

УДК 532.517

Городецька Н.С.,¹ д.ф.-м.н., с. н. с.
Нікішов В.І.,¹ чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.
Ткаченко Л.В.,¹ пров. інж.

Розвиток вихорів Гертлера у примежовому шарі над увігнутою поверхнею.

В статті представлено результати чисельного моделювання розвитку вихорів Гертлера, які виникають в круговій течії Куетта між коаксіальними циліндрами при різкій зупинці зовнішнього циліндра. Проведено аналіз впливу нелінійних ефектів на розвиток вихорів і формування грибоподібних структур. Розглянуто нестійкість вихорів (нестійкість Екхауса), розвиток якої призводить до зміни довжини хвилі вихрової системи.

Ключові слова: примежовий шар, Гертлера вихорі, грибоподібні структури.

¹ Інститут гідромеханіки НАН України, 03680,
м. Київ, Желябова 8/4

e-mail: vinihm@gmail.com

Статтю представив член редколегії докт. фіз.-
мат. наук, проф.. Маципура В.Т.

Примежовий шар із увігнутими лініями току виникає при обтіканні складних тіл потоком рідини, зокрема, над лопатками газових турбін, у камерах згорання, дифузорах. У таких примежових шарах розвивається конвективна (у даному випадку відцентрова) нестійкість, внаслідок якої в них формуються поздовжні вихорі, з вісю обертання співпадаючою з напрямком основної течії (рис.1).

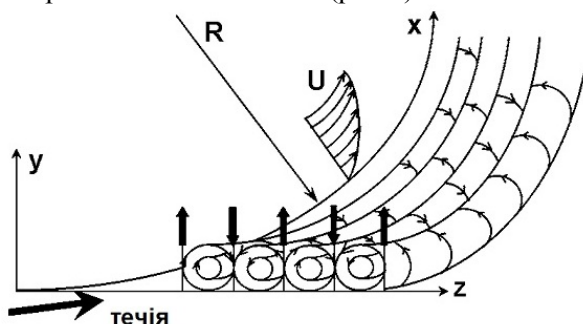


Рис. 1. Схема розташування вихорів над увігнутою стінкою.

Вплив вихорів Гертлера, які знаходяться на лінійній стадії розвитку, на процеси тепло-масообміну в примежовому шарі відносно

Gorodetskaya N.S.,¹ Doc. Sci., Senior Sci.
Nikishov V.I.,¹ Corr. Mem. of NAS., Dr.Sci., Prof.,
Tkachenko L.V.,¹ Senior engineer

Development of Görtler vortices in boundary layer over concave surface

The results of numerical simulation of the development of Görtler vortices arising in circular Couette flow between coaxial cylinders at sharp stop of the external cylinder are presented. The analysis of the influence of nonlinear effects on the development of vortices and the formation of mushroom-like structures is fulfilled. Instability of vortices (Eckhaus instability) is considered. Its development leads to the change of wavelength of vertical system.

Keywords: boundary layer, Görtler vortices, mushroom-like structures.

¹ Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
8/4 Zheliabov str., Kiev, 03680, Ukraine
e-mail: vinihm@gmail.com

невеликий: підсилення цих процесів в області між вихорами, де течія направлена від стінки (див. рис. 1), компенсується зменшенням інтенсивності в області, де течія направлена до стінки. З розвитком нестійкості і зростанням енергії вихорів стають визначальними нелінійні ефекти і в цілому процеси тепло масообміну інтенсифікуються [1]. На нелінійній стадії розвитку вихорів у примежовому шарі формуються так звані "грибоподібні" структури, які характеризуються значними зсувами потоку біля їх границь. В області, де потік є направленим від стінки, має місце викидання низькошвидкісної рідини від стінки, внаслідок чого профіль швидкості основної течії різко змінюється і виникає точка перегину. В результаті профіль швидкості стає нестійким. На бокових поверхнях грибоподібних структур внаслідок існування зустрічних потоків, обумовлених дією вихорів, виникають значні зсуви швидкості [2], які приводять до виникнення вторинної нестійкості вихорів і турбулізації потоку.

Нелінійні процеси переносу імпульсу, тепла та маси вниз по потоку тісно пов'язані з

початковими умовами, зокрема, довжина хвилі початкових збурень та їх енергія є домінуючими параметрами, що визначають нелінійний розвиток вихорів [3]. При штучній генерації вихорів важливе значення має співвідношення між товщиною прилеглої шару та відстанню місця вводу збурень від поверхні [4]. Вибір цих параметрів стає важливим з точки зору розвитку методів управління процесами переносу в багатьох технічних установках.

В даній роботі проведено чисельне моделювання розвитку поздовжніх вихорів. Основну увагу зосереджено на вивченні внутрішньої структури течії із поздовжніми вихорами, формування грибоподібних структур та їх розвитку.

Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглядається усталена осесиметрична течія Куетта в'язкої нестисливої рідини між коаксіальними циліндрами, які обертаються в одному напрямку з кутовою швидкістю Ω . Радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндрів дорівнюють r_1 та r_2 , відповідно. Розташування осей координат представлено на рис. 2.

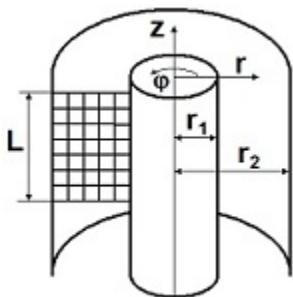


Рис.2. Розташування системи координат та розрахункової області.

Тут вертикальна вісь z направлена вгору, радіальна вісь r направлена вздовж радіуса з початком відліку на вісі обертання, вісь φ направлена вздовж кола. Довжина циліндрів є необмеженою. В момент $t = 0$ зовнішній циліндр миттєво зупиняється і на його внутрішній поверхні починає формуватись пограничний шар. Пристінна течія завдяки дисбалансу відцентрових сил і сил тиску стає нестійкою по відношенню до тривимірних поздовжніх збурень – вихорів Тейлора-Гертлера. Система рівнянь Нав'є-Стокса, що описує розвиток осесиметричної течії в зазорі між циліндрами,

записана в змінних функція току ψ і завихреності ζ (φ - тої компоненти вектора завихреності) має вигляд [4]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial r} + w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right),$$

$$r^2 \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$V = r v.$$

Ці рівняння представлено в безрозмірній формі введення характерних масштабів довжини $L_{ch} = r_2$ та часу $T_{ch} = \Omega_2^{-1}$. Число Рейнольдса Re в даному випадку дорівнює $\text{Re} = \Omega_2 r_2^2 / \nu$.

Для чисельних розрахунків течії між нескінченими циліндрами використовувався відомий підхід [5], в якому застосовувалось періодичне продовження обмеженої області розрахунків довжиною L (рис.2) вздовж вісі z . З умов непротікання на стінках циліндрів випливає, що функція току є постійною на них. Розглядається випадок, коли є відсутніми витрати вздовж вісі z , тоді

$$\psi = 0 \text{ при } r = r_1/r_2 \text{ и } r = 1,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_1/r_2 \text{ и } r = 1.$$

Граничні умови для циркуляції визначаються конкретною задачею. В даному випадку досліджувався випадок, коли рідина рухається в зазорі в режимі “твердого” обертання, тоді для поздовжньої швидкості маємо

$$v(0, r) = r \text{ при } r_1/r_2 < r < 1.$$

Граничні умови для завихреності використовувались у вигляді, запропонованому Тома або Йенсена [6]. Особливості чисельної схеми та алгоритму розрахунків описано в [4].

Відомо, що в початкові моменти часу після різкої зупинки усі зміни параметрів потоку зосереджені у вузькому пристінному шарі біля поверхні циліндру і розв'язок має сингулярний характер. Враховуючи цю особливість розвитку течії, збурення вносились в потік не в момент зупинки циліндра, а з певним запізненням, коли профіль швидкості стає достатньо плавним. В якості збурень, які вносились в потік, використовувались осесиметричні збурення завихреності, які розташовувались вздовж циліндричної поверхні, яка знаходилась на заданій відстані від поверхні циліндра. Інтенсивність збурень змінювалась періодично вздовж вертикальної (трансверсальної) координати із заданим періодом і описувалась рівнянням

$$\zeta(T_m, r_d, z) = \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot 10^{-k}$$

де r_d - радіус циліндричної поверхні, на якій розташовувались збурення, λ - довжина хвилі збурень, T_m - час вводу збурень, k - параметр, що характеризує інтенсивність збурень.

Основні розрахунки проводились для сітки розмірами 600×200 , частина розрахунків було виконано для сітки 140×200 . Величини просторових кроків дорівнювали $\Delta r = 0.001$, $\Delta z = 0.005$, крок по часу був $\Delta t = 0.001$.

3. Поле течії у примежовому шарі. Вплив вихорів Гертлера.

Одним із характерних параметрів задачі є товщина втрати імпульсу, яку розраховували по формулі

$$\theta(t) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v(r,t)}{v_0(r)} \left(1 - \frac{v(r,t)}{v_0(r)} \right) r dr.$$

Товщина втрати імпульсу для течії, що розглядається, відрізняється від випадку течії над плоскою поверхнею, тобто від течії Блазіуса. На рис. 3 представлено криву, яка характеризує зміну товщини втрати імпульсу для нестационарної течії Куетта в часі. На рисунку також приведено аналогічну величину для течії Блазіуса. Відмінність кривих обумовлена характером течії між циліндрами, коли після зупинки зовнішнього циліндра у профілі швидкості виникає максимум швидкості на певній відстані від циліндра [4].

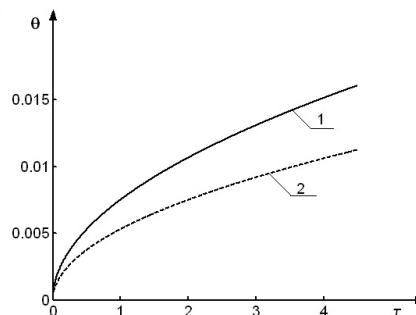


Рис. 3. Зміна товщини втрати імпульсу в часі. Крива 1 відноситься до нестационарної течії Куетта, крива 2 – до течії Блазіуса.

Слід відмітити, що результати досліджень характеристик розвитку поздовжніх вихорів у неусталеної течії Куетта можна переносити на випадок просторової течії Блазіуса над увігнутою поверхнею. Але, дана аналогія справедлива, якщо масштаб, що характеризує розвиток нестационарного примежового шару $\delta \approx (\nu/t)^{1/2}$, де ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості, малий в порівнянні з радіусом циліндра. В цьому випадку $\delta/r \ll 1$ і впливом кривизни на в'язкий примежовий шар можна знехтувати. Ефективність підходу, що полягає в перенесенні результатів розрахунку характеристик поздовжніх вихорів, які формуються в нестационарній течії Куетта, на просторовий випадок, коли розглядається течія Блазіуса над увігнутою поверхнею, доведена в роботах [3,7]. В них продемонстровано кількісну узгодженість результатів розрахунків з відомими даними експериментальних досліджень.

Було показано, що після формування поздовжніх вихорів, поява яких обумовлена введенням штучних збурень, починається стадія їх розвитку, яка описується лінійними рівняннями (лінійна стадія). Далі під дією нелінійних ефектів виникають грибоподібні структури, які добре ідентифікуються при виконанні експериментальних робіт [2]. В подальшому ці когерентні структури руйнуються внаслідок розвитку вторинної нестійкості, але існує інтервал, у якому дані структури є домінуючими.

На рис. 4 представлено послідовність картин ізолій поздовжньої швидкості для різних моментів часу. Товщина втрати імпульсу в момент введення збурень дорівнювала $\theta = 0.0053$ і відповідно товщина примежового шару $\delta = 0.04$. Параметр, який характеризує інтенсивність збурень, дорівнював $k = -1$. Відстань місця введення збурень від поверхні

зовнішнього циліндру складала $1 - r_d = 0.02$, тобто знаходилось в примежовому шарі. Величина зазору між циліндрами була $1 - r_1 = 0.6$. Характерний параметр довжини для приведення величин до безрозмірного виду дорівнював радіусу зовнішнього циліндра r_2 .

Поява грибоподібних структур спостерігається в області, де течія по нормалі до поверхні направлена від стінки. Під впливом нелінійних ефектів має місце значна інтенсифікація інжекції рідких частинок, у яких поздовжня компонента швидкості є малою. Потім рідкі частинки розтікаються у площині φ, z і вершина області стає утовщується, і нарешті формується грибоподібна структура; поблизу її ніжки рідкі частинки з малою поздовжньою швидкістю переміщуються від поверхні і повертаються по напрямку до поверхні в області максимального зсуву швидкості, яка приймає форму “капельно” (рис. 4b та рис. 4c).

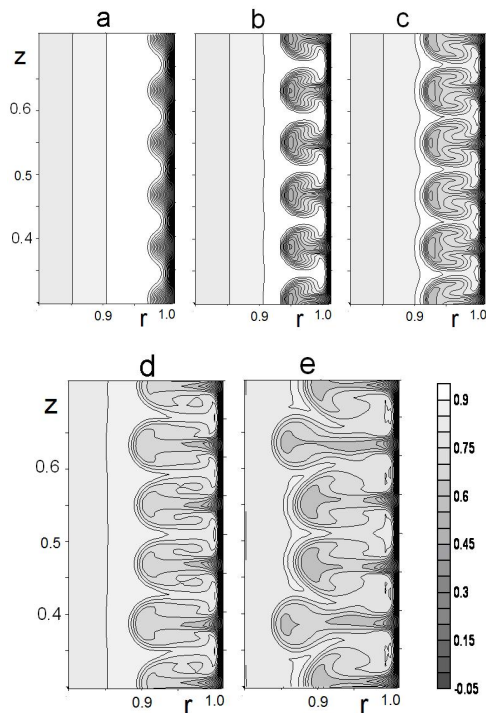


Рис. 4. Картини ізоліній поздовжньої швидкості $v(r, z)$ при введенні збурень в момент $T_m = 0.5$. Картини, позначені буквами, відповідають таким моментам часу: а – $T = 2$; б – $T = 2.7$; в – $T = 3$; д – $T = 4$; е – $T = 4.5$. Час приведено до безрозмірного виду, $T = t\Omega$.

Інжекція рідини з низькою поздовжньою швидкістю призводить до того, що у профілі поздовжньої швидкості виникає точка перегину.

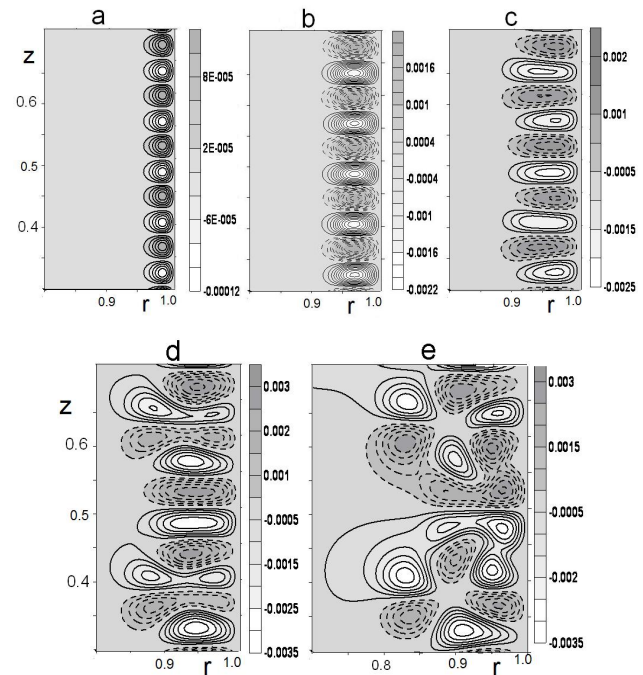


Рис.5. Картини ліній току $\psi(r, z)$ при введенні збурень в момент $T_m = 0.5$. Картини, позначені буквами, відповідають таким моментам часу: а – $T = 1.5$; б – $T = 2$; в – $T = 4$; д – $T = 4.5$; е – $T = 5$. Час приведено до безрозмірного виду, $T = t\Omega$.

Біля області підйому рідини виникають шари із значними зсувами швидкості вздовж нормального та трансверсального напрямків (рис. 4b та рис 4c). Наявність значних зсувів швидкості призводить до розвитку вторинної нестійкості вихорів: виникають підковоподібні вихорі або відбуваються низькочастотні осциляції вихрової системи. Це спричиняє виникнення хаотизації течії, її руйнування та турбулізацію потоку.

Зупинимось ще на одному механізмі вторинної нестійкості вихорів Гертлера, коли вони стають нестійкими по відношенню до трансверсальних збурень (нестійкість Екхауза-Ескхауса instability). Розвиток цієї нестійкості, яка діє на нелінійній стадії, обумовлює об'єднання або розщеплення вихорів, тобто зміну довжини хвилі. Відмітимо, що таку зміну довжини хвилі було зафіксовано при виконанні експериментальних досліджень [8,9]. Послідовність картин розвитку поздовжніх структур і подальшої зміни довжини хвилі

представлено на рис. 5. Параметр, який характеризує інтенсивність збурень, дорівнював $k = -1$. Відстань місця введення збурень від поверхні зовнішнього циліндру складала $1 - r_d = 0.006$, тобто місце було розташовано близько до стінки. Величина зазору між циліндрами була $1 - r_1 = 0.6$.

Аналізуючи результати розрахунків функцій току, треба зазначити, що вплив нелінійних ефектів призводить до нерівномірності розвитку вихорів (рис. 5с) і картина функцій току змінюється. Насамперед це стосується центральної частини вихорів, яка звужується (рис. 5d). З часом ці викривлення нарощуються, вихорі витягуються в радіальному напрямку, і зростання розмірів не є однаковим в трансверсальному напрямку. Далі розміри окремих пар вихорів різко збільшуються вздовж радіального напрямку і в центральній частині вони стають значно тоншими. В той же час товщина центральної частини пар вихорів, які розташовані поруч, стає значно більшою. В результаті зростаюча вихрова пара приймає форму "метелика", в якому розміри у верхній частині суттєво перебільшують довжину хвилі вихорів (рис. 5d). Потім вихорі у метеликоподібних структурах розпадаються, зовнішні частини цих вихрових пар втрачають зв'язок з нижніми частинами і за рахунок нелінійної взаємодії виникає об'єднання вихорів одного знаку, і розміри нових утворених вихрових структур стають суттєво більшими за початкову довжину хвилі.

Виникнення грибоподібних структур і їх подальша еволюція призводить до появи метеликоподібних структур і, відповідно, до суттєвого зростання товщини пограничного шару. Таке локальне збільшення товщини втрати імпульсу виявлено при проведенні експериментальних досліджень [2]. На рис. 6 представлено розраховану залежність осередненої в трансверсальному напрямку товщини втрати імпульсу $\bar{\theta}$ від часу при різних значеннях початкової енергії штучних збурень.

Видно, що осереднена у трансверсальному напрямку товщина втрати імпульсу починає суттєво відрізнятися від незбурених величин, коли має місце вплив нелінійних ефектів. Як і слід було чекати, відхилення від незбуреної кривої спостерігаються тим раніше, чим більше початкова енергія збурень. Треба враховувати, що в області, де нормальна компонента швидкості направлена до стінки, профіль

швидкості є більш наповнений, що призводить до локального зменшення $\bar{\theta}$.

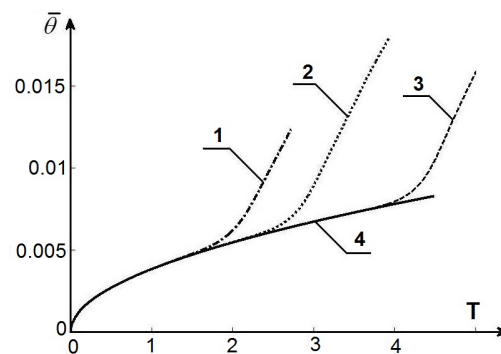


Рис. 6. Залежність осередненої в трансверсальному напрямку товщини втрати імпульсу від часу для різних початкових енергій збурень. Час вводу збурень $T_m = 0.5$, місце їх вводу $1 - r_d = 0.06$. Суцільна крива відповідає випадку відсутності збурень, крива 1 - інтенсивності початкових збурень, що визначаються параметром $k = -1$, крива 2 - $k = 0$, крива 3 - $k = 2$, крива 4 - $k = 4$.

Незважаючи на ці локальні зменшення, коли нелінійні ефекти є суттєвими, осереднена товщина втрати імпульсу зростає і відхиляється від незбуреної кривої. Можна зробити висновок, що відхилення залежності товщини втрати імпульсу від незбуреної кривої може бути

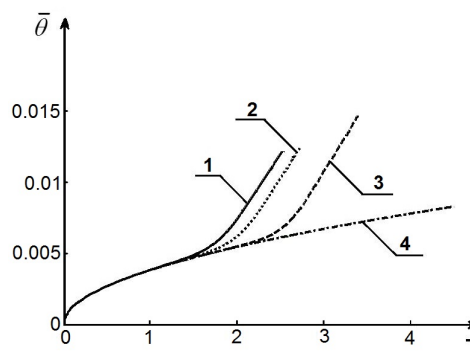


Рис. 7. Залежність осередненої в трансверсальному напрямку товщини втрати імпульсу від часу для різних місць вводу збурень. Час вводу збурень $T_m = 0.5$, інтенсивність початкових збурень визначається параметром $k = -1$. Крива 1 відповідає місцю вводу $(1 - r_d) = 0.006$, крива 2 - $(1 - r_d) = 0.02$, крива 3 - $(1 - r_d) = 0.05$, крива 4 - незбуреній течії.

використано в якості критерію, що характеризує вплив нелінійних ефектів.

На рис. 7 представлено результати розрахунків залежності осереднених у трансверсальному напрямку значень товщини втрати імпульсу від часу для різних місць вводу збурень. Видно, що результати підтверджують наведений вище висновок про те, що під впливом нелінійних ефектів відбувається різке збільшення товщини втрати імпульсу. Відхилення від кривої, яка відповідає відсутності збурень, може бути використано в якості критерію, що характеризує вплив нелінійних ефектів на розвиток вихорів Гертлера. Відмітимо, що відхилення величини $\bar{\theta}$ від незбурених значень починаються раніше для випадку, коли відстань місця вводу збурень дорівнює $(1 - r_d) = 0.006$, тобто коли відстань від поверхні практично дорівнює товщині втрати імпульсу $\theta = 0.0053$ в момент вводу збурень. У випадках, коли збурення вводились на більшій відстані від поверхні (товщина прилеглої шару в момент вводу збурень складала $\delta = 0.04$), відхилення від незбуреної кривої спостерігалось пізніше, що свідчить про меншу швидкість зростання енергії вихорів і більш пізнім часом початку нелінійної стадії.

Висновки

В роботі розглянуто особливості розвитку вихорів Гертлера в пограничному шарі. Основну увагу зосереджено на стадії розвитку, коли під впливом нелінійних ефектів формуються грибоподібні структури. Показано, що в околі цих структур виникають шари із сильними зсувами швидкості вздовж нормального та трансверсального напрямків.

Розглянуто нестійкість вихорів до трансверсальних збурень (нестійкість Екхауза). Продемонстровано, що її розвиток призводить до збільшення довжини хвилі вихрової системи.

Показано, що осереднена товщина втрати імпульсу різко зростає під впливом нелінійних ефектів. Запропоновано використовувати відхилення цієї величини від незбурених величин в якості критерію, який характеризує вплив нелінійних ефектів. Проведено аналіз впливу початкової енергії збурень, місця введення збурень на осереднену товщину втрати імпульсу.

Список використаних джерел

1. Liu J.T.C. Heat transfer in a strongly non-linear spatially developing longitudinal vortices system. / Liu J.T.C., Lee K. // *Phys. Fluids*.-1995. -7.- P. 559–599.
2. Swearingen J. D. The growth and the breakdown of streamwise vortices in the presences of a wall./ Swearingen J. D., Blackwelder R. F. // *J. Fluid Mech.*-1987.-**182**.- P. 255-290.
3. Sabry A.S. Longitudinal vorticity elements in boundary layers: Non-linear developments from initial Görtler vortices as a prototype problem./ Sabry A.S., Liu J.T.C.// *J. Fluid Mech.*-1991.- **231**.- P. 615–663.
4. Gorodetskaya N.S. Numerical simulation of the development of Taylor-Görtler vortices in unsteady Couette flow. 1. Effect of initial energy of perturbations. / Gorodetskaya N.S., Nikishov V.I., Tkachenko L.V.// *Applied Hydromechanics*.-2012.- **14 (86)**, №2.- P. 3-16. 2. Different parameters of perturbation generation. / Gorodetskaya N.S., Nikishov V.I., Tkachenko L.V.// *Applied Hydromechanics*.-2012,-**14(86)**, №3.-P. 37-44.
5. Liu D.C.S. Numerical experiments on time-dependent rotational Couette flow. /Liu D.C.S., Chen C.F. J.// *Fluid Mech.*- 1973.- **59**.- P.77-95.
6. Roache P. *Computational Hydrodynamics*.- Moscow: Mir, 1980.- 616 p.
7. Kozlov L. F. Experimental study of the generation of Gortler vortices in an unsteady boundary layer./ Kozlov L. F., Glushko V.N., Nikishova O.D. // *Gidromekhanika*.- 1982.-**45**.- P. 61-65.
8. Mitsudharmadi H. Splitting and merging of Görtler vortices / Mitsudharmadi H., Winoto S. H., Shah D. A.// *Phys. Fluids*.- 2005.- **17**, 124102.- P. 1-12.
9. Inagaki K. An experimental study of the transition region of the boundary-layer along a concave wall. / Inagami K., Aihara Y. // *Eur. J. Mech. B/Fluids*.- 1995.- **14**.- P.143-168.

Надійшла до редколегії 25.12. 2012