z(t)) - z(t)| \le \\ \le |\Lambda^{-1}(t)||k_m(t + 1, \Lambda(t)z(t)) - \Lambda(t)z(t)| + \\ + L|\Lambda^{-1}(t)||k_m(t, z(t))|^{1+\alpha} \le \\ \le |\Lambda^{-1}(t)|\tilde{L}|\Lambda(t)z(t)|^{1+\alpha} + \\ +|\Lambda^{-1}(t)|L\big(|z| + \tilde{L}|z|^{1+\alpha}\big)^{1+\alpha} \le \\ \le \tilde{L}\big(\delta + \frac{L}{\tilde{L}}\big(1 + \tilde{L}|z|^{\alpha}\big)^{1+\alpha}\big)|z|^{1+\alpha} \le \\ \le \tilde{L}|z|^{1+\alpha}. \end{gathered}$$

Отже, співвідношення (9) виконуються при $t \ge 0, |z| \le b^*$ та всіх $m \ge 0$.

Тепер доведемо, що послідовність вектор-функцій $k_m(t, z(t)), m = 0, \ldots,$ рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції $k(t, z(t))$. Для цього покажемо, що при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ та $m \ge 1$ справедлива оцінка

$$|k_m(t, z(t)) - k_{m-1}(t, z(t))| \le M\Delta^{m-1}|z(t)|^{1+\alpha}. \tag{10}$$

Дійсно, в силу умов 1–3 та (7) маємо

$$|k_1(t, z(t)) - k_0(t, z(t))| \le |\Lambda^{-1}(t)\Lambda(t)z(t) - \\ -\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t, z(t)) - z(t)| \le M|z(t)|^{1+\alpha},$$

тобто оцінка (10) виконується при $m = 1$. Припустимо, що вона має місце для деякого $m \ge 1$. Тоді, в силу умов теореми і представлення (7) знаходимо

$$\begin{gathered} |k_{m+1}(t, z(t)) - k_m(t, z(t))| = \\ = |\Lambda^{-1}(t)k_m(t + 1, \Lambda(t)z(t)) - \\ -\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t, k_m(t, z(t))) - \\ -\Lambda^{-1}(t)k_{m-1}(t + 1, \Lambda(t)z(t)) + \\ +\Lambda^{-1}(t)\widetilde{F}(t, k_{m-1}(t, z(t)))| \le \\ \le |\Lambda^{-1}(t)||k_m(t + 1, \Lambda(t)z(t)) - \\ -k_{m-1}(t + 1, \Lambda(t)z(t))| + \\ +|\Lambda^{-1}(t)||\widetilde{F}(t, k_m(t, z(t))) - \widetilde{F}(t, k_{m-1}(t, z(t)))| \le \\ \le |\Lambda^{-1}(t)|M\Delta^{m-1}|\Lambda(t)|^{1+\alpha}|z(t)|^{1+\alpha} + \\ +|\Lambda^{-1}(t)|L2^{\alpha}\bigg(|z(t)| + \tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}\bigg)^{\alpha} \times \\ \times M\Delta^{m-1}|z(t)|^{1+\alpha} \le \\ \le M\Delta^{m-1}\left[\delta + L2^{\alpha}\bigg(|z(t)| + \tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}\bigg)^{\alpha}\right] \times \end{gathered}$$

$$\times|z(t)|^{1+\alpha} \le M\Delta^m |z(t)|^{1+\alpha},$$

де $\delta + L2^\alpha\Big(|z(t)| + \tilde{L}|z(t)|^{1+\alpha}\Big)^\alpha < \Delta < 1$ при достатньо малих значеннях $|z(t)|$.

Таким чином, оцінка (10) має місце при $t \ge 0, |z(t)| \le b^*$ та всіх $m \ge 1$, і тому послідовність функцій (7) рівномірно збігається до деякої неперервної функції $k(t,z)$. Переходячи в (7) до границі при $m \to \infty$, можна переконатися, що $k(t,z)$ є розв'язком системи рівнянь (6).

Позначимо

$$\varkappa_m(t, z(t)) = k_m(t, z(t)) - z(t), \ \ t \ge 0, \ \ m = 0, 1, \dots. \tag{11}$$

Тоді легко переконатися, що $\lim\limits_{m\to\infty} \varkappa_m(t, z(t)) = k(t, z(t)) - z(t) = \varkappa(t, z(t))$ і $\varkappa(t, 0) \equiv 0$. Теорема 1 доведена.

Тепер розглянемо випадок, коли умова 3) теореми 1 не виконується, тобто тоді, коли $|\lambda_*|^{-1} \cdot |\lambda^*|^{1+\alpha} \ge 1$. Для зручності перепишемо систему різницевих рівнянь (3) у вигляді

$$\begin{gathered} y_1(t+1) = \lambda_1(t) y_1(t) + f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}(t+1) = \lambda_{n-1}(t) y_{n-1}(t) + \\ + f_{n-1}\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ y_n(t+1) = \lambda_n(t)\ y_n(t) + f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{gathered} \tag{12}$$

Для даного випадку теорема 1 не має місця, і тому питання представлення неперервних розв'язків системи рівнянь (12) залишається відкритим. Тим не менш має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1), 2). Тоді в деякій області $D^* \subset D$ існує заміна змінних*

$$\begin{gathered} y_i(t) = \bar{y}_i(t), \qquad i = 1, \dots, n-1 \\ y_n(t) = \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)), \end{gathered} \tag{13}$$

де функція $\gamma(t, y_1(t), \dots, y_{n-1}(t))$ є неперервною при $t \in \mathbb{R}^+$, N-періодичною по t, $\gamma(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$, та такою, що для довільних $(t, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n-1})$ та $(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})$ з області D^* виконується наступне співвідношення

$$\begin{gathered} |\gamma(t, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n-1}) - \gamma(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})| \le \\ \le K\big(\sum_{s=1}^{n-1} |\hat{y}_s| + \sum_{s=1}^{n-1} |\tilde{y}_s|\big)^\alpha (|\hat{y}_1 - \tilde{y}_1| + \\ + |\hat{y}_2 - \tilde{y}_2| + \ldots + |\hat{y}_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}|), \end{gathered} \tag{14}$$

де $K = const > 0$, яка приводить систему рівнянь (12) до вигляду

$$\begin{gathered} \bar{y}_1(t+1) = \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \bar{f}_1\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)\big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}_{n-1}(t+1) = \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \\ + \bar{f}_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)\big), \\ \bar{y}_n(t+1) = \lambda_n(t)\bar{y}_n(t) + \bar{f}_n\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)\big), \end{gathered} \tag{15}$$

де функції $\bar{f}_i(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)), i = 1, 2, \dots, n$, є неперервними, задовольняють умову 2) відносно $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ та виконується умова $\bar{f}_n(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, 0) \equiv 0$.

Доведення.

Виконавши в (12) заміну змінних (13), отримаємо

$$\begin{gathered} \bar{y}_1(t+1) \ = \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \\ + f_1\big(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}_{n-1}(t+1) = \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \\ + f_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big), \\ \bar{y}_n(t+1) = \lambda_n(t)\Big(\bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \\ \bar{y}_{n-1}(t))\Big) - \gamma(t+1, \bar{y}_1(t+1), \dots, \bar{y}_{n-1}(t+1)) + \\ + f_n\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t) + \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big). \end{gathered} \tag{16}$$

Безпосередньо із (16) випливає, що для доведення теореми достатньо довести існування в деякій області $D^* \subset D$ розв'язку $\gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))$ рівняння

$$\begin{gathered} \gamma\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + f_1\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \\ \bar{y}_{n-1}(t), \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big), \dots, \\ \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + f_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \\ \bar{y}_{n-1}(t))\big)\Big) = \lambda_n(t)\gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) + \\ + f_n\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t), \gamma(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big). \end{gathered} \tag{17}$$

Розв'язок цього рівняння будується за допомогою методу послідовних наближень, які визначаються наступним чином:

$$\begin{gathered} \gamma_0(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) = 0, \qquad m \ge 1 \\ \gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)) = \\ = \lambda_n^{-1}(t)\gamma_{m-1}\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \\ + f_1\big(t, \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t), \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), \dots \\ \dots, \bar{y}_{n-1}(t))\big), \dots, \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \end{gathered} \tag{18}$$

$$+ f_{n-1}\big(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big) -$$
$$- \lambda_n^{-1}(t) f_n\big(t, \bar{y}_1(t), ..., \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))\big).$$

Використовуючи умови теореми та співвідношення (18) можна показати, що при достатньо малому b^* функції $\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)), m = 0, 1, \ldots,$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняють умовам:

$$|\gamma_m(t, \hat{y}_1(t), .., \hat{y}_{n-1}(t)) - \gamma_m(t, \tilde{y}_1(t), .., \tilde{y}_{n-1}(t))| \leq$$
$$\leq K\big(\sum_{s=1}^{n-1} |\hat{y}_s(t)| + \sum_{s=1}^{n-1} |\tilde{y}_s(t)|\big)^{\alpha} \times$$
$$\times (|\hat{y}_1(t) - \tilde{y}_1(t)| + \ldots + |\hat{y}_{n-1}(t) - \tilde{y}_{n-1}(t)|). \tag{19}$$

$$|\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t)) - \gamma_{m-1}(t, \bar{y}_1(t), ..., \bar{y}_{n-1}(t))| \leq$$
$$\leq M \cdot \Delta^{m-1} (\sum_{k=1}^{n-1} |\bar{y}_k(t)|)^{1+\alpha}, \tag{20}$$

де $(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})$, $(t, \hat{y}_1, \ldots \hat{y}_{n-1})$, $(t, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}) \in D^*$,$K, M$ — деякі додатні сталі, $0 < \Delta < 1$.

Безпосередньо із (20) випливає, що при $t \geq 0$, $|\bar{y}| \leq b_*$ послідовність неперервних функцій $\{\gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)), m \geq 0\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної функції $\gamma(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))$. Переходячи в (18) до границі при $m \to \infty$ легко показати, що функція $\gamma(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)) = \lim\limits_{m \to \infty} \gamma_m(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))$, є розв'язком функціонального рівняння (17).

Теорема доведена.

Поклавши в (15) $\bar{y}_n(t) = 0$, ми зведемо дослідження системи рівнянь (15) до дослідження системи $n-1$ порядку. При її дослідженні може трапитись два випадки - коли виконується або не виконується умова

$$|\lambda_{1*}|^{-1} |\lambda_{n-1}^*|^{1+\alpha} < 1. \tag{21}$$

Якщо ця умова не виконується, то до системи (15), при $\bar{y}_n(t) = 0$, можна застосувати знову теорему 2 і звести її дослідження до дослідження системи $(n-2)$-го порядку. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо систему різницевих рівнянь $n - k$ порядку, а саме

$$y^{(k)}(t+1) = \Lambda_{n-k}(t) y^{(k)}(t) + f^{(k)}(t, y^{(k)}, 0, \ldots, 0), \tag{22}$$

де $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \ldots, y_{n-k}^{(k)})$, $\Lambda_{n-k}(t) = diag(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{n-k}(t))$, $f^{(k)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, для якої вже буде мати місце умова

$$|\lambda_{1*}|^{-1} |\lambda_{n-k}^*|^{1+\alpha} < 1. \tag{23}$$

і, отже, матиме місце теорема 1.

Оскільки згідно теореми 1, дослідження структури множини неперервних розв'язків системи рівнянь (22) зводиться до дослідження відповідної їй лінійної системи рівнянь, для якої загальний неперервний розв'язок можна легко побудувати, то враховуючи послідовність виконаних замін змінних за допомогою яких дослідження системи рівнянь (1) було зведене до дослідження системи (22), ми зможемо побудувати сім'ю неперервних розв'язків системи рівнянь (1).

Список використаних джерел

1. Kuczma M., Choczewski B., Ger R. Iterative functional equations. — Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

2. Mitropolsky Y. A. , Samoilenko A. M. , Martinyuk D.I. Systems of Evolution Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients. — Kiev:Naukova Dumka, 1985. — 216 P.

3. Pelyukh G. P. Investigation of the structure of the set of continuous solutions of systems of nonlinear difference equations with continuous argument // Ukrainian Mathematical Journal — 2007, № 1. — P. 99 — 108.

4. Pelyukh, G.P., Rerepresentation of Solutions of Difference Equations with a Continuous Argument // Differ. Uravn. — 1996, vol. 32, no. 2. — pp. 304 — 312.

5. Pelyukh G.P. On the linearization of a system of nonlinear functional-difference equations in a neighbourhood of the equilibrium // Doklady Akademii Nauk. — 2009, No. 9. — pp. 36 — 41

6. A. A. Akbergenov, G. P. Pelyukh Constructing continuous solutions for one class of systems of nonlinear difference equations // Reports of the National Academy of Science of Ukraine. — 2012, No. 10. — pp. 7 — 11

7. Pelyukh G. P. On the theory of linear difference equations with periodic coefficients // Doklady Akademii Nauk — 1994. — 336, No. 4. — pp. 451-452.

Надійшла до редколегії 14.01.2013