

УДК 519.9

Григоренко О.Я.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Вовкодав О.В.², ас.,
Яремченко С.М.³, к.ф.-м.н., с.н.с.

Визначення напружено-деформованого стану нетонких сферичних оболонок змінної товщини на основі різних моделей.

В статті розв'язано двовимірні крайові задачі та досліджено напружено-деформований стан нетонких сферичних оболонок при використанні класичної та уточненої постановки, що базується на гіпотезі прямої лінії. За допомогою метода сплайн-колокації зведено двовимірну крайову задачу, яка описує напружено-деформований стан оболонки, до одновимірної, а одновимірну крайову задачу розв'язано методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз впливу використання різних підходів та зміни радіуса оболонки на характер розподілу прогинів цієї оболонки.

Ключові слова: сферична оболонка, напружено-деформований стан, уточнена і класична постановки

^{1,2,3} Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
E-mail: ayagrigenko@yandex.ru,
oxanaukr2111@hotmail.com,
yaremch@gmail.com

Статтю представив член редколегії докт. ф.-м. наук, проф. Маципура В.Т.

1. Вступ

Сферичні оболонки широко застосовуються як елементи конструкцій в різних галузях техніки, зокрема у літакобудуванні, суднобудуванні та ракетно-космічній техніці. Для оцінки міцності та надійності таких конструкцій потрібно знати характеристики їх напруженого стану. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці ефективних методів і підходів до розрахунку оболонок даного класу.

В даній статті порівняно результати розв'язання задачі про напружено-деформований стан сферичної ізотропної незамкненої по координаті φ оболонки сталої товщини, отримані при використанні класичної теорії оболонок та неklasичної, що базується на

A. Ya. Grigorenko¹, prof.,
O. V. Vovkodav², PhD student,
S. N. Yaremchenko³, Ph.D.

Determination of the stress-strain state of nonthin variable thickness spherical shells based on different models.

In the paper two-dimensional boundary value problems are solved and the stress-strain state of nonthin spherical shells is investigated using classical and refined formulations, which is based on straight line hypothesis, are obtained. Using the spline collocation method the two-dimensional boundary value problem, which describes stress-strain state of shell, was reduced to one-dimensional and the one dimensional boundary value problem was solved by stable numerical discrete orthogonalization method. Analysis of different formulations and radius size influence on stress distribution was carried out.

Key words: spherical shell, stress-strain state, refined and classical formulations.

^{1,2,3} S.P. Timoshenko Institute of Mechanics
NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterova str.,
E-mail: ayagrigenko@yandex.ru,
oxanaukr2111@hotmail.com,
yaremch@gmail.com

уточненій моделі прямолінійного елемента [1, 2, 4].

У роботі для розв'язання поставленої задачі запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який базується на зведенні двовимірної крайової задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь з допомогою застосування методу сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків [3]. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Запропонована методика достатньо апробована, і ефективно використовується для розв'язання як статичних так і динамічних задач [5, 6].

2. Постановка задачі

Розглянемо нетонкі ортотропні сферичні оболонки змінної в двох координатних

напрямах товщини в класичній постановці. Оболонка віднесена до ортогональної системи координат θ, φ, γ , де θ, φ – сферичні координати, а γ – нормальна до поверхні зведення координата.

Для опису напружено-деформованого стану оболонки використовуємо теорію оболонок Муштари – Донелла – Власова, тобто у виразах для кривини і кручення члени з компонентами вектора переміщення u і v ми не враховуємо.

Компоненти деформації запишемо через переміщення в сферичних координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \theta \right) + \frac{w}{r}; \\ \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \cos \theta \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; \\ \kappa_\varphi &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\sin \theta} + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\ 2\kappa_{\theta\varphi} &= \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

У виразах (2) $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{\theta\varphi}$ – тангенціальні деформації, $\kappa_\theta, \kappa_\varphi, \kappa_{\theta\varphi}$ – деформації згину координатної поверхні.

Співвідношення пружності запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} N_\theta &= C_{11}\varepsilon_\theta + C_{12}\varepsilon_\varphi, \quad N_\varphi = C_{12}\varepsilon_\theta + C_{22}\varepsilon_\varphi, \\ N_{\theta\varphi} &= N_{\varphi\theta} = C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi} + 2kD_{66}\kappa_{\theta\varphi}, \\ M_\theta &= D_{11}\kappa_\theta + D_{12}\kappa_\varphi, \quad M_\varphi = D_{12}\kappa_\theta + D_{22}\kappa_\varphi, \\ M_{\theta\varphi} &= M_{\varphi\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_\theta h}{1 - \nu_\theta \nu_\varphi}, \quad C_{12} = \nu_\varphi C_{11}, \quad C_{22} = \frac{E_\varphi h}{1 - \nu_\theta \nu_\varphi}, \\ C_{66} &= G_{\theta\varphi} h, \quad D_{11} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_\theta \nu_\varphi)}, \quad D_{12} = \nu_\varphi D_{11}, \\ D_{22} &= \frac{E_\varphi h^3}{12(1 - \nu_\theta \nu_\varphi)}, \quad D_{66} = \frac{G_{\theta\varphi} h^3}{12}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \cos \theta (N_\theta - N_\varphi) + \sin \theta \left(\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Q_\theta \right) + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta N_{\theta\varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + Q_\varphi \right) &= 0, \\ \cos \theta Q_\theta + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta - N_\varphi + r q_\gamma \right) &= 0, \\ \cos \theta (M_\theta - M_\varphi) + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta M_{\theta\varphi} + \sin \theta \left(\frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r Q_\varphi \right) = 0;$$

де $N_\theta, N_\varphi, N_{\theta\varphi}, N_{\varphi\theta}$ – тангенціальні зусилля, $M_\theta, M_\varphi, M_{\theta\varphi}, M_{\varphi\theta}$ – згинаючі і скручуючі моменти, Q_θ, Q_φ – перерізуючі зусилля, q_γ – поверхневе навантаження.

Оскільки в класичній постановці повні кути повороту не враховуються, то за розв'язувальні функції вибираємо компоненти вектора переміщень u, v, w . Після підстановки (1) і (2) в (4) та після ряду перетворень отримуємо розв'язувальну систему трьох диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= b_{11} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + b_{13} u + b_{14} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \varphi} + b_{15} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + b_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\ &+ b_{17} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + b_{18} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b_{19} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} + b_{1,10} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + b_{1,11} w, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= b_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + b_{22} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + b_{11} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + b_{24} v + \\ &+ b_{25} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + b_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} + b_{27} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + b_{28} w, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= b_{31} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{32} u + b_{33} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + b_{34} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + b_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + b_{36} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{37} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \varphi^2} + b_{38} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial \varphi^2} + b_{39} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + b_{3,10} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + b_{3,11} w + b_{3,12} q_\gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

Коефіцієнти b_{ij} в загальному випадку залежать від θ і φ .

Додавши до (5) граничні умови отримаємо двовимірну крайову задачу.

Отримання двовимірної крайової задачі з рівнянь уточненої теорії оболонок, що базується на гіпотезі прямої лінії описано в статті [6].

3. Метод розв'язання

Оскільки в систему (5) входять похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не вище четвертого порядку, то при апроксимації розв'язку по координаті φ можна обмежитись сплайн-функціями п'ятого степеня. Шуканий розв'язок крайової задачі для системи рівнянь (5) з відповідними граничними умовами представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \phi_i(\varphi) \quad v = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \phi_i(\varphi) \\ w &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \psi_i(\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

де $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta)$ – шукані функції змінної θ , $\phi_i(\varphi)$ та ψ_i – лінійні комбінації B -сплайнів відповідно третього та п'ятого степеня на рівномірній сітці $\Delta: 0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_N = b$, що точно задовольняють граничні умови на контурах $\varphi = 0$ і $\varphi = b$.

Підставляючи вирази (6) в розв'язувальні рівняння (5) та їх граничні умови, а потім використовуючи метод сплайн-колокації, будемо вимагати точного їх задоволення в $N+1$ точках колокації $\xi_k \in [0, b], k = \overline{0, N}$. В результаті отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $8(N+1)$, яку можна представити в нормальній формі Коші у вигляді:

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = A(\theta)\bar{R} + \bar{f}(\theta) \quad (12)$$

де \bar{R} - шукана вектор-функція; $\bar{f}(\theta)$ - вектор правих частин; $A(\theta)$ - квадратна матриця.

У випадку, коли для розв'язання описаних задач використовується уточнена теорія оболонок [6], ми отримуємо систему з п'яти диференціальних рівнянь в частинних похідних, де похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не вище другого порядку. У цьому випадку при апроксимації розв'язку по координаті φ ми обмежуємося сплайн-функціями третього степеня. Отриману одновимірну крайову задачу, як і для класичної постановки, розв'язуємо стійким методом дискретної ортогоналізації.

4. Результати розрахунків

За допомогою розробленого чисельно-аналітичного підходу було розв'язано задачу про напружено-деформований стан сферичної ізотропної незамкненої по параметру φ оболонки $\left(\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi\right)$, яка жорстко закріплена по всьому контуру. Товщина оболонки стала $h = 1$. Оболонка знаходиться під дією поверхневого рівномірно нормального навантаження $q = q_\gamma = const$ і має такі характеристики: $G_{\theta\varphi} = G_{\varphi\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,385 E_0$, $\gamma_\varphi = 0,3$, $E_\theta = E_\varphi = E_0$. Було розглянуто оболонки трьох радіусів: $r = 10; 20; 30$ та проаналізовано окрім впливу обраної теорії також і вплив радіуса.

На рис. 1 та 2 порівняно значення прогинів, отримані в результаті використання розробленого в роботі підходу. Суцільною лінією показано розподіл прогинів, при використанні

уточненої постановки; трикутниками – результати, отримані при використанні класичної теорії.

На рис. 1 та 2 показано як змінюється прогин оболонки в залежності радіуса оболонки та теорії, яку використовують для отримання двовимірної крайової задачі: суцільною лінією показано результати, отримані при використанні уточненої теорії, результати використання класичної постановки показано трикутниками.

З наведених рисунків видно, що результати використання різних теорій оболонок практично не впливає на результати розрахунку напружено-деформованого стану оболонок, що розглядаються. Ці результати були дуже важливі при аналізі достовірності нових чисельно-аналітичних підходів, які розробляються у відділі нашого наукового інституту.

Також з рис. 2 видно, що при невеликих радіусах оболонки різниці між прогинами отриманими при використанні різних підходів практично немає. Але зі зростанням радіуса з'являється різниця у максимальних значеннях прогинів. Так, вже при $r = 30$, різниця між максимальними значеннями прогинів при використанні уточненої та класичної теорії перевищує 2 %.

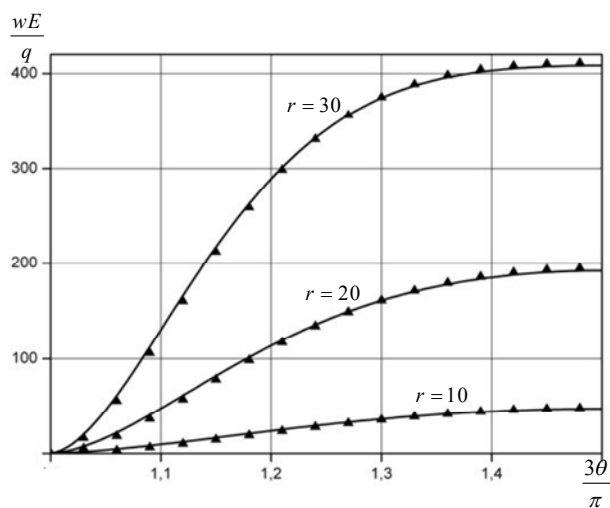


Рис.1 Розподіл прогинів вздовж координати θ для оболонки $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

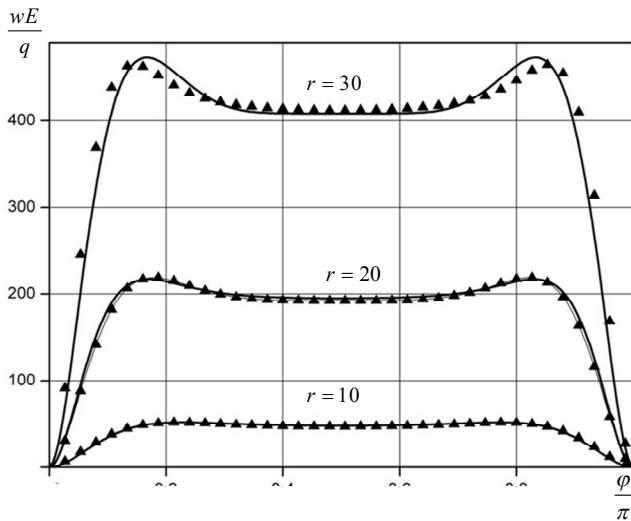


Рис. 2 Розподіл прогинів вздовж координати φ
для оболонки $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Список використаних джерел

1. Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G., Grigorenko A.Ya. Numerical-analytical solution of problems in the mechanics of shells on the basis of various models. – Kiev: Academperiodika, 2006. – 472 p.
2. Zavyalov Yu.S., Kvasov Yu.I., Miroshnichenko V.L. Spline functions methods. – Moscow: Nauka, 1980. – 352 p.
3. Peleh B.L. Theory of Shells with Finite Shear Stiffness. – Kiev: Naukova Dumka, 1973. – 246p.
4. Grigorenko A.Ya. Stress-strain state of nonthin spherical shells of variable thickness with different ways of edge fastening / A.Ya. Grigorenko, O.V. Vovkodav, S.N. Yaremchenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv – 2012. – № 1. – P. 69-72.
5. Grigorenko A.Ya. Stress-strain state of nonthin orthotropic spherical shells of variable thickness / A.Ya. Grigorenko, O.V. Vovkodav, S.N. Yaremchenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, № 1. – P.80- 93.

Надійшла до редколегії 26.12.2012