УДК 517.938

Страх О.П.[1], аспірант

**Нетерові крайові задачі для слабконелінійних динамічних систем на часовій шкалі**

*Розглядається крайова задача для слабконелінійної динамічної системи на часовій шкалі. Встановлено необхідну й достатню умови існування розв'язків цієї задачі, а також знайдено алгоритм для їх побудови.*

*Ключові слова: динамічна система, часова шкала, нетерова крайова задача.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: strah_o@ukr.net

O.P. Strakh[1], postgraduate

**Fredholm boundary-value problems for weakly nonlinear dynamic systems on time scales**

*Boundary-value problem for weakly nonlinear dynamic system on time scales is considered. The necessary and sufficient conditions of solutions existence of this problem are established and an algorithm for the construction of these solutions is found.*

*Key Words: dynamic system, time scale, Fredholm boundary-value problem.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: strah_o@ukr.net

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М. О.

Розглянемо крайову задачу наступного вигляду:

$$\begin{cases} z^{\Delta} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{1}$$

де $z^{\Delta}$ — дельта похідна, визначена в [1, с. 5], $\mathbb{T}$ — часова шкала, $A(t)$ — регресивна $n \times n$-вимірна матриця, елементи якої дійсні й $rd$-неперервні на $[a,b]_{\mathbb{T}}$ функції, $f(t)$ — $n$-вимірна вектор-функція $f(t) \in C_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $Z(z,t,\varepsilon)$ — $n$-вимірна нелінійна по $z$ вектор-функція, для якої $Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[z]$, $\|z - z_0\| \le q$, $Z(z,\cdot,\varepsilon) \in C_{rd}[t]$, $Z(z,t,\cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $q$ та $\varepsilon_0$ — достатньо малі константи, $l$ — $m$-вимірний векторний функціонал, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений $m$-вимірний векторний функціонал неперервно диференційовний по $z$ (в розумінні Фреше) і неперервний по $\varepsilon$ в деякому околі породжуючого розв'язку. Нашим завданням є дослідити умови існування та знайти алгоритм для побудови розв'язку $z = z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1) такого, що $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $z(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$ і перетворюється на один з розв'язків крайової задачі

$$\begin{cases} z^{\Delta} = A(t)z + f(t), \\ lz = \alpha, \ t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{2}$$

при $\varepsilon = 0$. Задача (2) у цьому випадку отримується з задачі (1) підстановкою $\varepsilon = 0$ і називається породжуючою для задачі (1).

Загальний метод, що використовувався для аналізу сформульованої проблеми у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, тобто $[a,b]_{\mathbb{T}} = [a,b]$ [2, с. 118; 3], ґрунтується на переході від вихідної крайової задачі (1) до певної операторної системи, що розв'язується за допомогою методу малого параметра Ляпунова-Пуанкаре чи його ітераційного аналога — методу простих ітерацій [4]. Проведемо аналогічні міркування для випадку довільної часової шкали $\mathbb{T}$.

Нехай $\operatorname{rank} Q = n_1 < m$, де $Q = le_A(\cdot,a)$, $e_A(t,a)$ — фундаментальна матриця породжуючої системи (2). Тоді крайова задача (2) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли $f(t) \in C_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$ та $\alpha \in \mathbb{R}^m$ задовольняють $d$ ($d := m - n_1$) лінійно незалежні умови:

$$P_{Q_d^*}(\alpha - lF) = 0_d, \tag{3}$$

де $P_{Q_d^*}$ — $d \times n$-вимірна матриця, що складається з $d$ лінійно незалежних рядків матриці $P_{Q^*}$, проектора на коядро матриці $Q$, $F(t) := \int\limits_a^t e_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau$. За виконання умов (3) задача (2) має

$r$-параметричну ($r := n - n_1$) сім'ю розв'язків

$$z(t) = z_0(t, c_r) = e_A(t,a)P_{Q_r}c_r + \\ + G[f](t) + e_A(t,a)Q^+\alpha, \ c_r \in \mathbb{R}^r, \quad (4)$$

де $P_{Q_r}$ — $n \times r$-вимірна матриця, що складається з $r$ лінійно незалежних стовпців матриці $P_Q$, проектора на ядро матриці $Q$, $G[f] := F(t) - e_A(t,a)Q^+lF$ — узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2), $Q^+$ — псевдо-обернена до $Q$ матриця [5]. Нам потрібно дослідити умови існування і знайти алгоритм для побудови розв'язку $z = z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1) такого, що $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $z(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$ і при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один з розв'язків породжуючої крайової задачі (2), в припущенні що вона розв'язна, тобто виконуються умови (3).

**Теорема 1. (Необхідна умова існування розв'язків).** *Нехай крайова задача* (1), *для якої породжуюча задача* (2) *є розв'язною, має розв'язок* $z(t,\varepsilon)$ *такий, що* $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $z(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$ *і при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на породжуючий розв'язок* $z_0(t,c_r)$ *з константою* $c_r = c_r^0$. *Тоді вектор-константа* $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ *задовольняє рівняння:*

$$P_{Q_d^*}\left(J(z_0(\cdot,c_r^0),0) - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau)) \times \right. \\ \left. \times Z(z_0(\tau,c_r^0),\tau,0)\,\Delta\tau\right) = 0_d. \quad (5)$$

*Доведення.* Умови (3) існування породжуючого розв'язку $z_0(t,c_r) \in C_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$ вигляду (4) вважаються виконаними. Якщо тепер розглянемо векторну функцію $Z(z,t,\varepsilon)$ і векторний функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ як неоднорідності задачі (1), то отримуємо наступну умову розв'язності крайової задачі (1):

$$P_{Q_d^*}\left(J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau)) \times \right. \\ \left. \times Z(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\,\Delta\tau\right) = 0_d. \quad (6)$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо необхідну умову (5). □

Рівняння (5), як і у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, будемо називати рівнянням для породжуючих констант. Слід також зазначити, що для періодичних крайових задач ($m = n$, $d = r$, $lz = z(a) - z(b) = \alpha = 0$) рівняння (5) називається рівнянням для породжуючих амплітуд, яке є добре відомим в теорії нелінійних коливань [3, 6].

Якщо рівняння (5) є розв'язним (має дійсний корінь $c_r^0$), то вектор $c_r^0$ визначає породжуючий розв'язок $z_0(t,c_r^0)$, що пов'язується рівністю $z(t,0) = z_0(t,c_r^0)$ з розв'язком $z(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon]$ крайової задачі (1).

Дослідження достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1) будемо проводити по аналогії з випадком $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ [2, с. 118], тобто, початково проблема існування розв'язків вихідної крайової задачі (1) буде розв'язною після застосування аналізу крайової задачі для знаходження першого наближення точного розв'язку.

Припустимо, що вектор-константа $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння (5). За допомогою заміни змінних:

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^0) + x(t,\varepsilon) \quad (7)$$

в крайовій задачі (1) ми отримуємо наступну проблему: потрібно дослідити умови існування і знайти алгоритм для побудови розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі

$$\begin{cases} x^{\Delta} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^0) + \\ +x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ lx = \alpha + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^0) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \end{cases} \quad (8)$$

такий, що $x(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $x(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ і перетворюється в нуль при $\varepsilon = 0$. Враховуючи той факт, що векторна функція $Z(z,t,\varepsilon)$ і векторний функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ є неперервно диференційовними по $z$ в околі точки $\varepsilon = 0$, ми можемо відокремити з вектор-функції $Z(z_0+x,t,\varepsilon)$ та векторного функціоналу $J(z_0(\cdot,c_r^0)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ лінійну частину як функцію від $x$ та вирази нульового степеня відносно $\varepsilon$. Таким чином, отримуємо наступні розклади:

$$\begin{gathered} Z(z_0+x,t,\varepsilon) = f_0(t,c_r^0) + A_1(t)x + \\ +R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ J(z_0(\cdot,c_r^0) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J_0(z_0(\cdot,c_r^0) + \\ +l_1x(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \end{gathered} \quad (9)$$

де

$$f_0(t,c_r^0)=Z(z_0(t,c_r^0),t,0)\in C_{rd}[t],$$
$$J_0(z_0(\cdot,c_r^0))=J(z_0(\cdot,c_r^0),0),$$
$$A_1(t)=A_1(t,c_r^0)=$$
$$=\partial Z(z,t,0)/\partial z|_{z=z_0(t,c_r^0)}\in C_{rd}[t],$$

$l_1x(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціоналу $J(z_0(\cdot,c_r^0)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Нелінійний векторний функціонал $R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить до класів $C^1[x]$, $C_{rd}[t]$, $C[\varepsilon]$ в області $\|x\|\le q$, $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, більш того виконуються рівності:

$$R(0,t,0)=0,\qquad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x}=0,$$
$$R_1(0,0)=0,\qquad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial x}=0.$$

Побудуємо тепер операторну систему, еквівалентну крайовій задачі (8) в класі функцій $C[\varepsilon]$, що перетворюються в нуль при $\varepsilon=0$. Оскільки неоднорідностями задачі (8) є нелінійності $Z(z_0+x,t,\varepsilon)$ і $J(z_0(\cdot,\varepsilon)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, то отримуємо

$$x(t,\varepsilon)=e_A(t,a)P_{Q_r}c+x^{(1)}(t,\varepsilon).$$

У цьому випадку невідомі вектор-константа $c=c(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r$ і вектор-функція $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначаються відповідно з умов розв'язності крайової задачі (8) та наступного спеціального розв'язку $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ задачі у такий спосіб:

$$P_{Q_d^*}\Big\{J_0\big(z_0(\cdot,c_r^0)\big)+l_1\Big(e_A(\cdot,a)P_{Q_r}c+$$
$$+x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^{\cdot}e_A\big(\cdot,\sigma(\tau)\big)*$$
$$\star\Big[f_0(\tau,c_r^0)+A_1(\tau)\big(e_A(\tau,a)P_{Q_r}c+x^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]\,\Delta\tau\Big\}=0_d,$$
$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t)+\varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0(z_0(\cdot,c_r^0))+$$
$$+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Враховуючи те, що вектор-константа $c_r^0$ задовольняє рівняння (5), для розв'язку $x(t,\varepsilon)\in C[\varepsilon]$, $x(t,0)=0$ крайової задачі (8) маємо еквівалентну операторну систему:

$$x(t,\varepsilon)=e_A(t,a)P_{Q_r}c+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$B_0c=P_{Q_d^*}\Big\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-l\int_a^{\cdot}e_A\big(\cdot,\sigma(\tau)\big)\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]\,\Delta\tau\Big\},\tag{10}$$
$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t)+\varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0\big(z_0(\cdot,c_r^0)\big)+$$
$$+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},$$

де $B_0$ — $d\times r$-вимірна матриця

$$B_0=P_{Q_d^*}\Big\{l_1e_A(\cdot,a)P_{Q_r}-$$
$$-\,l\int_a^{\cdot}e_A(\cdot,\sigma(\tau))A_1(\tau)e_A(\tau,a)P_{Q_r}\,\Delta\tau\Big\}.$$

Нехай $P_{B_0}$ — $r\times r$-вимірна матриця ортопроектор $\mathbb{R}^r\to N(B_0)$. Друге рівняння операторної системи (10) розв'язне відносно $c\in\mathbb{R}^r$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Big\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\,l\int_a^{\cdot}e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\,R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\}=0_d,\tag{11}$$

де $P_{B_0^*}$ — $d\times d$-вимірна матриця ортопроектор на коядро матриці $B_0\colon\mathbb{R}^d\to N(B_0^*)$. Якщо $P_{B_0^*}=0$, тобто $\operatorname{rank}B_0=d$, то остання рівність завжди виконується. Таким чином $d\le r$ , а це означає, що число $m$ крайових умов не перевищує розмірності $n$ динамічної системи, оскільки $d=m-n_1\le r=n-n_1$. Отже, для $P_{B_0^*}=0$ друге рівняння операторної системи (10) є розв'язним відносно $c\in\mathbb{R}^r$ з точністю до довільної вектор-константи $P_{B_0}\overline{c}$ $(\forall\,\overline{c}\in\mathbb{R}^r)$ з нуль простору матриці $B_0$. Отримуємо

$$c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\ + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\} + P_{B_0}\overline{c}(\forall c \in \mathbb{R}^r).$$

Тоді один з розв'язків $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (8), для якого $x(\cdot,\varepsilon)\colon [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$, $x(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ і $x(t,0) = 0$ може бути знайденим з наступної операторної системи:

$$x(t,\varepsilon) = e_A(t,a)P_{Q_r}c + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ -l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\ +R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\}, \qquad (12)$$
$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \\ +R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t) + \varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0(z_0(\cdot,c_r^0)) + \\ +l_1 x(\cdot,\varepsilon) + R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Такого типу операторна система може бути розв'язаною методом простих ітерацій [4]. За допомогою цього методу ми отримуємо наступну збіжну при достатньо малих $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ процедуру для побудови розв'язку $x(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$, $x(t,0) = 0$ крайової задачі (8)

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{ l_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ -l\int_a^{\cdot} e_A(\cdot,\sigma(\tau))\big[A_1(\tau)x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\ +R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\,\Delta\tau\Big\},$$
$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(G\big[f_0(\tau,c_r^0) + A_1(\tau)\times \qquad (13) \\ \times\big(e_A(\tau,a)P_{Q_r}c_k + x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)\big) + \\ +R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t) + \varepsilon e_A(t,a)Q^+\Big\{J_0(z_0(\cdot,c_r^0)) + \\ +l_1\Big[e_A(\cdot,a)P_{Q_r}c_k + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\Big] + R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Таким чином, справедлива наступна теорема:

**Теорема 2. (Достатня умова існування розв'язків).** *Нехай для крайової задачі* (1) ($\operatorname{rank} Q = n_1 < m$) *відповідна породжуюча крайова задача* (2) *має $r$-параметричну* ($r := n - n_1$) *сім'ю розв'язків* (4) *за виконання $d$* ($d := m - n_1$) *лінійно незалежних умов* (3). *Тоді для кожного дійсного кореня $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжуючих констант* (5), *за умови, що* $\operatorname{rank} B_0 = d$, *крайова задача* (8) *має принаймні один розв'язок $x(t,\varepsilon)$ : $x(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, що перетворюється в нуль при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок можна отримати зі збіжного при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ ітераційного процесу* (13), *Крайова задача* (1) *при цьому має принаймні один розв'язок $z(t,\varepsilon)$ : $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1_{rd}[a,b]_{\mathbb{T}}$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, що перетворюється в породжуючий розв'язок $z_0(t,c_r^0)$ вигляду* (4) *при $\varepsilon = 0$ і може бути отриманий як результат ітераційного процесу* (13) *$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^0) + x_k(t,\varepsilon)$, $k = 0,\ldots,$ $\varepsilon_0$ визначає область збіжності цього процесу.*

*Приклад* 1. Нехай маємо нелінійну двоточкову крайову задачу

$$\begin{cases} z^{\Delta} = z + f(t) + \varepsilon z^2 g(t), & t \in [0,1] \cup [2,3]_{\mathbb{Z}}, \\ lz = M_1 z(0) - M_2 z(3) = \alpha \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \qquad (14)$$

де $f(t), g(t) \in C_{rd}\big\{[0,1] \cup [2,3]_{\mathbb{Z}}\big\}$ — 2-вимірні вектор-функції,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4e+1 & 0 \\ 0 & 4e \end{pmatrix}, \quad M_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— $2\times 2$-вимірні матриці, $z^2$— скалярний квадрат вектора $z$.

Використовуючи властивості $\Delta$-диференціювання, знайдемо фундаментальну матрицю відповідної породжуючої однорідної системи $z^{\Delta} = z$, нормовану в точці $t_0 = 0$. Нехай $X(t) := e_A(t,t_0) = e_{I_2}(t,0)$ — фундаментальна матриця системи $z^{\Delta} = z$. Тоді мають місце рівності $X^{\Delta}(t) = X(t)$, $X^{\Delta}(1) = X(2) - X(1)$, $X^{\Delta}(2) = X(3) - X(2)$. Оскільки для $t \in [0,1]$ $X(t) = e^t I_2$, то фундаментальна матриця буде мати вигляд:

$$X(t) = \begin{cases} e^t I_2, & t \in [0,1], \\ 2^{t-1} e I_2, & t \in [2,3]_{\mathbb{Z}} = \{2,3\} \end{cases}$$

і матриця $Q = lX$ матиме вигляд: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що $Q^+ = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_Q = P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(d = r = 1)$. $F(t) = \int\limits_0^t X(t - \sigma(\tau))f(\tau)\,\Delta\tau$, тобто $lF$ буде мати вигляд:

$$lF = -\int\limits_0^1 e^{3-\tau} f(\tau)\,d\tau - \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} e f(\tau).$$

Тоді умова розв'язності породжуючої крайової задачі:

$$\begin{cases} z^\Delta = z + f(t), \\ lz = \alpha \end{cases} \tag{15}$$

буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \alpha + \int\limits_0^1 e^{3-\tau} f(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} e f(\tau) \right) = 0,$$

тобто, при $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ маємо лише одну умову:

$$\left( \alpha_2 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau} f_2(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} e f_2(\tau) \right) = 0. \tag{16}$$

У випадку виконання умови (16), задача (15) має одно-параметричну сім'ю розв'язків вигляду:

$$z_0(t, c_r) = X(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_r + \int\limits_0^t X(t - \sigma(\tau)) f(\tau)\,\Delta\tau + \\ + X(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left( \alpha_2 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau} f(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} e f(\tau) \right), c_r \in \mathbb{R}^1$$

і, підставляючи відповідні вирази для фундаментальної матриці, маємо:

$$z_0(t, c_r) = \\ = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^t \left( \alpha_1 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau} f_1(\tau)\,d\tau + \right. \\ \left. + e \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} f_1(\tau) \right) \\ e^t c_r + \int\limits_0^t e^{t-\tau} f_2(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}, & t \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} 2^{t-1} e \left( \alpha_1 + \int\limits_0^1 e^{3-\tau} f_1(\tau)\,d\tau + \right. \\ \left. + e \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} f_1(\tau) \right) \\ 2^{t-1} e c_r + \int\limits_0^1 e^{1-\tau} f_2(\tau)\,d\tau + \\ + e \sum_{\tau=1}^{t-1} \left( 2^{t-\tau-1} f_2(\tau) \right) \end{pmatrix}, & t \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Тепер для крайової задачі (14) знайдемо необхідні умови існування розв'язку $z(t, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один з породжуючих розв'язків $z_0(t, c_r)$. Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^3 - e^2 \\ -\frac{3}{2}e^3 - e^2 \end{pmatrix}$. Тоді умова розв'язності (16) виконана й одно-параметрична сім'я розв'язків задачі (15) має вигляд:

$$z_0(t, c_r) = \\ = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t (c_r + t) \end{pmatrix}, & t \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ e \left( 2^{t-1} (c_r + 1) + 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{e-2} (e^t - 2^{t-1} e) \right) \end{pmatrix}, & t \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Складаємо рівняння для породжуючих констант задачі (14):

$$\int\limits_0^1 e^{3-\tau} e^{2\tau} (c_r + \tau)^2 g_2(\tau)\,d\tau + \\ + e \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} e^{2\tau} (c_r + \tau)^2 g_2(\tau) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$\int_0^1 e^{3-\tau} e^2 \Bigg( 2^{\tau-1}(c_r+1) + 1 + \frac{1}{e-2} e^\tau - $$
$$ -2^{\tau-1} e \Bigg)^2 g_2(\tau)\, d\tau + e \sum_{\tau=1}^{2} 2^{1-\tau} e^2 \Bigg( 2^{\tau-1}(c_r+1) + $$
$$ +1 + \frac{1}{e-2} e^\tau - 2^{\tau-1} e \Bigg)^2 g_2(\tau) = 0, \quad t \in \{2,3\}.$$

Поклавши $g_2(t) = t-1$, отримаємо

$$F(c_r) = e^3 \int_0^1 e^\tau (c_r+\tau)^2 (\tau-1)\, d\tau + $$
$$ + 2e^5, \quad t \in [0,1],$$

$$e^5 \int_0^1 \Bigg( 2^{\tau-1}(c_r+1) + 1 + \frac{1}{e-2} e^\tau - $$
$$ - 2^{\tau-1} e \Bigg)^2 g_2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} e^3 \Big( 2c_r + $$
$$ + 4 + e \Big)^2 = 0, \quad t \in \{2,3\},$$

звідки $c_r$ має наступні корені:

$$c_r \approx \begin{cases} \{-4,9; 4,1\}, & t \in [0,1], \\ \{-3,6; -6,3\}, & t \in \{2,3\}. \end{cases}$$

Таким чином, $\operatorname{rank} B_0 = 1$ і за теоремою 2 крайова задача (14) має принаймні один розв'язок.

## Список використаних джерел


1. M. Bohner and A. Peterson. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications.– Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001.– 358 p.
2. A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.– Utrecht: VSP, 2004.– 317 p.
3. A. A. Boichuk, J. Diblík, D. Y. A. Khusainov, and M. Ružičková. Boundary value problems for weakly nonlinear delay differential systems// Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, vol. 2011, Article ID 631412, 19 pages, 2011.
4. E. A. Grebenikov and Yu. A. Ryabov. Constructive Methods for Analysis of Nonlinear Systems.– Moscow: Nauka, 1979.-– 431 p. (in Russian)
5. A. Boichuk and M. Bohner. Fredholm boundary-value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales// Mathematische Nachrichten, In press.
6. I. G. Malkin. Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations.– Moscow: Gostekhizdat, 1956.– 491 p. (in Russian).


Надійшла до редколегії 17.12.2012