УДК 517.9

Яременко М.І. [1], к.ф.-м.н.

Дослідження щільності множини області визначення генератора напівгрупи в множині області визначення самої напівгрупи в просторах Лебега

Доведено теорему про щільність множини області визначення локального генератора напівгрупи стиску в множині області визначення цієї напівгрупи стиску.

Ключові слова: напівгрупа стиску, локальний генератор,фільтр.

[1] ММЦ НАН України, Київ 4, вул. Терещенківська, 3.

N.I. Yaremenko[1], Ph.D

Investigation of the density of the set domain of the generator semigroup in the set of the domain of definition of the semigroup in Lebesgue spaces

The theorem on the density of the set domain of the local generator semigroup of contraction set in the domain of semigroup of contraction.

Key Words: semi-group of contraction, infinitesimal generator, filter .

[1] IMC NAS of Ukraine, Kyiv 4, Tereshchenkivska st., 3.

*E-mail: math.kiev@gmail.com

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., М. О. Перестюк

1. Вступ. У даній статті розглядається проблема щільності множини області визначення генератора напівгрупи [2] нелінійних операторів в множині області визначення самої напівгрупи стиску в просторах $L^p(R^l, d^l x), \quad p > 2$ [1–3].

2. Попередні відомості. Оператор A визначає відображення $A: L^p(R^l, d^l x) \to L^p(R^l, d^l x)$, яке можна розглядати як (багатозначне) відображення з $C_{L_2(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t]$ в $L_{L_2(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t]$, тобто

$C_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t] \ni u \to \{v \in L_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t] : v(s) \in Au(s)$ майже скрізь $\{s\}\}$.

Означення 1. Відображення $\tilde{A}$ називається розширенням відображення A, якщо

$$\tilde{A}: C_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t] \ni u \to$$
$$\{ v \in L_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t] : \exists u_n \in D(A) \subset C_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t], n \in N,$$
$$v_n \in Au_n, \ \lim_{n\to\infty} u_n = u, \ \sigma - \lim_{n\to\infty} v_n = v \},$$

де $\sigma = \sigma(L_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t], C_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t])$ – σ-слабка топологія в $L_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t]$ відносно $C_{L^p(R^l,d^l x)}[\mathbf{0},t]$.

Означення 2. Нелінійне, можливо, багатозначне відображення $A: L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, називається дисипативним, якщо

$$\left\langle f' - g', (f-g)|f-g|^{p-2} \right\rangle \le \mathbf{0}$$

$\forall f' \in Af, q' \in Ag$, де Af, Ag – множина значень відображення A елементів f і g відповідно. Позначимо $A_{\mathbf{0}} f \equiv \lim_{h\downarrow \mathbf{0}} \frac{T_h f - f}{h}$, для всіх елементів $f \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

Відображення $A_\phi : L^p\left(R^l, d^l x\right) \to L^p\left(R^l, d^l x\right)$, де

$$A_\phi f = w - \lim_{h\in\varphi\in\phi} \frac{T_h f - f}{h}, \quad f \in L^p\left(R^l, d^l x\right),$$

називається ϕ-локальним генератором нелінійної напівгрупи $T_t, t \ge \mathbf{0}$, якщо $\phi = \{\varphi\}$ – максимальний фільтр множин $\varphi \subset (\mathbf{0}, \infty)$, що збігається до нуля, за умови, що границя існує в просторі $L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

3. Теорема про щільність множини $D(A_\mathbf{0})$ в множині $D(T_t)$. *Нехай $D(T_t)$ – область визначення напівгрупи стиску T_t, при цьому $D(T_t)$ є випуклою і замкнутою множиною в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Тоді область визначення $D(A_\mathbf{0})$*

локального генератора A_0 *напівгрупи* T_t *всюди щільна в* $D(\mathrm{T}_t)$.

Доведення теореми почнемо з деяких необхідних в подальшому позначень:

$$\mathrm{A}_0 f \equiv \lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathrm{T}_h f - f}{h}, \quad \mathrm{A}_h \equiv \frac{\mathrm{T}_h - \mathrm{I}}{h},$$

або

$$\mathrm{A}_0 f \equiv \lim_{h\downarrow 0}\mathrm{A}_h f, \qquad \mathrm{A}_\phi f \equiv w-\lim_{h\in\varphi\in\phi}\mathrm{A}_h f,$$

де ϕ – максимальний фільтр підмножини $\varphi\subset(0,\infty)$, що збігається до 0.

Тут як і раніше

$$\sup_{h>0}\|\mathrm{A}_h f\|<\infty,$$

$$\mathrm{A}_\lambda f = \{f-q : q\in L^p\left(R^l,d^l x\right),$$

$$f = w-\lim_{h\in\varphi\in\phi}(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{A}_h)^{-1}q, \lambda>0\}.$$

Встановимо низку властивостей

a) Має місце рівність

$$[D(\mathrm{A}_0)] = [D(\mathrm{A}_\phi)], \tag{1}$$

де $[D]$ означає замикання області D в $L^p\left(R^l,d^l x\right)$.

Дійсно, за побудовою $D(\mathrm{A}_\phi)\subset D(\mathrm{A}_0)$. Отже $[D(\mathrm{A}_\phi)]\subset[D(\mathrm{A}_0)]$. Покажемо, що $[D(\mathrm{A}_0)]\subset[D(\mathrm{A}_\phi)]$. Для будь-якого $f\in D(\mathrm{A}_\phi)$ існує така послідовність $t_n\downarrow 0$, що $\mathrm{T}_{t_n} f\in D(\mathrm{A}_0)$. Отже $\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{t_n} f = f$, тобто $[D(\mathrm{A}_0)]\subset[D(\mathrm{A}_\phi)]$. Отже (1) доведено.

b) Нехай $f\in L^p\left(R^l,d^l x\right)$ – довільний фіксований елемент і існують послідовність $\{q_n, n\in N\}\subset D(\mathrm{T}_t)$, послідовність $t_n\downarrow 0$ і число $k>0$, для яких виконуються нерівності:

$$\|\mathrm{T}_{t_n} q_n - f\| > \|q_n - f\| + k,\ n\in\mathrm{N}. \tag{2}$$

Тоді елемент $f\notin D(\mathrm{T}_t)$.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто нехай $f\in D(\mathrm{T}_t)$. Тоді з (2) і властивості стиску оператора T_t маємо

$$k = \|q_n - f\| + k - \|q_n - f\| \le$$
$$\|\mathrm{T}_{t_n} q_n - f\| - \|\mathrm{T}_{t_n} q_n - \mathrm{T}_{t_n} f\| \le$$
$$\le \|\mathrm{T}_{t_n} q_n - f - (\mathrm{T}_{t_n} q_n - \mathrm{T}_{t_n} f)\| = \|\mathrm{T}_{t_n} f - f\|. \tag{3}$$

З неперервності напівгрупи T_t випливає, що $\forall f\in D(\mathrm{T}_t)\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0 : t\in(0,\delta)\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \|\mathrm{T}_t f - f\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Тоді при $t_n\downarrow 0$ і $k>0$ нерівність (3) суперечить (4), тобто елемент f не може належати $D(\mathrm{T}_t)$.

c) Нехай $f\in L^p\left(R^l,d^l x\right)$ – довільний фіксований елемент і існує послідовність $\{q_n, n\in N\}\subset D(\mathrm{T}_t)$, $h\downarrow 0$ і число $k>0$, для яких виконуються рівності: $\mathrm{A}_{h_n} q_n = \nu_n(q_n - f)$ для деякої послідовності $\nu_n>0, h_n\downarrow 0$, де

$$\mathrm{A}_{h_n} = \frac{\mathrm{T}_{h_n} - \mathrm{I}}{h_n},\ \lim_{n\to\infty}\|\mathrm{A}_{h_n} q_n\| = \infty,\quad \|q_n - f\| \ge k > 0.$$

Тоді елемент $f\notin D(\mathrm{T}_t)$.

Доведення також проведемо методом від супротивного. Нехай $f\in D(\mathrm{T}_t)$. Виберемо елемент $f_1\in L^p\left(R^l,d^l x\right)$ і послідовність елементів $\{f_{2n}, n\in N\}\subset L^p(R^l,d^l x)$ так, щоб виконувалися умови

$$\|f_1 - f\| \le \frac{k}{2},$$

$$f_{2n} - f = \frac{\left\langle f_1 - f, (q_n - f)|q_n - f|^{p-2}\right\rangle}{\|q_n - f\|^p}(q_n - f). \tag{5}$$

Позначимо

$$\alpha_n \equiv \frac{\left\langle f_1 - f, (q_n - f)|q_n - f|^{p-2}\right\rangle}{\|q_n - f\|^p}. \tag{6}$$

Тоді $|\alpha_n| \le \dfrac{1}{2}$.

З умови $A_{h_n} q_n = \nu_n(q_n - f)$ одержуємо $\mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n = h_n\nu_n(q_n - f)$. Тоді, враховуючи (5), (6), можна записати

$$\mathrm{T}_{h_n} q_n - f_{2n} = q_n - f + h_n\nu_n(q_n - f) + f - f_{2n} =$$
$$= (1 + h_n\nu_n - \alpha_n)(q_n - f). \tag{7}$$

звідки

$$\left\langle \mathrm{T}_{h_n} q_n - f_{2n}, (f_1 - f_{2n})|f_1 - f_{2n}|^{p-2}\right\rangle =$$
$$= (1 + h_n\nu_n - \alpha_n)\left\langle q_n - f, (f_1 - f_{2n})|f_1 - f_{2n}|^{p-2}\right\rangle = 0.$$

Далі використаємо лему Рісса про те що якщо $L\subset L^p\left(R^l,d^l x\right)$, тоді для будь якого $\delta>0$ існує елемент $z\notin L$ з нормую одиниця, такий що $\|z - f\| > 1 - \delta$ для любого $f\in L^p\left(R^l,d^l x\right)$, маємо

$$\|\mathrm{T}_{h_n} q_n - f_1\| \ge \|\mathrm{T}_{h_n} q_n - f_{2n}\| + \|f_1 - f_{2n}\| - \delta.$$

Далі використовуючи нерівність трикутника можемо записати

$$\| q_n - f_1 \| \le \| q_n - f_{2n} \| + \| f_{2n} - f_1 \|.$$

Враховуючи ці нерівності та використовуючи позначення, що були введені раніше одержуємо наступну нерівність

$$\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - f_1 \| - \| q_n - f_1 \| \ \ge \ h_n c(m) \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \| \qquad (8)$$

В (8) використано наслідок з властивості b) про те, що якщо $f \in D(\mathrm{T}_t)$, то $\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - f \| \le \| q_n - f \| + m$ для всіх $n \ge n(m)$.

Стала $c(m)$ в (8) залежить лише від m і не залежить від номера n.

Нехай далі $\| \mathrm{T}_{lh_n} f - f \| \le \dfrac{k}{2}$, де $l = 1, 2, ..., k$. Поклавши в (8) $f_1 \equiv \mathrm{T}_{lh_n}$, $l = 1, 2, ..., k$, одержимо

$$\| q_n - \mathrm{T}_{(l-1)h_n} f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{lh_n} f \| \ge$$
$$\ge \| \mathrm{T}_{h_n} q_n - \mathrm{T}_{lh_n} f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{lh_n} f \| \ge c(m) h_n \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \|.$$

Оскільки

$$\| q_n - f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{kh_n} f \| \ge c(m) k h_n \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \|, \qquad (9)$$

то можна покласти сталу $k = \left[\dfrac{\delta}{h_n} \right]$, отримаємо

$$\| q_n - f \| - \| q_n - \mathrm{T}_{kh_n} f \| \le \| f - \mathrm{T}_{kh_n} f \| < \varepsilon. \qquad (10)$$

Нерівності (9) і (10) суперечливі, оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} h_n \| \mathrm{A}_{h_n} q_n \| = \infty$.

d) Нехай $f \in L^p(R^l, d^l x)$ – довільний фіксований елемент. Тоді для будь-яких $h > 0$, $\lambda \ge 0$ існує такий елемент $q_{h\lambda} \in D(\mathrm{T}_t)$, що $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h) q_{h\lambda} = f$, причому $q_{h\lambda}$ залежить неперервно від $h > 0$ (при фіксованому $\lambda \ge 0$) і залежить неперервно від $\lambda \ge 0$ (при фіксованому $h > 0$).

Для доведення властивості d) потрібно побудувати відображення яке діє за правилом $\mathrm{E} : \varphi \to \dfrac{h}{1+h} f + \dfrac{1}{1+h} \mathrm{T}_h \varphi$, де $\varphi \in L^p(R^l, d^l x)$. Очевидно, що справедливі наступні оцінки

$$\| \mathrm{E}\varphi - \mathrm{E}\psi \| \le \frac{1}{1+h} \| \mathrm{T}_h \varphi - \mathrm{T}_h \psi \| \le \frac{1}{1+h} \| \varphi - \psi \|.$$

Тоді на підставі принципу стискаючих відображень можемо стверджувати, що рівняння $q = \mathrm{E} q$ має розв'язок [4].

Неперервна залежність елемента $q_{h\lambda}$ від h і λ очевидні.

Зауваження. За визначенням умова $q - \mathrm{A}_h q = f$, де $q \in L^p\left(R^l, d^l x\right)$, еквівалентна рівності $q = (\mathrm{I} - \mathrm{A}_h)^{-1} f$ або $q = \dfrac{h}{1+h} f + \dfrac{1}{1+h} \mathrm{T}_h q$.

e) Нехай $f \in L^p(R^l, d^l x)$ – довільний фіксований елемент, $h > 0$ – довільна (фіксована) стала, множина F_f визначена таким чином

$$F_f \equiv \left\{ \psi : \psi \in D(\mathrm{T}_t), \left\langle f, \left(\mathrm{T}_h \psi - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h \psi - \psi \right|^{p-2} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Тоді для всіх $\psi \in F_f$ і елемента $q \in D(\mathrm{T}_t)$, що який задовольняє нерівність дисипативності $\left\langle \mathrm{T}_h q - \psi, \left(\mathrm{T}_h \psi - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h \psi - \psi \right|^{p-2} \right\rangle < 0$, має місце нерівність $\| q - \psi \| \ge \| \mathrm{T}_h q - \psi \|$.

Доведення властивості e) випливає з означення множини F_f і нерівності $\left\langle \mathrm{T}_h q - \psi, \left(\mathrm{T}_h \psi - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h \psi - \psi \right|^{p-2} \right\rangle < 0$. Дійсно, маємо:

$$\| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p = \| \mathrm{T}_h q - \mathrm{T}_h \psi + \mathrm{T}_h \psi - \psi \|^p =$$
$$= \left\langle \mathrm{T}_h q - \psi + \mathrm{T}_h \psi - \mathrm{T}_h \psi, \left(\mathrm{T}_h q - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h q - \psi \right|^{p-2} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \mathrm{T}_h q - \mathrm{T}_h \psi, \left(\mathrm{T}_h q - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h q - \psi \right|^{p-2} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \mathrm{T}_h \psi - \psi, \left(\mathrm{T}_h q - \psi\right) \left| \mathrm{T}_h q - \psi \right|^{p-2} \right\rangle \le$$
$$\le \frac{\| \mathrm{T}_h q - \mathrm{T}_h \psi \|^p}{p} + \frac{\| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p}{q}, \text{ отже, маємо}$$

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{1}{p} \| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p \le \| q - \psi \|^p, \quad \text{де}$$

$1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, тобто $\| \mathrm{T}_h q - \psi \|^p \le \| q - \psi \|^p$.

f) Нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$ – довільний фіксований елемент. Тоді при кожному $\lambda > 0$ множина елементів

$$\{ q_{h\lambda} = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f : h > 0 \} \qquad (11)$$

обмежена в просторі $L^p(R^l, d^l x)$. Більш того, існує слабка границя $q_\phi = w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f$, причому $q_\phi \in \{ q \in D(\mathrm{T}_t) : \| q - f \| < \rho \}$ для деякого $\rho > 0$.

Доведення цього факту проводиться методом від супротивного і випливає з властивості d) і наступних міркувань. Дійсно, нехай дано деяке $\rho > 0$. Позначимо $\lambda_0 \le \dfrac{\rho}{2M}$.

Якщо $\| q_{h\lambda_0} - f \| \geq \rho$, то існує таке число $h > \mathbf{0}$, що з рівності $(\mathrm{I} - \lambda_0 \mathrm{A}_h) q_{h\lambda_0} = f$ випливає нерівність

$$\| \mathrm{A}_h q_{h\lambda_0} \| = \frac{\mathbf{1}}{\lambda_0} \| q_{h\lambda_0} - f \| \geq \mathbf{2}M . \qquad (12)$$

Згідно властивості d) існує елемент $q_{h\lambda} \in D(\mathrm{T}_t)$, для якого $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h) q_{h\lambda} = f$. З необмеженості сукупності (11) випливає, що для будь-якого $\rho > \mathbf{0}$ існує таке число $h = h(\rho) > \mathbf{0}$, що для елемента $q_{h\lambda} \in D(\mathrm{T}_t)$ виконується нерівність $\| q_{h\lambda} - f \| \geq \rho$. Тоді згідно властивості c) існує така стала $M > \mathbf{0}$, що якщо має місце нерівність $\| \mathrm{A}_h q_{h\lambda} \| < M$, то $\| q_{h\lambda} - f \| \geq \rho$, що протирічить (12).

Отже

$$\| q_{h\lambda_0} - f \| \leq \rho \quad \text{при всіх} \quad h > \mathbf{0}. \quad (13)$$

Оскільки обмежені множини в $L^p(R^l, d^l x)$ є слабо компактними, то існує слабка границя $q_\phi = w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} q_{h\lambda_0}$, причому $q_\phi \in \{ q : \| q - f \| < \rho \}$ при деякому $\rho > \mathbf{0}$. Оскільки множина $D(\mathrm{T}_t)$ – випукла і слабо замкнена в $L^p(R^l, d^l x)$, то $q_\phi \in D(\mathrm{T}_t)$. Таким чином, із (13) і рівності $\lambda_0 = \dfrac{\rho}{\mathbf{2}M}$ випливає нерівність $\| q_{h\lambda_0} - f \| \leq \mathbf{2}\lambda_0 M$, що означає обмеженість множини $\{ q_{h\lambda_0} : h > \mathbf{0} \}$ в просторі $L^p(R^l, d^l x)$.

g) Нехай $f \in D(\mathrm{T}_t)$ – довільний фіксований елемент і

$$w - \lim_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f = q . \qquad (14)$$

Тоді існує така послідовність $h_n \downarrow \mathbf{0}$, що

$$\lim_{n \to \infty} \| (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f - q \| = \rho > \mathbf{0} \qquad (15)$$

і навпаки, якщо виконується (15) для деякої послідовності $h_n \downarrow \mathbf{0}$, то має місце властивість (14).

Дійсно, із рівності $w - \lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f = q$ внаслідок метризуємості множини $\left\{ (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f, h > \mathbf{0} \right\}$, що в свою чергу є наслідком сепарабельності і обмеженості множини $\left\{ (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f \right\}$ в слабкій топології та властивості f), випливає, що існує такий напрям $\{ h > \mathbf{0} \}$, для якого виконується співвідношення (14). Якщо послідовність, що задовольняє умову (14), сильно збігається до елемента q, то для неї виконується рівність $\lim\limits_{h \in \varphi \in \phi} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_h)^{-1} f = q$. Таким чином, при згаданих вище умовах існує послідовність $\left\{ (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f, n \geq \mathbf{1} \right\}$ і виконуються (14) і (15) одночасно.

h) Нехай $f \in L^p(R^l, d^l x)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > \mathbf{0}$ існує таке натуральне число $n(\varepsilon) > \mathbf{0}$, що для всіх $n \geq n(\varepsilon)$ і $h_n > \mathbf{0}$ виконуються нерівності

$$\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n \| < \varepsilon, \quad \left| \left\langle q_n - q, (f - q) \left| f - q \right|^{p-\mathbf{2}} \right\rangle \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \| q_n - q \|^p - \rho^p \right| < \varepsilon , \qquad (16)$$

де $q_n = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f$, елемент $q \in D(\mathrm{T}_t)$, $\rho > \mathbf{0}$ – деяке число.

Більш того, якщо ε – достатньо мале, то при фіксованому $n \geq n(\varepsilon)$ існують такі $k_n > \mathbf{0}$ і $m(\varepsilon, n) > n$, що

$$\sup_{\mathbf{0} < h < h_n} \left| \left\langle \mathrm{T}_h - q_n, (q_m - q) \left| q_m - q \right|^{p-\mathbf{2}} \right\rangle \right| < \varepsilon ,$$

$$\left| \left\langle q - q_n, (q_m - q) \left| q_m - q \right|^{p-\mathbf{2}} \right\rangle \right| < \varepsilon$$

для всіх $m \geq m(\varepsilon, n)$; (16)

$$\| q - q_m \| + k_n < \| \mathrm{T}_{h_n} q_n - q_m \| \quad \text{для всіх} \quad m \geq m(\varepsilon, n) \mathbf{1} ; \qquad (17)$$

$$\| \mathrm{T}_h q_n - \mathrm{T}_{h_n} q_n \| < k_n , \quad \text{де} \quad h = \left[\frac{h_n}{h_m} \right] h_m , \quad \text{для всіх} \quad m \geq m(\varepsilon, n) . \qquad (18)$$

Дійсно, із умови $\mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n = h_n \mathrm{A}_{h_n} q_n = h_n \lambda^{-1} (q_n - f) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{0}$ одержуємо, що $\| \mathrm{T}_{h_n} q_n - q_n \| < \varepsilon$.

Якщо врахувати (16) і (17), то (18) є очевидним.

Із компактності множини $\{ \mathrm{T}_{h_n} q_n - q : h \in [\mathbf{0}, h_n] \}$ випливає співвідношення $\lim\limits_{n \to \infty} \left\langle q_n - q, (\mathrm{T}_h q_n - q) \left| \mathrm{T}_h q_n - q \right|^{p-\mathbf{2}} \right\rangle = \mathbf{0}$, де збіжність є рівномірною відносно h. Отже властивість (17) доведено.

Властивість (17) випливає із леми Рісса,а властивість (18) – із рівності $\lim\limits_{m \to \infty} \left[\dfrac{h}{h_m} \right] h_m = h$.

i) Нехай виконуються умови п. h). Тоді якщо $n > n(\varepsilon)$ для довільного (фіксованого) $\varepsilon > \mathbf{0}$, то існує така послідовність η_n, де

$0 < \eta_n < h_n$,

що $\left\langle T_{\eta_n} q_n - q, (f-q)|f-q|^{p-2} \right\rangle < -\rho^p + 3\varepsilon$, (19)

де $q_n = (I - \lambda A_{h_n})^{-1} f$, елемент $q \in D(T_t)$ і число $\rho > 0$ визначені рівностями (12),(13) відповідно.

Для доведення (19) використаємо твердження e), де покладемо $\psi = q_m$, $h = h_m$, $q = T_{ph_m}$ при $p = 0,1,2,...,\left[\frac{h_n}{h_m}\right]$. Із нерівності

$\left\langle T_{ph_m} q_n - q_m, (T_{h_m} q_m - q_m)|T_{h_m} q_m - q_m|^{p-2} \right\rangle \le 0$ при всіх p одержуємо

$\| T_{ph_m} q_n - q_m \| \ge \| T_{(p+1)h_m} q_n - q_m \|$.

Використовуючи (18), для деяких $k_n > 0$ маємо

$$\| T_{ph_m} q_n - q_m \| \le \| T_{h_n} q_n - T_{\left[\frac{h_n}{h_m}\right] h_m} q_n \| +$$
$$+ \| T_{\left[\frac{h_n}{h_m}\right] h_m} q_n - q_m \| < k_n + \| q_n - q_m \|. \quad (20)$$

Таким чином, з (20) і (18) одержуємо протиріччя.

Отже маємо $\eta = ph_m$, де $\eta \in (0, h_n)$,
$\left\langle T_\eta q_n - q_m, (T_{h_m} q_m - q_m)|T_{h_m} q_m - q_m|^{p-2} \right\rangle > 0$.

Із рівності $T_{h_m} q_m - q_m = -h_m \lambda^{-1}(f - q_m)$, яка вже використана при доведенні нерівностей (20), маємо $\left\langle T_\eta q_n - q_m, (f - q_m)|T_{h_m} q_m - q_m|^{p-2} \right\rangle < 0$.

Використовуючи нерівність (20) отримуємо $\left\langle T_\eta q_n - q, (f - q_m)|T_{h_m} q_m - q_m|^{p-2} \right\rangle < -\rho^p + 2\varepsilon$,

звідки, знаходимо:

$$\left\langle T_\eta q_n - q, (f-q)|f-q|^{p-2} \right\rangle < -\rho^p + 3\varepsilon,$$

тобто (19) доведено.

j) Нехай $f \in D(T_t)$ – довільний елемент. Тоді, якщо виконується співвідношення $q_\lambda = (I - \lambda A_\lambda)^{-1} f$, то $q_\lambda = \lim_{h \in \varphi \in \phi} (I - \lambda A_h)^{-1} f$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Згідно з властивістю d) маємо, що елемент $q_{h\lambda} = (I - \lambda A_h)^{-1} f$ належить області $D(T_t)$. Нехай існує послідовність $\{q_n\} \in \{q_{h\lambda}\}$, яка не прямує до q сильно. Тоді, використовуючи нерівності Гельдера та Юнга, маємо

$$\| q_\lambda - f \|^p = \left\langle q_\lambda - f, (q_\lambda - f)|q_\lambda - f|^{p-2} \right\rangle =$$
$$= \left\langle q_\lambda - f - T_{\eta_n} q_n + T_{\eta_n} q_n, (q_\lambda - f)|q_\lambda - f|^{p-2} \right\rangle =$$
$$= \left\langle T_{\eta_n} q_n - q_\lambda, (q_\lambda - f)|q_\lambda - f|^{p-2} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle f - T_{\eta_n} q_n, (q_\lambda - f)|q_\lambda - f|^{p-2} \right\rangle \le$$
$$\le \frac{1}{p}\left\| T_{\eta_n} q_n - q_\lambda \right\|^p + 2\frac{1}{q}\left\| q_\lambda - f \right\|^p + \frac{1}{p}\left\| f - T_{\eta_n} q_n \right\|^p,$$

отже

$$\left(1 - \frac{2}{q}\right) p \left\| q_\lambda - f \right\|^p \le \left\| T_{\eta_n} q_n - q_\lambda \right\|^p.$$

Оскільки множина $\{\| q_n - f \| : n \in N\}$ – обмежена, то існують таке $k_n > 0$, що для будь яких $n > n(\varepsilon)$ і деяких $\eta_n \in (0, h_n)$ справедлива нерівність $\| T_{\eta_n} q_n - f \| > \| q_n - f \| + k_n$,

Використовуючи властивість b), маємо $f \notin D(T_t)$. Одержана суперечність доводить властивість j).

k) Нехай елемент $q \in D(T_t)$. Якщо існує такий елемент $f \in D(T_t)$, що $q = (I - \lambda A_\lambda)^{-1} f$ для деякого $\lambda > 0$, то $q \in D(A_\phi)$.

Дійсно, з властивості j) випливає існування такої послідовності $h_k \downarrow 0$, що послідовність $q_k = (I - \lambda A_{h_k})^{-1} f \to q$ сильно при $k \to \infty$. При фіксованому $h > 0$ і $k = \left[\frac{h}{h_k}\right] n_k$, згідно рівності $\lambda(T_{h_k} q_k - q_k) = h_k(q_k - f)$ маємо

$$\lambda \| T_{n_k h_k} q_k - q_k \| \le \lambda \sum_{n=1}^{n_k} \| T_{nh_k} q_k - T_{(n-1)h_k} q_k \| \le$$
$$\le \lambda n_k \| T_{h_k} q_k - q_k \| \le n_k h_k \| q_k - f \|.$$

Звідси, враховуючи співвідношення $q_k \to q$, $n_k h_k \to h$, $T_{n_k h_k} q_k \to T_\eta q$, при достатньо великих значеннях k одержуємо $\left\| \frac{T_h q - q}{h} \right\| \le \frac{\| q - f \|}{\lambda}$ для всіх $h > 0$.

Оскільки множина $\{A_h q : h > 0\}$ обмежена, то внаслідок її слабкої компактності існує слабка границя $w - \lim_{h \in \varphi \in \phi} A_h q$.

l) Нехай $D(T_t) = L^p(R^l, d^l x)$. Тоді для того, щоб елемент $f \in A_\lambda q$ необхідно і достатньо, щоб існувала така послідовність q_h, що

$$\lim_{h\in\varphi\in\phi} q_h = q, \quad \lim_{h\in\varphi\in\phi} \mathrm{A}_h q_h = f.$$

Дійсно, нехай $q = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_\lambda)^{-1}(q - \lambda f)$. Тоді генератор A_λ не залежить від λ, тобто $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{A}_\mu$ при $\lambda, \mu > \mathbf{0}$.

Покажемо, що A_λ не залежить від вибору максимального фільтра ϕ. Нехай ϕ_1, ϕ_2 – максимальні фільтри. Позначимо

$$q_1 = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{\lambda\phi_1})^{-1} f, \quad q_2 = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{\lambda\phi_2})^{-1} f.$$

Тоді існують такі послідовності $h_n \downarrow \mathbf{0}$, $\eta_n \downarrow \mathbf{0}$, що виконуються рівності

$$q_1 = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{h_n})^{-1} f, \; q_2 = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_{\eta_n})^{-1} f.$$

Припустимо, що $q_1 \neq q_2$, причому, нехай для визначеності $\| q_1 - f \| \geq \| q_2 - f \|$. Тоді існує число $k > \mathbf{0}$, для якого виконується нерівність

$$\left| \left\langle q_2 - f, (f - q_1) |f - q_1|^{p-2} \right\rangle \right| + k \leq \| f - q_1 \|^p,$$

звідки, застосовуючи властивість j), для достатньо великих чисел n, m одержуємо нерівність

$$\sup_{\mathbf{0}<h<\eta_n} \left\langle \mathrm{T}_h q_{2n} - f, (q_{1m} - f) |q_{1m} - f|^{p-2} \right\rangle \geq \| q_{1m} - f \|^p.$$

Тут використано співвідношення $\sup_{\mathbf{0}<h<\eta_n} \| \mathrm{T}_h q_2 - f \|^p \geq \| q - f \|^p - \dfrac{k}{\mathbf{4}}$, яке виконується для достатньо великих n.

Далі одержимо оцінки

$$\| f - q_1 \|^p = \| q_1 - \mathbf{2} f + f + \mathrm{T}_h q_2 - \mathrm{T}_h q_2 \|^p =$$

$$= \left\langle \mathrm{T}_h q_2 - (\mathbf{2} f - q_1), (f - q_1) |f - q_1|^{p-2} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle f - \mathrm{T}_h q_2, (f - q_1) |f - q_1|^{p-2} \right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{\left\| \mathrm{T}_h q_2 - (\mathbf{2} f - q_1) \right\|^p}{p} + \frac{\| f - q_1 \|^p}{q} +$$

$$+ \frac{\| f - \mathrm{T}_h q_2 \|^p}{p} + \frac{\| f - q_1 \|^p}{q},$$

отже, остаточно для $h \in (\mathbf{0}, \eta_n)$ маємо

$$\frac{\left\| \mathrm{T}_h q_2 - (\mathbf{2} f - q_1) \right\|^p}{p} \geq \frac{\| f - q_1 \|^p}{q} - const. \tag{21}$$

Таким чином маємо, що $\mathbf{2} f - q_1 \notin D(\mathrm{T}_t)$. Згідно властивості b) нерівність (21) суперечить припущенню $D(\mathrm{T}_t) = L^p(R^l, d^l x)$.

Доведення твердження теореми. Згідно властивості f) для довільного елемента $f \in D(\mathrm{T}_t)$ існує такий елемент $q \in D(\mathrm{T}_t)$, що виконується рівність $q = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{A}_\lambda)^{-1} f$, причому $\| f - q \| \leq \rho$ для деякого числа $\rho > \mathbf{0}$. Використовуючи властивість k), маємо $q \in D(\mathrm{A}_\phi)$. Оскільки ρ – довільне число, з рівності $[D(\mathrm{A}_\mathbf{0})] = [D(\mathrm{A}_\phi)]$ випливає твердження теореми.

4. Висновки. Досліджено властивості щільності множини області визначення локального генератора напівгрупи нелінійних операторів стиску в множині області визначення самої напівгрупи стиску в просторах $L^p(R^l, d^l x), \quad p > 2$ [5].

Список використаних джерел

1. *Yosida K.* Functional analysis / K. Yosida. – M.: Mir, 1967. – 624 c.
2. *Komura Y.* Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493 – 507.
3. *Kato T.* Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375 – 402.
4. *Minty G.* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341 – 346.
5. *Yaremenko M.I.* Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi- groups of contraction in L^p / M.I.Yaremenko // Матеріали конференції «International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008.» – 2008. – C.43.

Надійшла до редколегії 29.05.12