

УДК 539.3

Горошко О. О.¹, д.ф.-м.н. проф.,
Кикоть* С. В.², к.ф.-м.н.

Стійкість та коливання трубопроводу з малою згинною жорсткістю

У статті досліджуються коливання трубопроводу з потоком рідини, який моделюється пружною балкою, наділеною малою згинною жорсткістю. Побудовано безрозмірні параметри оцінки малої згинної жорсткості трубопроводу. Встановлено залежності параметрів які характеризують коливний процес та стійкість руху трубопроводу, від швидкості руху рідини та жорсткості трубопроводу. Встановлені критичні швидкості руху навантаження.

Ключові слова: трубопровід, рухоме навантаження, двохвильовий коливний процес, частота коливань, ексцес, критична швидкість.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д.

² Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Маципура В.Т.

Вступ. Серед наближених методів у різних прикладних та теоретичних дослідженнях застосовуються методи, побудовані на використанні рівнянь, подібних за структурою рівнянням основних задач, що мають точні розв'язки. Деякі з цих методів набули подальшого розвитку в математичному аналізі.

Вартий уваги є метод започаткований у 1926 році Вентцелом, Крамерсом та Бриллюеном – метод ВКБ (WKV), який було застосовано до хвильового рівняння Шредінгера [1]. За цим методом у рівнянні

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + Q^2(t)\psi(t) = 0$ переходять від змінних

(ψ, t) до нових змінних (φ, w) за формулами

$\psi = q^{-1/2}(t)\varphi(w), w(t) = \int q(\tau)d\tau$ та одержують

рівняння виду: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + (1 + \varepsilon)\varphi = 0$.

Oleg O.Goroshko¹, Dr.Sc., Professor,
Sergiy V. Kykot², Ph.D.,

Stability and oscillations of a conduit with small bending rigidity

The paper considers oscillations of a conduit with fluid flow simulated by an elastic beam with small bending rigidity. Some dimensionless estimations of small bending rigidity are obtained. The dependencies of the parameters characterizing oscillation process and conduit stability on the fluid flow velocity and the bending rigidity are determined. The estimations of the critical velocities of the moving loading are obtained.

Key words: conduit, moving loading, double wave oscillation process, oscillation frequency, excesses, critical velocity.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

² National Transport University, 01010, Kiev, Suvorova 1, e-mail: s.v.kykot@gmail.com

У загальному випадку маємо похибку

$$\varepsilon = \frac{Q^2(t) - q^2(t)}{q^2(t)} + q^{-3/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(q^{-1/2} \right).$$

Розв'язок вихідного рівняння будується у формі

$$\psi = D q^{-1/2} \cos \int q(\tau) d\tau.$$

При практичному застосуванні та повільній зміні функції $Q(t)$ значення параметра ε достатньо малі, що сприяло широкому застосуванню цього методу.

Метою даної роботи є побудова спрощеної моделі динаміки трубопроводу малої згинної жорсткості з рухомою рідиною та дослідження поведінки такої механічної системи при різних швидкостях руху потоку рідини.

Вихідні передумови. Власні коливання трубопроводу з потоком рідини, який

моделюється пружною балкою, наділеною згинною жорсткістю EJ , описуються загальноприйнятим диференціальним рівнянням [2,3,7].

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (T - pA - \rho_2 v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

де $\rho = \rho_1 + \rho_2$ – сумарна погонна маса труби та рухомого навантаження, T – поздовжній натяг, pA – складова, що характеризує поздовжній натяг залежно від різних конструкційних та фізичних факторів, v – швидкість протікання рідини.

При малій згинній жорсткості рівняння (1) можна значно спростити і провести дослідження коливань та стійкості трубопроводу з достатньою для практичних застосувань точністю. З цією метою розглянемо диференціальне рівняння поперечних коливань трубопроводу з нерухомою рідиною, яке записується у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (2)$$

Класичний розв'язок рівняння (2) у випадку шарнірного закріплення кінців трубопроводу, має вигляд

$$u_n(x, t) = \sum_k a_k \sin \lambda_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3)$$

де $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ – власні числа, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Власні частоти розтягнутого зусиллям T трубопроводу визначаємо формулами

$$\omega_k^2 = \lambda_k^2 \frac{T}{\rho} + \lambda_k^4 \frac{EJ}{\rho}, \quad (4)$$

де перший доданок є квадрат частоти струни, а другий – квадрат частоти балки з відповідними параметрами.

Оцінка впливу згинної жорсткості.

Виходячи з відомих співвідношень для труби з круглим поперечним перерізом, представимо жорсткість перерізу у вигляді

$$EJ = E \frac{\pi(r^4 - r_0^4)}{4},$$

а поздовжнє зусилля в перерізі – $T = EF = E\pi(r^2 - r_0^2)$. Тоді формула (4) набуде вигляду:

$$\omega_k^2 = \lambda_k^2 \frac{T}{\rho} \left(1 + \lambda_k^2 \frac{r^2 + r_0^2}{4} \right). \quad (5)$$

Побудуємо безрозмірну оцінку залежності власних частот від згинної жорсткості та видовження труби.

Формулу (5) приведемо до вигляду:

$$\omega_k = k\pi \sqrt{\frac{T}{\rho l^2} \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{8l^2} (r^2 + r_0^2) \right)}. \quad (6)$$

Тут використана залежність $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

У випадку тонкостінної труби одержимо:

$$\omega_k = k\pi \sqrt{\frac{T}{\rho l^2} (1 + \theta_k)}, \quad (7)$$

де $\theta_k = \theta_k(k, \frac{d}{l}) = \frac{k^2 \pi^2 d^2}{16l^2}$ – безрозмірний параметр, яким оцінюється згинна жорсткість труби, d – діаметр тонкостінної труби.

Значення параметра $\theta_k(k, \frac{d}{l})$ при різних довжинах труби для власних коливань наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення параметра $\theta_k(k, \frac{d}{l})$

l/d	d/l	1	2	3	4	5	6
5	0,2	0.025	0.099	0.222	0.395	0,617	0,888
10	0,1	0.0062	0.025	0.056	0.099	0,154	0,222
20	0,05	0.0015	0.0062	0.014	0.025	0,039	0,056
40	0,025	0.0004	0.0015	0.0035	0.0062	0.0096	0,014
100	0,01	$6.17 \cdot 10^{-5}$	$2.47 \cdot 10^{-4}$	$5.55 \cdot 10^{-4}$	$9.87 \cdot 10^{-4}$	$1,54 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-3}$
1000	0.001	$6.17 \cdot 10^{-7}$	$2.47 \cdot 10^{-6}$	$5.55 \cdot 10^{-6}$	$9.87 \cdot 10^{-6}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$	$2,22 \cdot 10^{-5}$

Мала згинна жорсткість властива трубам з параметром $\theta < 0.1$. Цьому критерію, згідно з таблицею 1, відповідають труби з відношенням $\frac{l}{d} > 5$. При $\frac{l}{d} = 10$ за критерієм $\theta < 0.1$ з достатньою точністю можна будувати оцінки частот та стійкості перших чотирьох тонів власних коливань. У техніці параметр $\frac{l}{d}$ називають калібром труби.

Постановка і розв'язання задачі.

Виходячи з отриманих оцінок жорсткості, переписемо рівняння коливань трубопроводу з рухомою рідиною (1) у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (\tilde{T} - \rho_2 v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

де $\tilde{T} = T(1 + \theta)$.

Рівняння (7) покладемо в основу дослідження трубопроводу з малою жорсткістю при шарнірному закріпленні його кінців

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (8)$$

Для розв'язання крайової задачі (7) – (8) використаємо побудований у роботі [5] метод виділення та наближеного дослідження одночастотних двохвильових коливань процесів в механічних системах з рухомим інерційним навантаженням. Точний k -й розв'язок рівняння (7), отриманий в роботах [4, 6] має вигляд

$$u_k(x, t) = a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\omega_k t + \gamma_k x + \varphi_k). \quad (9)$$

Формули для визначення частот та ексцесів перших чотирьох тонів коливань, які входять до розв'язку (9), набувають вигляду

$$\omega_k = \lambda_k \sqrt{\frac{(\tilde{T} - \rho_2 v^2)^2}{\tilde{T}(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1 \rho_2 v^2}}, \quad (10)$$

$$\gamma_k = \lambda_k \frac{\rho_2 v}{\sqrt{\tilde{T}(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1 \rho_2 v^2}}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Аналітичні формули (10) встановлюють залежність частоти власних коливань ω_k та параметра γ_k від швидкості руху потоку рідини v .

З аналізу отриманих співвідношень визначасмо значення двох критичних швидкостей руху рідини для кожного тону коливань:

$$v_{kp1k} = \sqrt{\frac{\tilde{T}}{\rho_2}}, \quad v_{kp2k} = \sqrt{\frac{\tilde{T}(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2}}. \quad (11)$$

Як зазначено у монографії [3], для гнучких тіл втрата стійкості коливань на всіх власних частотах здійснюється одночасно, а для об'єктів скінченої жорсткості – послідовно на кожній із частот.

Для побудови графічних залежностей, зокрема, приймалися такі параметри механічної системи: $\rho_1 = \rho_2 = \rho/2$, $l = 2$ м, $r = 0.15$ м, $r_0 = 0.1$ м, $T/\rho = \Omega^2 (l/\pi)^2$, $\Omega = 2\pi$ с⁻¹.

На рисунках 1 та 2 показано залежності частоти власних коливань ω_k та параметра γ_k

від швидкості руху потоку рідини v , що визначаються формулами (10).

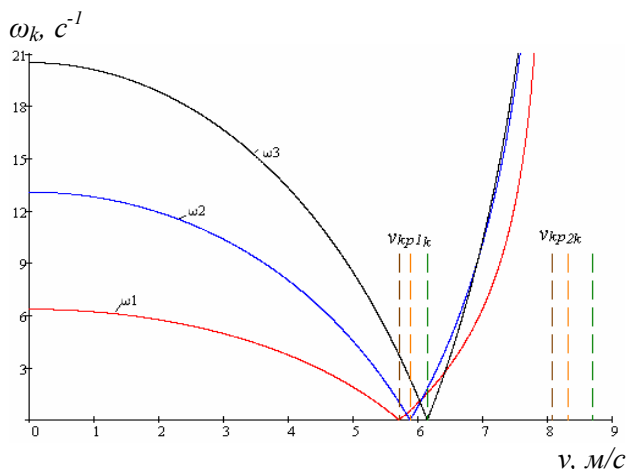


Рис. 1 Залежність частоти від швидкості руху рідини

Рисунок 1 ілюструє послідовність втрати стійкості на частотах перших трьох тонів власних коливань при критичних швидкостях кожного тону. Зокрема, для даної механічної системи втрата стійкості має місце при критичних швидкостях: $v_{kp1} = 5.713 \text{ м/с}$ та $v_{kp2} = 8.08 \text{ м/с}$ на частоті першого тону; $v_{kp1} = 5.879 \text{ м/с}$ та $v_{kp2} = 8.315 \text{ м/с}$ на частоті другого тону; $v_{kp1} = 6.146 \text{ м/с}$ та $v_{kp2} = 8.692 \text{ м/с}$ на частоті третього тону коливань.

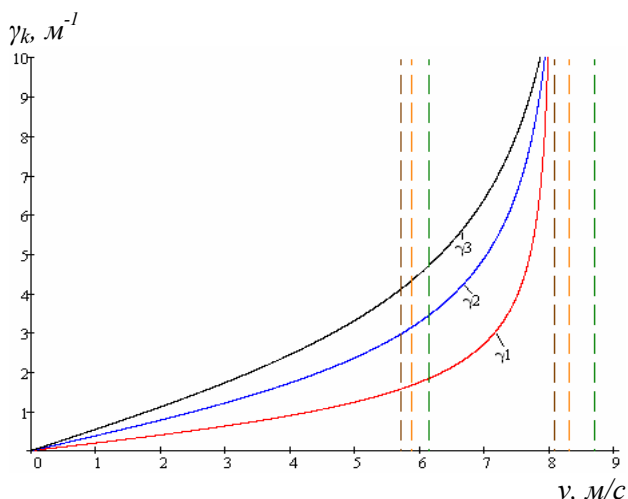


Рис. 2 Залежність ексцесу від швидкості руху рідини

Висновки. Отримані розрахункові формули та графічні залежності дають змогу виявити специфіку коливань і стійкості трубопроводу з малою згинною жорсткістю. Результати

дослідження можуть бути сформульовані у вигляді таких висновків:

- Побудовано спрощене рівняння динаміки трубопроводу з малою згинною жорсткістю з рухомою рідиною.
- Отримано безрозмірні оцінки малої згинної жорсткості трубопроводу.
- Знайдено аналітичні розв'язки рівнянь коливань трубопроводу та формули для обчислення частот та ексцесів.
- Визначено дві критичні швидкості руху рідини в трубопроводі на кожному тоні коливань при яких втрата стійкості коливань здійснюється послідовно на кожній із частот.

Список використаних джерел

1. Fröman N. WKB approximation / N. Fröman, P. O. Fröman. – M. : World, 1967. – 168 p.
2. Païdoussis M. P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics / M. P. Paidoussis // Journal of Sound and Vibration, 2008 – 310. – P. 462–492.
3. Goroshko O. O. Two-waves processes in mechanical systems / Goroshko O. O., Kiba S. P., Dem'yanenko A. G. – Kyiv: Lybid, 1991. – 188 p.
4. Goroshko O. O. One-frequency processes in the systems on moving inertial loading / O. O. Goroshko, S. V. Kykot // Complex analysis and flows with free boundaries. K.: Institute of Mathematics, 2010. – Vol. 7, N. 2. – P. 347–356. – (Proceedings/Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine)
5. Goroshko O. O. An investigation of the one-frequency regimes in two-waves systems (in the systems with a moving loading) / O. O. Goroshko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 2. – P. 93–98.
6. Kykot S. V. The estimation of the influence of additional pulling due to friction in the systems with a moving loading / S. V. Kykot // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 4. – P. 59–62.
7. Kykot S. V. The investigations of the oscillations of an elastic beam with movable inertial loading by means of the direct methods / S. V. Kykot // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 1. – P. 101–106.

Надійшла до редколегії 18. 02. 2013