

УДК 531.395

Ольшанський В.П.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф.,  
Ольшанський С.В.<sup>2</sup>, к.ф.-м.н.

### Перший інтеграл рівняння Мещерського при дробово-лінійному законі зменшення радіуса кулі, що летить вгору

*Розглянуто випадок вертикального руху в повітрі тіла, радіус якого зменшується в часі за дробово-лінійним законом. Використовуючи спеціальне перетворення змінних, одержано розв'язок нелінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами в функціях Бесселя.*

Ключові слова: сферичне тіло змінної маси, аеродинамічний опір, реактивна сила, рівняння Ріккати, вертикальний рух.

<sup>1</sup> Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П.Василенка, 61002, м. Харків, вул. Артема, 44

<sup>2</sup> Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21,  
e-mail: stasolsh77@gmail.com

V. P. Olshanskii<sup>1</sup>, Doctor of Sciences (Physics & Mathematics), Full Professor,  
S. V. Olshanskii<sup>2</sup>, Ph.D. (Physics & Mathematics)

### The first integral of the Meshcherskiy equation at fractionally linearly decreasing radius ball that flies up

*The case of motion in the air, the body radius decreases in time by fractional-linear law was considered. Through special conversion variables failed to find the solution of the nonlinear differential equation with variable coefficients in the Bessel functions.*

Key Words: spherical body of variable mass, aerodynamic resistance, reactive force, Riccati equation, vertical motion.

<sup>1</sup> Kharkiv Petro Vasilenko National Technical University of Agriculture, 61002, Kharkiv, Artema str., 44

<sup>2</sup> National Technical University Kharkiv Polytechnic Institute, 61002, Kharkiv, Frunze st., 21,  
e-mail: stasolsh77@gmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м. наук, проф. Маципура В.Т.

#### Вступ

Не дивлячись на те, що пройшло більше ста років з часу публікації перших робіт з динаміки тіла змінної маси, отримання аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, які описують рух таких тіл представляє науковий інтерес. В цій галузі механіки доводиться розв'язувати нелінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які відносяться до класу Ріккати [1]. Тільки в окремих випадках вдається знайти їх точний аналітичний розв'язок. Нижче, при достатньо загальних припущеннях, які стосуються сили опору та реактивної сили, перший інтеграл рівняння вертикального руху тіла вгору виражено у замкнутому вигляді за допомогою циліндричних функцій. Відмітимо, що І.В. Мещерський [1] перший звів до функцій Бесселя розв'язок задачі про вільні коливання математичного маятника змінної маси. Надалі цей напрямок розвивався в роботах [2,3].

Рух кулі змінної маси та розмірів розглядають при вивченні польоту згораючих частинок палив, дрібнодисперсних хімічно активних відходів (викидів) виробництв, падаючих догораючих

метеоритів і т.д. Тому вивчення особливостей балістики тіл, у яких змінюються розміри в часі, відноситься до актуальних науково-технічних задач.

При русі тіла змінного розміру проявляється ряд особливостей. Процес руху стає нестационарним. Тому при падінні тіла змінної маси втрачає сенс поняття “швидкості витання”, величину якої визначив М.С. Жуковський [4]. Траєкторія тіла, маса якого зменшується, може обриватися внаслідок повного згорання або випаровування рухомого тіла, що неможливо при польоті тіла сталої маси. Заслуговує також уваги ефект відбиття легкого тіла зустрічним потоком [5], та існування екстремуму швидкості [6], характерних тільки при русі малої частки змінної маси.

При вивченні руху кулі розглядали різні закони зміни розміру тіла [7,8], у тому числі лінійний, експонентний та закон В. Срезневського. Використовували також дробово-лінійний закон, якому приділено менше уваги. Його розглядали В.О. Сапа та М.М. Сагітов [9] для лінійного аеродинамічного

опору рухові. На відміну від [9] тут розглядається випадок квадратичного опору газового середовища.

#### Постановка задачі та загальні гіпотези

Допускаємо, що сила аеродинамічного опору  $F_c$  пропорційна площі перерізу сферичного тіла та квадрату швидкості його центру мас:

$$F_c = C_v S v^2.$$

Тут  $C_v$  – коефіцієнт опору;  $S$  – площа поперечного перерізу тіла;  $v(t)$  – швидкість центру мас тіла.

Дотримуючись публікацій [7,8], реактивну силу  $F_p$  вважаємо пропорційною швидкості підйому тіла та похідній  $\frac{dM}{dt}$ , де  $M = M(t)$  – маса тіла. Для сферичної частки сталої щільності  $\rho$  маємо:

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho; \quad \frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho \frac{dr}{dt}.$$

При обчисленні величини реактивної сили, аналогічно [2], вважаємо абсолютну швидкість руху частинок, які від'єднуються від кулі рівною нулю.

Тоді, обчислення реактивної сили зводимо до формули

$$F_p = 4\pi r^2 \rho \mu v \frac{dr}{dt}.$$

Тут  $0 \leq \mu \leq 1$  – поправка на те, що при всебічному зменшенні маси кулі тільки частина маси, яка від'єднується, йде на створення реактивної сили.

В роботах [8,9] приймалося  $\mu = 1$ , а в роботах [6,10] –  $\mu = 0$ .

Таким чином, для визначення швидкості підйому  $v = v(t)$  доводиться розв'язувати диференціальне рівняння

$$M \frac{dv}{dt} \pm F_p + F_c = -Mg. \quad (1)$$

Тут  $g$  – прискорення вільного падіння, знак “+” перед  $F_p$  відповідає прискорювальній, а знак “-” – гальмівній реактивній силі.

Вважаємо, що зміна радіуса  $r$  сферичного тіла, яке летить вгору, описується дробово-лінійною функцією часу  $t$ :

$$r = \frac{r_0}{1 + \gamma t}, \quad (2)$$

де  $r_0 = r(0)$ ;  $\gamma > 0$  – параметр, який характеризує інтенсивність зменшення радіуса та маси однорідної кулі.

#### Побудова розв'язку для реактивної сили, що прискорює рух

З урахуванням вищевикладеного вертикальний підйом однорідної кулі описуємо диференціальним рівнянням:

$$\frac{dv}{dt} + 3\mu \frac{\dot{r}}{r} v + \frac{k}{r} v^2 = -g, \quad (3)$$

де  $k = \frac{3}{4} \frac{C_v}{\rho}$  – зведений коефіцієнт опору; точка над символом означає похідну за часом.

Початковою умовою до (3) приймаємо:

$$v(0) = v_0, \quad (4)$$

позначивши через  $v_0$  початкову швидкість польоту.

Враховуючи (2), перетворенням

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr} \quad (5)$$

представляємо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3\mu}{r} v - k_0 \frac{v^2}{r^3} = \frac{g_0}{r^2}, \quad (6)$$

де  $k_0 = \frac{kr_0}{\gamma}$ ,  $g_0 = \frac{gr_0}{\gamma}$ .

Далі (6) зводимо до загального рівняння Ріккати [11]:

$$v_r' = f(r)v^2 + g(r)v + h(r), \quad (7)$$

в якому  $f(r) = \frac{k_0}{r^3}$ ;  $g(r) = -\frac{3\mu}{r}$ ;  $h(r) = \frac{g_0}{r^2}$ .

Підстановкою [11]:

$$v = \exp\left(-\int f(r)u(r)dr\right), \quad (8)$$

перетворюємо (7) в лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{3}{r}(1+\mu)\frac{du}{dr} + \frac{k_0 g_0}{r^5}u = 0. \quad (9)$$

Вираз (9) відноситься до рівнянь типу Бесселя і його загальним розв'язком є:

$$u(r) = r^{\frac{3}{2}} \left[ c_1 J_\nu(\xi) + c_2 Y_\nu(\xi) \right]. \quad (10)$$

Тут  $v = -\frac{2}{3} - \mu$ ;  $\xi = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{k_0 g_0}}{r^{3/2}}$ ;  $c_1, c_2$  – довільні

сталі;  $J_\nu(\xi), Y_\nu(\xi)$  – відповідно функція Бесселя та функція Неймана індексу  $\nu$ .

Зворотне перетворення, для одержання розв'язку рівняння Ріккати має вигляд

$$v = -\frac{u'_r}{uf(r)}. \quad (11)$$

Для знаходження похідних використовуємо формули [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} J_\nu(\xi) &= -J_{\nu+1}(\xi) + \frac{\nu}{\xi} J_\nu(\xi), \\ \frac{d}{d\xi} Y_\nu(\xi) &= -Y_{\nu+1}(\xi) + \frac{\nu}{\xi} Y_\nu(\xi). \end{aligned}$$

У підсумку отримуємо інтеграл рівняння (3):

$$v = -\sqrt{\frac{rg_0}{k_0}} \cdot \frac{cJ_{\nu+1}(\xi) + Y_{\nu+1}(\xi)}{cJ_\nu(\xi) + Y_\nu(\xi)}. \quad (12)$$

Тут  $c = c_1 c_2^{-1}$ ;  $J_{\nu+1}(\xi), Y_{\nu+1}(\xi)$  – відповідно функція Бесселя та функція Неймана індексу  $\nu+1$ .

Розв'язок (12) задовольняє початковій умові (4), при

$$c = \frac{bY_\nu(\xi_0) - Y_{\nu+1}(\xi_0)}{J_{\nu+1}(\xi_0) - bJ_\nu(\xi_0)}, \quad (13)$$

де  $\xi_0 = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{k_0 g_0}}{r_0^{3/2}}$ ;  $b = -v_0 \sqrt{\frac{k_0}{r_0 g_0}}$ .

Таким чином, за допомогою формул (12) та (13), можна визначити швидкість підйому в будь-який момент часу.

### Побудова розв'язку для реактивної сили, яка сповільнює рух

Спіраючись на вищевикладені допущення, рівняння підйому кулі під дією реактивної сили, яка сповільнює рух, має вигляд

$$\frac{dv}{dt} - 3\mu \frac{\dot{r}}{r} v + \frac{k}{r} v^2 = -g. \quad (14)$$

Рівняння (14) доповнюємо початковою умовою (4).

Використовуючи перетворення (5), представляємо рівняння (14) у вигляді

$$\frac{dv}{dr} - \frac{3\mu}{r} v - k_0 \frac{v^2}{r^3} = \frac{g_0}{r^2}, \quad (15)$$

де  $k_0, g_0$  – мають попередній зміст.

Рівняння (15) зводимо до (7), але з новим значенням коефіцієнта  $g(r) = \frac{3\mu}{r}$ . Інші

коефіцієнти залишаються незмінними.

Використовуючи перетворення (8), отримуємо

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{3}{r}(1-\mu) \frac{du}{dr} + \frac{k_0 g_0}{r^5} u = 0. \quad (16)$$

Диференціальне рівняння (16), є рівнянням типу Бесселя, із загальним розв'язком:

$$u(r) = r^{\frac{3}{2}\psi} [c_1 J_\psi(\xi) + c_2 Y_\psi(\xi)]. \quad (17)$$

Тут  $\psi = \mu - \frac{2}{3}$ .

Для знаходження розв'язку рівняння Ріккати, використовуємо зворотне перетворення (11) та формули диференціювання функцій Бесселя.

В результаті отримуємо

$$v = -\sqrt{\frac{rg_0}{k_0}} \cdot \frac{cJ_{\psi+1}(\xi) + Y_{\psi+1}(\xi)}{cJ_\psi(\xi) + Y_\psi(\xi)}, \quad (18)$$

де константа  $c$  визначається виразом

$$c = \frac{bY_\psi(\xi_0) - Y_{\psi+1}(\xi_0)}{J_{\psi+1}(\xi_0) - bJ_\psi(\xi_0)}.$$

### Числові результати та їх аналіз

Вивчимо вплив реактивної сили, яка прискорює рух, на швидкість польоту. Для цього прийемо такі вихідні дані:  $r_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м;  $k = 3,12 \cdot 10^{-5}$ ;  $\gamma = 3 \text{ с}^{-1}$  та  $v_0 = 60$  м/с. На рис. 1 показано графіки, отримані для різних значень  $\mu$ , цифрами 1,2,3 позначено криві, що відповідають  $\mu = 0$ ; 0,5; 1. Видно, що при збільшенні реактивної сили збільшується швидкість центру мас та зростає час підйому тіла до повної зупинки

Для реактивної сили, яка сповільнює рух, графіки представлені на рис. 2. Цифри 1,2,3 на рисунку мають попередній зміст. Порівнюючи графіки на рис.1 та рис. 2, видно, що у другому випадку куля летить із значно меншою швидкістю і зупиняється за більш короткий проміжок часу.

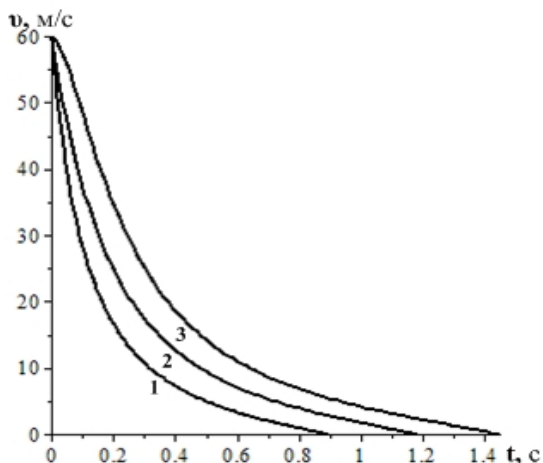


Рис. 1 Залежності швидкості від часу, для реактивної сили, що прискорює рух, за різних  $\mu$

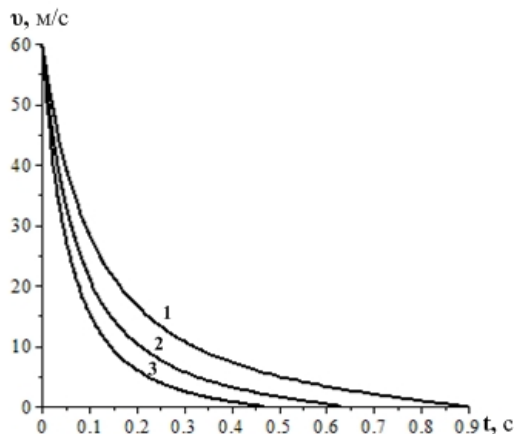


Рис. 2 Залежності швидкості від часу, для реактивної сили, що сповільняє рух, за різних  $\mu$

#### Список використаних джерел

1. Meshchersky I.V. Works on the mechanics of bodies with variable mass. – Moscow: GITTL, 1952. – 276 p. (in Russian).
2. Novoselov V.S. Analytical mechanics of systems with variable masses. – Leningrad: Leningrad University Publishing, 1969. – 240 p. (in Russian).
3. Karagodin V.M. Theoretical basis of body mechanics of variable composition. – Moscow: Oborongiz, 1963. – 178 p. (in Russian).
4. Zhukovsky N.E. The Works. V. 3. – Moscow: DSTI-NKTP, 1936. – 380 p. (in Russian).
5. Kucherenko S.I., Olshanskii V.P., Olshanskii S.V., Tischenko L.M. Simulation flight droplets that evaporate when moving in the gas. – Kharkov: Eden, 2006. – 203 p. (in Ukrainian).
6. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V. On the conditions of extreme fall speed of a spherical body radius // Visn. of NTU "KPI". Topics. no.: System analysis, management and information technology. Kharkov: NTU "KPI". – 2008. – N. 26. – P. 67–78. (in Russian).
7. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V. Analytical solution of the Meshchersky equation describing of the vertical motion of the

#### Висновки

Перший інтеграл рівняння Мещерського при русі вертикально вгору однорідної кулі, радіус якої зменшується в часі за дробово-лінійним законом, виражається через функції Бесселя. Індекс функцій Бесселя залежить від величини і напрямку дії реактивної сили. Серед індексів є такі, що швидкість кулі можна обчислювати за допомогою таблиць циліндричних функцій.

sphere with decreasing mass // Technical mechanics. – 2009. – № 4. – P. 36-42. (in Russian).

8. Olshanskii V.P., Avramov K.V., Olshanskii S.V. Closed solutions of the Meshchersky equation at the different laws reduction of the radius of the sphere flying // Mechanics of Solids. – 2009. – №. 39. – P. 207-214. (in Russian).
9. Sagitov M.N. Some cases of the motion of a rotating sphere with variable mass axis horizontal // Proceedings of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Series Sci. Science. Mathematics and Mechanics. – 1963. – № 15. – P. 88-99. (in Russian).
10. Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V. On the maximum of the vertical fall velocity of a homogeneous sphere whose radius changes by the exponential law // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2009. – Vol. 82, – № 4. P. 732-736.
11. Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. – Moscow: Nauka, 1976. – 576 p. (in Russian).
12. Gradshteyn I.M., Ryzhik I.S. Table of Integrals, Series, and Products. – Moscow: Fizmatgiz, 1962. – 1100 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 12.12.2012